УДК 535
ББК 22.34
Л22

Ландсберг Г. С. **Оптика.** Учеб. пособие: Для вузов. — 6-е изд., стереот. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 848 с. — ISBN 5-9221-0314-8.

Шестое стереотипное издание учебного пособия по основам оптики. Предыдущее — пятое — издание (1976 г.) было переработано и существенно дополнено учениками и сотрудниками Г. С. Ландсберга. Последнее подготовленное автором издание (четвертое) вышло в 1957 г. Основа книги — лекции, прочитанные автором на физическом факультете Московского государственного университета и затем в Московском физико-техническом институте.

Для студентов физических специальностей высших учебных заведений.

Табл. 23. Илл. 511

Учебное пособие

ЛАНДСБЕРГ Григорий Самуилович

ОПТИКА

Редактор *Н.А. Райская*, *Д.А. Миртова*
Корректор *Л.Т. Варьяш*
Оригинал-макет: *О.Б. Широкова*
Оформление переплета: *А.Ю. Алехина*

ЛР № 071930 от 06.07.99. Подписано в печать 22.05.03. Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 53. Уч.-изд. л. 60,84. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997 Москва, Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru

ISBN 5-9221-0314-8

9 785922 103145

Отпечатано с диапозитивов
в РГУП «Чебоксарская типография № 1».
428019 Чебоксары, пр. И. Яковлева, 15

ISBN 5-9221-0314-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА

ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВЕТА ЧЕРЕЗ ГРАНИЦУ ДВУХ СРЕД

ОПТИКА АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ОПТИКА

ДЕЙСТВИЯ СВЕТА

ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ К ШЕСТОМУ ИЗДАНИЮ

Предыдущее — первое посмертное — издание фундаментального курса оптики Г.С. Ландсберга было переработано и существенно дополнено новым фактическим материалом учениками и сотрудниками Григория Самуиловича. Редакционное участие в нем приняли Ф.С. Ландсберг–Барышанская, С.Г. Раутиан и И.А. Яковлев. В свет это издание вышло в 1976 г. Последнее подготовленное с а м и м автором — в 1957 г.

Учитывая немеркнущую ценность учебного пособия по основам оптики и отсутствие учебников подобного масштаба, издательство сочло возможным выпустить в свет шестое издание «Оптики» Г.С. Ландсберга без изменений.

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА К ПЯТОМУ ИЗДАНИЮ

Общий курс оптики академика Г.С. Ландсберга (1890–1957) вышел в свет впервые в 1940 году. Основным материалом, определившим содержание книги, послужили лекции автора на физическом факультете Московского государственного университета, литографированные еще в 1935 году.

При подготовке последующих изданий Г.С. Ландсберг использовал дальнейшее развитие своего курса в Московском физико-техническом институте. Со времени выхода первого издания книга неоднократно перерабатывалась и дополнялась, и последнее подготовленное автором (четвертое) издание книги вышло в свет в 1957 году.

Несмотря на свое давнее для современного учебника физики происхождение, книга Г.С. Ландсберга сохранила до наших дней ведущее место в учебной литературе по основам оптики. Однако последние 15–20 лет ознаменовались крупнейшими научными достижениями в физической и прикладной оптике, уже вошедшими в систему ее преподавания. Поэтому перед выпуском в свет нового, пятого, издания «Оптики» потребовалось дополнить книгу новым фактическим материалом и частично изменить изложение некоторых ее глав, сохраняя общую структуру и стиль учебника по возможности неизменными.

Настоящее издание книги, пересмотренное и дополненное группой учеников и бывших сотрудников Г.С. Ландсберга, наряду с частично модернизированной трактовкой прежнего материала, содержит изложение физических основ новых направлений оптики, сложившихся за последние годы. Подавляющая часть материала, введенного в книгу, непосредственно или косвенно связана с созданием оптических квантовых генераторов (лазеров).

Не отмечая здесь некоторых изменений в прежнем тексте учебника, укажем лишь (следуя содержанию книги) наиболее существенные дополнения и их авторов. В главу IV введен параграф, посвященный развитию учения о когерентности света (§ 22, написан Г.П. Мотулевич при участии Т.И. Кузнецовой). В главу IX добавлен параграф о свойствах гауссовых пучков (§ 43, С.Г. Раутиан). Включена новая глава XI, в которой изложены физические принципы голографии (§ 57–62 и 64–67 написаны Т.С. Величкиной, И.А. Яковлевым, Т.Г. Черневич и О.А. Шустиным, § 63 — С.Г. Раутианом). В главу «Основы кристаллооптики» добавлен параграф о пространственной дисперсии света (§ 149, В.М. Агранович). Значительно переработан материал об эффекте Керра и о молекулярном рассеянии света (§ 152 и глава XXIX, И.Л. Фабелинский). Заново написаны параграфы, посвященные внутреннему фотоэффекту и приемникам излучения (§ 180 и 181, И.С. Абрамсон). Существенно модернизирован параграф о восприятии света глазом (§ 193, составлен С.Г. Раутианом по материалам Н.Д. Нюберга). Наконец, в настоящее издание включены новые главы XL и XLI. В главе XL рассмотрены оптические квантовые генераторы, принцип их устройства и главные особенности их излучения (§ 223, 225–227 написаны Т.С. Величкиной и И.А. Яковлевым, остальные параграфы — С.Г. Раутианом). Последняя глава посвящена описанию основных нелинейных оптических явлений (глава XLI, С.Г. Раутиан).

Рецензирование рукописи выполнено В.А. Фабрикантом.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Сохранив в основном общий характер книги и расположение материала, я внес в это новое издание некоторые изменения и исправления.

Я перенес главу, посвященную основным фотометрическим понятиям, во введение, желая использовать правильную терминологию уже при описании явлений интерференции и оставив в отделе лучевой оптики лишь вопросы, связанные с ролью оптических инструментов при преобразовании светового потока. Заново написаны многие страницы, посвященные интерференции, в изложении которой и во втором переработанном издании осталось много неудовлетворительного. Я постарался сгруппировать вопросы кристаллооптики в отделе VIII, хотя и не счел возможным полностью отказаться от изложения некоторых вопросов поляризации при двойном лучепреломлении в отделе VI, ибо основные фактические сведения по поляризации мне были необходимы при изложении вопросов прохождения света через границу двух сред, с которых мне казалось естественным начать ту часть курса, где проблема взаимодействия света и вещества начинает выдвигаться на первый план. Я переработал изложение астрономических методов определения скорости света и добавил некоторые новые сведения о последних лабораторных определениях этой величины. Гораздо больше внимания уделено аберрации света. Рассмотрены рефлекторы и менисковые системы Д.Д. Максутова. Значительным

изменениям подверглось изложение вопроса о разрешающей способности микроскопа: я постарался отчетливее представить проблему о самосветящихся и освещенных объектах. Точно так же значительно подробнее разъяснен вопрос о фазовой микроскопии, приобретший значительную актуальность за последние годы.

Луцино, сентябрь 1951 г. Акад. *Г.С. Ландсберг*

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

В настоящем, втором, издании моего курса «Оптика» общий план и характер книги оставлены без изменений. Многочисленные сочувственные отклики, которые нашла книга у ряда моих коллег и специалистов, ведущих преподавание в вузах, побудили меня сохранить общий стиль книги. Я подверг, однако, переработке и изменению многие места курса, стремясь выправить имевшиеся недостатки.

Переработан или написан вновь ряд параграфов, относящихся к интерференции; сильно переработано изложение принципа Ферма; добавлены проблемы электронной оптики.

Москва, 21. VI. 1946 г. *Гр. Ландсберг*

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

В основу настоящей книги положен курс лекций по общей физике, который я читал в течение ряда лет в Московском государственном университете.

Как и многие другие основные курсы, сложившиеся в Московском университете, этот курс находился под сильным влиянием акад. Л.И. Мандельштама, советами и указаниями которого я широко пользовался на протяжении многих лет, в течение которых нас связывает совместная работа и искренняя дружба. Я с особым удовольствием хочу отметить это обстоятельство и выразить Л.И. Мандельштаму мою глубокую признательность.

Университетское преподавание физики располагает мощным вспомогательным средством в виде физических демонстраций. При чтении курса я обращал большое внимание на эту сторону дела. В настоящей книге я старался конкретным описанием реальных экспериментов возместить невозможность иллюстрировать обсуждаемое демонстрационным опытом. Многочисленные демонстрации, при постановке которых я опирался на помощь коллектива физического кабинета МГУ, руководимого М.В. Колбановым, дали мне ценный материал для соответствующих описаний в тексте настоящей книги.

Наконец, я считаю своей обязанностью отметить работу ряда моих ассистентов, помогших мне превратить лекционные записи в книгу. Среди них я с особенной благодарностью вспоминаю покойного А.Г. Райского, оказавшего мне большую помощь при составлении первого наброска этой книги, изданного в свое время на правах рукописи.

Москва, октябрь 1940 г. *Гр. Ландсберг*

ВВЕДЕНИЕ

Глава I

КРАТКОЕ ИСТОРИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Основные законы оптики

Уже в первые периоды оптических исследований были на опыте установлены следующие четыре основных закона оптических явлений:

1. Закон прямолинейного распространения света.
2. Закон независимости световых пучков.
3. Закон отражения света от зеркальной поверхности.
4. Закон преломления света на границе двух прозрачных сред.

Дальнейшее изучение этих законов показало, во-первых, что они имеют гораздо более глубокий смысл, чем может казаться с первого взгляда, и, во-вторых, что их применение ограничено, и они являются лишь приближенными законами. Установление условий и границ применимости основных оптических законов означало важный прогресс в исследовании природы света.

Сущность этих законов сводится к следующему.

1. Закон прямолинейного распространения света. В однородной среде свет распространяется по прямым линиям.

Закон этот встречается в сочинении по оптике, приписываемом Евклиду (300 лет до нашей эры) и, вероятно, был известен и применялся гораздо раньше.

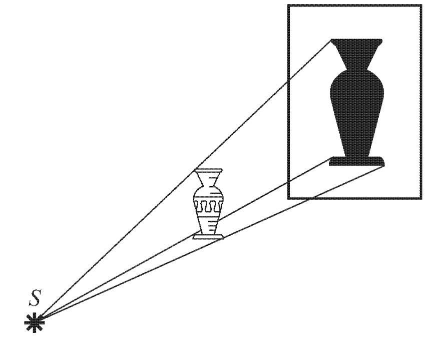


Рис. 1.1. Прямолинейное распространение света: образование тени при освещении точечным источником

Опытным доказательством этого закона могут служить наблюдения над резкими тенями, даваемыми точечными источниками света, или получение изображений при помощи малых отверстий. Соотношение между контуром предмета и его тенью при освещении точечным источником (т.е. источником, размеры которого очень малы по сравнению с расстоянием до предмета) соответствует геометрическому проецированию при помощи прямых линий (рис. 1.1). Аналогично рис. 1.2 иллюстрирует

получение изображения при помощи малого отверстия, причем форма и размер изображения показывают, что проецирование происходит при помощи прямолинейных лучей.

Закон прямолинейного распространения может считаться прочно установленным на опыте. Он имеет весьма глубокий смысл, ибо само понятие о прямой линии, по-видимому, возникло из оптических наблюдений. Геометрическое понятие прямой как линии, представляющей кратчайшее расстояние между двумя точками, есть понятие о линии, по которой распространяется свет в однородной среде. Отсюда берет начало практикуемый с незапамятных времен контроль прямолинейности лекала или изделия по лучу зрения.

Более детальное исследование описываемых явлений показывает, что закон прямолинейного распространения света теряет силу, если мы переходим к очень малым отверстиям. Так, в опыте, изображенном на рис. 1.2, мы получим хорошее изображение при размере отверстия около 0,5 мм; изображение будет очень несовершенным при

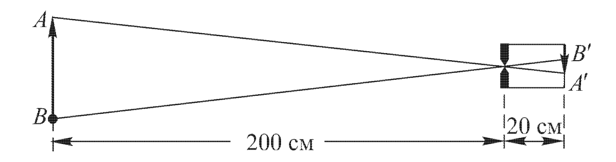


Рис. 1.2. Прямолинейное распространение света: получение изображения с помощью малого отверстия

отверстии 0,02–0,03 мм. Изображения совсем не получится и экран будет освещен практически равномерно при размерах отверстия около 0,5–1 мкм. Отступления от закона прямолинейного распространения света рассматриваются в учении о дифракции.

2. Закон независимости световых пучков. Световой поток можно разбить на отдельные световые пучки, выделяя их, например, при помощи диафрагм. Действие этих выделенных световых пучков оказывается независимым, т.е. эффект, производимый отдельным пучком, не зависит от того, действуют ли одновременно другие пучки или они устранены. Так, если на объектив фотоаппарата падает свет от обширного ландшафта, то, загораживая доступ части световых пучков, мы не изменяем изображения, даваемого остальными.

Более глубокое содержание этого закона выясняется в явлениях интерференции света (принцип суперпозиции, см. § 4 и 12).

3. Закон отражения света. Луч падающий, нормаль к отражающей поверхности и луч отраженный лежат в одной плоскости (рис. 1.3), причем углы между лучами и нормалью равны между собой: угол падения i равен углу отражения i'. Этот закон также упоминается в сочинении Евклида.

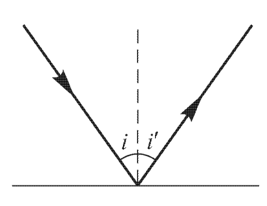


Рис. 1.3. К закону отражения

Установление его связано с употреблением полированных металлических поверхностей (зеркал), известных уже в очень отдаленную эпоху.

4. Закон преломления света. Луч падающий и луч преломленный лежат в одной плоскости с нормалью к границе раздела. Угол падения i и угол преломления r (рис. 1.4) связаны соотношением

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n, \tag{1.1}$$

где n — постоянная, не зависящая от углов i и r. Величина n — показатель преломления, определяется свойствами обеих сред, через границу раздела которых проходит свет, и зависит также от цвета лучей.

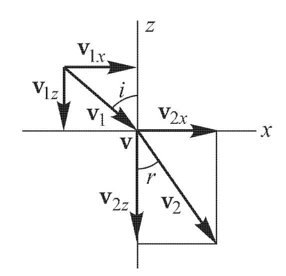


Рис. 1.4. К закону преломления

Явление преломления света было известно уже Аристотелю (350 лет до нашей эры). Попытка установить количественный закон принадлежит знаменитому астроному Птолемею (120 г. нашей эры), который предпринял измерение углов падения и преломления. Приводимые им данные измерений весьма точны. Птолемей учитывал влияние преломления в атмосфере на видимое положение светил (атмосферная рефракция) и даже составил таблицы рефракции. Однако измерения Птолемея относились к сравнительно небольшим углам, и поэтому он пришел к неправильному заключению о пропорциональности угла преломления углу падения. Значительно позже (около 1000 г.) арабский оптик Альгазен (Альхайтам) обнаружил, что отношение углов падения и преломления не остается постоянным, но правильного выражения закона дать не смог. Правильная формулировка закона преломления принадлежит Снеллию (1591–1626), указавшему в сочинении, оставшемся неопубликованным, что отношение косекансов углов падения и преломления остается постоянным, и Декарту, давшему в своей «Диоптрике» (1637 г.) современную формулировку закона преломления. Декарт установил свой закон около 1630 г.; были ли ему известны исследования Снеллия — неясно.

Закон отражения и закон преломления также справедливы лишь при соблюдении известных условий. В том случае, когда размер отражающего зеркала или поверхности, разделяющей две среды, мал, мы наблюдаем заметные отступления от указанных выше законов (см. главы, посвященные дифракции).

Помимо дифракционных явлений, основные законы, обсуждавшиеся выше, могут нарушаться и в случае нелинейных явлений, наблюдаемых при достаточно больших значениях интенсивности световых пучков (см. главы XL и XLI).

Однако для обширной области явлений, наблюдаемых в обычных оптических приборах, все перечисленные законы соблюдаются достаточно строго. Поэтому в весьма важном практически разделе оптики — учении об оптических инструментах — эти законы могут считаться вполне применимыми. Весь первый этап учения о свете со-

стоял в исследованиях, относящихся к установлению этих законов, и в их применении, т.е. закладывал основы *геометрической*, или *лучевой*, оптики.

§ 2. Главнейшие этапы развития оптических теорий

Основные законы оптики были установлены, как мы видели, давно. Однако точка зрения на них менялась на протяжении последующих эпох.

Основное свойство света — прямолинейное распространение, — по-видимому, заставило Ньютона (конец XVII века) держаться теории истечения световых частиц, летящих прямолинейно, согласно законам механики (закон инерции). Громадные успехи, достигнутые Ньютоном в механике, оказали коренное влияние на его взгляды на оптические явления. Отражение света понималось аналогично отражению упругого шарика при ударе о плоскость, где соблюдается закон: $\angle i = \angle i'$. Преломление Ньютон объяснял, так же как и Декарт, притяжением световых частиц преломляющей средой, благодаря чему меняется скорость световых частиц при переходе из первой среды во вторую.

Разложим скорость частицы в первой среде v_1 на составляющие v_{1x} и v_{1z} (см. рис. 1.4); тогда скорость частиц, переходящих из первой среды во вторую, меняется под влиянием притяжений между световыми частицами и частицами среды. Притяжения эти направлены по нормали к границе раздела двух сред и поэтому изменяют соответственно нормальные составляющие скорости ($v_{1z} \neq v_{2z}$), оставляя неизменными тангенциальные составляющие ($v_{1x} = v_{2x}$). Если вторая среда является оптически более плотной, то $v_{2z} > v_{1z}$ и, следовательно, $v_2 > v_1$. Так как $v_{1x} = v_1 \sin i$ и $v_{2x} = v_2 \sin r$, то из равенства $v_{1x} = v_{2x}$ следует, что отношение

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_2}{v_1} = n$$

есть постоянная, не зависящая от угла падения, поскольку скорости v_1 и v_2 не зависят от направления распространения света (изотропные среды), но зависящая от его цвета.

Указанная теория вкладывает определенный физический смысл в показатель преломления: n есть отношение скоростей световых частиц во второй и первой средах, причем скорость света в оптически более плотной среде оказывается большей, чем в менее плотной.

Во времена Ньютона еще не были сделаны прямые измерения скорости света в разных средах. Поэтому полученный вывод не мог быть проверен непосредственно. Впоследствии такие измерения были выполнены (Фуко, 1850 г.) и показали, что скорость света в плотных средах (вода, например) *меньше*, чем скорость света в воздухе, тогда как показатель преломления при переходе света из воздуха в воду равен 1,33, т.е. больше единицы. Таким образом, ньютоново толкование показателя преломления оказывается неправильным. Однако более углубленный анализ механизма распространения света в веществе показывает, что этот вопрос не столь прост.

В эпоху Ньютона было выполнено определение скорости, с которой свет распространяется в межпланетном пространстве (Рёмер, 1676 г.). Это определение дало величину около 300 000 км/с. Такое огромное значение скорости распространения света делало для многих современников Ньютона неприемлемым его представление о свете, ибо казалось затруднительным допустить наличие частиц, несущихся с такой скоростью.

Нелишне, может быть, заметить, что в наше время это возражение потеряло силу: мы знаем корпускулы (β-лучи и космические частицы), скорость полета которых весьма близка к скорости света.

Точно так же не имеет для нас убедительности и другое возражение, которое было несколько позже (1746 г.) выдвинуто Эйлером. Согласно Эйлеру ньютоново представление теории истечения «должно представляться и смелым и странным, потому что, если Солнце испускает непрерывно и во все стороны потоки светового вещества, и притом с такой огромной скоростью, то следовало бы ожидать, что оно должно скоро истощиться или, по крайней мере, претерпеть заметные изменения в течение стольких столетий». Современные представления о взаимосвязи между массой и энергией заставляют признать непрерывное уменьшение массы Солнца в процессе излучения. Многие черты ньютоновых воззрений на природу света встречаются в современных представлениях, являющихся, однако, по существу, совершенно новыми и покоящихся на совершенно иной экспериментальной базе.

Современник Ньютона Гюйгенс выступил с другой теорией света («Трактат о свете», написан в 1678 г., издан в 1690 г.). Он исходил из аналогии между многими акустическими и оптическими явлениями и полагал, что световое возбуждение следует рассматривать как упругие импульсы, распространяющиеся в особой среде — в *эфире*, заполняющем все пространство как внутри материальных тел, так и между ними. Огромная скорость распространения света обусловливается свойствами эфира (его упругостью и плотностью) и не предполагает быстрых перемещений частиц эфира. Из наблюдений над распространением волн по поверхности воды было известно, что сравнительно медленные движения частиц вверх и вниз могут давать начало волнам, быстро распространяющимся по поверхности воды.

Следует отметить, что хотя Гюйгенс говорил о световых волнах, он не вкладывал в это понятие того содержания, которое оно получило позже и которое мы принимаем и теперь. Он говорил, что свет распространяется сферическими поверхностями, и добавлял: «Я называю эти поверхности волнами по сходству с волнами, которые можно наблюдать на воде, в которую брошен камень». Гюйгенс не только не предполагал периодичности в световых явлениях, но даже прямо указывал: «...не нужно представлять себе, что сами эти волны следуют друг за другом на одинаковых расстояниях». В соответствии с этим он нигде не пользуется понятием длины волны и полагает, что свет распространяется прямолинейно, сколь бы малым ни было отверстие, через которое он проходит, ибо «отверстие это всегда достаточно велико, чтобы заключить большое количество непостижимо малых частиц эфирной материи». Таким образом, он не обращает внимания на яв-

ления дифракции, отмеченные Гримальди (см. посмертное сочинение Гримальди, опубликованное в 1665 г.) и Гуком (в период между 1672–1675 гг.). Точно так же он не упоминает в своем трактате о кольцах Ньютона — явлении, в котором сам Ньютон усматривал доказательство периодичности световых процессов.

Таким образом, широко распространенное мнение, что Гюйгенс является создателем разработанной волновой теории света, которая может быть противопоставлена корпускулярной теории Ньютона, представляется неточным. Во времена Гюйгенса–Ньютона волновая теория была намечена лишь очень схематично. При этом наиболее важный элемент ее представлений — периодичность световых явлений — гораздо отчетливее сознавал именно Ньютон, который, экспериментируя с так называемыми кольцами Ньютона (см. § 26), выполнил даже измерения, на основании которых мы можем достаточно точно вычислить длины волн излучения различного цвета.

Из идей Гюйгенса наибольшую ценность представляет общий принцип, носящий его имя и выдвинутый им как прием для отыскания направления распространения световых импульсов. При помощи этого принципа Гюйгенс объяснял не только обычные законы отражения и преломления, но даже явления двойного лучепреломления в исландском шпате, открытые в 1670 г. Бартолинусом.

Принцип Гюйгенса можно сформулировать следующим образом:

Каждая точка, до которой доходит световое возбуждение, является в свою очередь центром вторичных волн; поверхность, огибающая в некоторый момент времени эти вторичные волны, указывает положение к этому моменту фронта действительно распространяющейся волны.

В такой первоначальной форме принцип Гюйгенса говорит лишь о направлении распространения волнового *фронта*, который формально отождествляется с геометрической поверхностью, огибающей вторичные волны. Таким образом, речь идет собственно о распространении этой поверхности, а не о распространении волн, и выводы Гюйгенса относятся лишь к вопросу о направлении распространения света. В таком виде принцип Гюйгенса является, по существу, принципом *геометрической оптики* и, строго говоря, может применяться лишь в условиях пригодности геометрической оптики, т.е. когда длина световой волны бесконечно мала по сравнению с протяженностью волнового фронта. В этих условиях он позволяет вывести основные законы геометрической оптики (законы преломления и отражения). Рассмотрим для примера преломление плоской волны на границе двух сред, причем скорость волны в первой среде обозначим через v_1, во второй — через v_2.

Пусть i (рис. 1.5) — угол между CO, перпендикуляром к фронту волны, и OD, перпендикуляром к поверхности преломляющей среды. Пусть в момент $t = 0$ точка C фронта волны достигла преломляющей среды и совпала с точкой O; тогда за время τ, потребное для того, чтобы точка A' фронта волны достигла (в точке B) второй среды, из точки O, как из центра, вторичная волна распространяется на некоторое расстояние Of. Вторичные волны, имеющие центрами точки O_1, O_2 и т.д., распространяются к указанному моменту на соответствующие

расстояния, давая во второй среде элементарные сферические волны $f_1, f_2, \ldots$ По принципу Гюйгенса действительное положение волнового фронта указывается огибающей элементарных волн, т.е. плоскостью Bf_2f_1f. Очевидно, что

$$OB = \frac{Of}{\sin r} = \frac{A'B}{\sin i};$$

подставляя сюда значения $A'B = v_1\tau$ и $Of = v_2\tau$, получим

$$v_1\tau \sin r = v_2\tau \sin i,$$

или

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2} = n.$$

Мы видим, что теория Гюйгенса дает объяснение закона преломления, причем оказалось, что значение показателя преломления легко привести в согласие с результатами опыта Фуко, произведенного более полутораста лет спустя (см. § 125).

Так же естественно объясняется с точки зрения принципа Гюйгенса закон отражения волн (см. Упражнение 1).

Таким образом, принцип Гюйгенса сводится к *геометрическому* методу построения. В нем не находит себе употребления понятие длины волны, вследствие чего остаются неистолкованными явления при малых размерах отверстия, ограничивающего световую волну; нет также объяснения тому факту, что звуковые волны не следуют, вообще говоря, закону прямолинейного распространения. Принцип Гюйгенса в этом первоначальном виде применим, следовательно, лишь в области геометрической оптики.

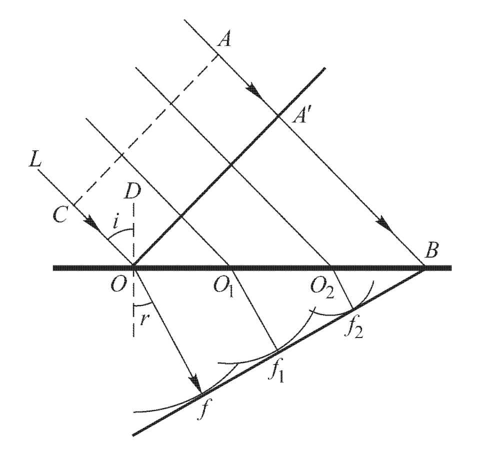


Рис. 1.5. Построение преломленой волны по Гюйгенсу

В течение всего XVIII века корпускулярная теория света (теория истечения) занимала господствующее положение в науке, однако острая борьба между этой и волновой теориями света не прекращалась. Убежденными противниками теории истечения были Эйлер («Новая теория света и цветов», 1746 г.) и Ломоносов («Слово о происхождении света, новую теорию о цветах представляющее», 1756 г.): они оба отстаивали и развивали представление о свете как о волнообразных колебаниях эфира.

В начале XIX века стала складываться последовательно развитая система волновой оптики. Главную роль при этом сыграли труды Юнга и Френеля. Френель (1815 г.) уточнил принцип Гюйгенса, дополнив его принципом интерференции Юнга, с помощью которого этот пос-

ледний дал в 1801 г. удовлетворительное толкование окраски тонких пластинок, наблюдаемых в отраженном свете. Принцип Гюйгенса–Френеля не только вполне удовлетворительно объяснил прямолинейное распространение света, но и позволил разрешить вопрос о распределении интенсивности света при прохождении света мимо препятствий, т.е. рассмотреть явления дифракции.

В дальнейшем изучение явлений поляризации света и интерференции поляризованных лучей (Френель и Араго) позволило установить особенности световых волн, которые были объяснены Юнгом и Френелем при помощи допущения, что световые волны *поперечны*, т.е. что направления колебаний в них перпендикулярны к направлению распространения.

Однако поперечные упругие волны возможны только в твердом теле, поэтому эфиру пришлось приписать свойства упругого твердого тела. Скорость распространения поперечных упругих волн в безграничном твердом теле определяется соотношением

$$c = \sqrt{\frac{N}{\rho}}, \tag{2.1}$$

где N — модуль сдвига, а ρ — плотность. Так как по астрономическим наблюдениям эфир не препятствует движению твердых тел планет, то ρ должно быть чрезвычайно мало; для получения нужных значений c необходимо в то же время приписать N очень большие значения. Для объяснения разной скорости света в различных средах приходилось считать, что свойства эфира различны в различных веществах, а для анизотропных веществ делать еще более сложные допущения.

Наконец, упругий эфир приходилось наделять особыми свойствами, чтобы объяснить полное отсутствие продольных колебаний в световых волнах, установленное упомянутыми выше опытами Френеля и Араго. Сопоставление всех этих особенностей упругого твердого эфира обнаруживает существенные затруднения упругой теории света, которая, к тому же, не указывала никаких связей оптики с другими физическими явлениями и не позволяла связать оптические константы, характеризующие вещество, с какими-либо другими параметрами его.

Между тем Фарадею удалось показать, что оптические явления не представляют собой изолированного класса процессов и что, в частности, существует связь между оптическими и магнитными явлениями; в 1846 г. Фарадеем было открыто явление вращения плоскости поляризации в магнитном поле. С другой стороны, был обнаружен и другой замечательный факт: оказалось, что отношение электромагнитной единицы силы тока к электростатической равно $3 \cdot 10^8$ м/с, т.е. равно скорости света (Вебер и Кольрауш, 1856 г.). Наконец, теоретические исследования Максвелла показали, что изменения электромагнитного поля не остаются локализованными в пространстве, а распространяются в вакууме со скоростью, равной отношению электромагнитной и электростатической единиц тока, т.е. со скоростью света. Заключение это было подтверждено позднее опытами Герца (1888 г.). На основании своих исследований Максвелл (1865 г.) сформулировал заключение, что *свет есть электромагнитное явление*.

Согласно Максвеллу

$$c/v = \sqrt{\varepsilon\mu}, \tag{2.2}$$

где c — скорость света в вакууме, а v — скорость в среде, имеющей диэлектрическую проницаемость ε и магнитную проницаемость μ. Так как $c/v = n$ (показатель преломления), то

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu}. \tag{2.3}$$

Это соотношение дает связь между оптическими, электрическими и магнитными константами вещества.

Но из (2.3) не видно, что n должно зависеть от длины волны света λ, тогда как из опыта известно, что существует *дисперсия* света, т.е. n меняется с изменением длины волны света: $n = f(\lambda)$ [1]. Объяснения этого факта теория Максвелла, ограничивающаяся для характеристики электромагнитных свойств вещества лишь макроскопическими параметрами (ε, μ), дать не могла. Необходимо было более детальное рассмотрение процессов взаимодействия вещества и света, покоящееся на углубленном представлении о структуре вещества. Это и было сделано Лорентцом, создавшим *электронную теорию* (1896 г.). Представление об электронах, входящих в состав атомов и могущих совершать в них колебания с определенным периодом, позволило объяснить явления испускания и поглощения света веществом, равно как и особенности распространения света в веществе. В частности, сделались понятными и явления дисперсии света, ибо диэлектрическая проницаемость ε оказывается в рамках электронной теории зависящей от частоты электромагнитного поля, т.е. от длины волны λ.

Параллельно с развитием волновой теории света эволюционирует и понятие эфира. В представлениях Гюйгенса это понятие еще довольно расплывчато и неопределенно; Ломоносов уже пытается уточнить и углубить его, рассматривая различные типы возможных движений эфира («текущее, коловратное и зыблющееся»), причем свет он связывает с «зыблющимся» движением эфира (колебания). Чрезвычайно интересно отметить, что Ломоносов считал возможным связать с эфиром и объяснение электрических явлений. В «Теории электричества» — книге, начатой в 1756 г., но не оконченной, он писал: «Так как эти явления (электрические) имеют место в пространстве, лишенном воздуха, а свет и огонь происходят в пустоте и зависят от эфира, то кажется правдоподобным, что эта электрическая материя тождественна с эфиром». И далее: «Чтобы это выяснить, необходимо изучить природу эфира; если она вполне пригодна для объяснения электрических явлений, то будет достаточно большая вероятность, что они происходят от движения эфира. Наконец, если не найдется никакой другой материи, то достовернейшая причина электричества будет движущийся эфир». В качестве одного из опытов, намеченных в «Теории электричества», значится: «Будет ли луч иначе преломляться в наэлектризованной воде или наэлектризованном стекле», т.е. один из основных электрооптических опытов, который был осуществлен лишь в конце XIX века.

---

[1] Объяснение дисперсии в рамках теории упругого эфира было дано путем специальных допущений (К о ш и, 1836 г.; З е л л ь м е й е р, 1871 г.).

Наибольшего развития волновые представления о свете в XVIII веке достигли у Эйлера. Согласно Эйлеру, свет представляет собой колебания эфира, подобно тому как звук есть колебания воздуха, причем различным его цветам соответствуют колебания различной частоты. Сравнение скорости света со скоростью звука позволило Эйлеру утверждать, что эфир есть субстанция, «значительно более тонкая и упругая, чем обыкновенный воздух». Эйлер, подобно Ломоносову, высказывает мысль, что источником всех электрических явлений служит тот же светоносный эфир. Согласно Эйлеру, электричество есть не что иное, как нарушение равновесия эфира: тела, в которых плотность эфира становится больше, чем в телах окружающих, оказываются наэлектризованными положительно; отрицательная электризация связана с уменьшением плотности эфира. Эйлер не распространял свою теорию на магнитные явления, поскольку электрическая природа магнетизма не была еще известна. Эти соображения были развиты Эйлером в его знаменитых «Письмах к немецкой принцессе», написанных в 1760–1761 гг. и изданных в Петербурге (1768–1772 гг.) во время второго пребывания Эйлера в России, куда он прибыл уже после смерти Ломоносова, с которым он состоял в постоянной дружеской научной переписке. Поэтому не исключено, что указанные представления сложились у Эйлера под влиянием идей Ломоносова.

Эфир Френеля–Юнга (начало XIX века), в отличие от эфира Ломоносова–Эйлера, был связан с истолкованием только оптических явлений. Несколько позже Фарадей для истолкования электрических и магнитных взаимодействий ввел также понятие гипотетической вещественной среды, состояние которой (упругие натяжения) должно было объяснить наблюдаемые на опыте эффекты взаимодействия между зарядами и между токами. Идеи Максвелла об электромагнитной природе света позволили объединить светоносный и электромагнитный эфир, сделав его носителем всех электромагнитных явлений. Возникновение электромагнитного поля, равно как и распространение его, представлялось как изменение состояния эфира, могущее распространяться от точки к точке с определенной скоростью.

Дальнейшее развитие электродинамики движущихся сред привело к представлению, что эфир, проникая во все тела, остается неподвижным при движении этих тел (Лорентц, см. § 130). Таким образом, физические характеристики эфира становятся все менее реальными. В представлении Лорентца (последние годы XIX века) эфир есть безграничная неподвижная среда, единственной характеристикой которой является лишь определенная скорость распространения в ней электромагнитных возмущений и, в частности, света ($c = 2{,}998 \cdot 10^8$ м/с).

Однако представление об эфире как о неподвижной среде, которая могла, следовательно, быть избранной в качестве системы отсчета, позволяя, таким образом, выделить абсолютное движение, пришло в противоречие с опытами (например, опыт Майкельсона, см. § 131) и его нельзя было сохранить. Релятивистская электродинамика, пришедшая на смену электродинамике Лорентца (см. § 131), вообще отказалась от представления об эфире, играющем роль материального носителя электромагнитных процессов. То обстоятельство, что свет (электромагнитное поле) и вещество представляют собой две различ-

ные формы материи, с особенной отчетливостью проявляется в превращениях кванта света в пару электрон–позитрон и обратно, в образовании светового кванта за счет объединения позитрона и электрона.

Наряду с теми трудностями, к которым приводила электронная теория Лорентца, опиравшаяся на представление о неподвижном эфире, выяснились и другие затруднения этой теории. Она оставляла неразъясненными многие особенности явлений, касающихся взаимодействия света и вещества. В частности, не получил удовлетворительного разрешения вопрос о распределении энергии по длинам волн в излучении накаленного черного тела. Накопившиеся затруднения вынудили Планка сформулировать теорию квантов (1900 г.), которая переносит идею прерывности (дискретности), заимствованную из учения о молекулярном строении вещества, на электромагнитные процессы, в том числе и на процесс испускания света. Теория квантов устранила затруднения в вопросах излучения света нагретыми телами; она по-новому поставила всю проблему взаимодействия света и вещества, понимание которой невозможно без квантовой интерпретации. Целый ряд оптических явлений, в частности фотоэлектрический эффект и вопросы рассеяния света, выдвинул на первый план корпускулярные особенности света. Процесс развития теории квантов, ставшей основой современного учения о строении атомов и молекул, продолжается и ныне.

Кратко очерченная нами картина развития руководящих оптических теорий показывает, как отразилась в истории оптики борьба двух (на первый взгляд взаимоисключающих) представлений на природу света — волновых и корпускулярных.

В первый период (Ньютон–Гюйгенс, до начала XIX века) противоположение этих представлений имело характер взаимного исключения, и научный прогресс состоял в поисках той экспериментальной базы и создании такой развитой теории, которая позволила бы, углубляя эти противопоставления, яснее понять их природу. Второй период — от Френеля–Юнга до возникновения представления о световых квантах (1905 г.) — явился периодом всестороннего развития волновых представлений, одержавших, казалось бы, окончательную победу над корпускулярными.

Последующий период состоит в накоплении новых, тонких экспериментальных фактов, открываемых благодаря прогрессу экспериментальных методов; одновременно идет и развитие более углубленных теоретических представлений, связанных с созданием теории квантов. В этот период не только обосновываются корпускулярные воззрения наряду с установленными уже волновыми, но и возникают успешные попытки синтеза тех и других представлений.

Современный этап развития оптики, начало которого можно датировать 1960 г., характеризуется новыми, весьма своеобразными чертами. Фундаментальные свойства света — волновые, квантовые, его электромагнитная природа — находят все более разнообразные и глубокие подтверждения и применения, продолжая служить основой для понимания всей совокупности оптических явлений. Однако круг этих явлений неизмеримо расширился. В начале 60-х годов были созданы источники с высокой степенью монохроматичности и направлен-

ности излучаемого ими света — так называемые оптические квантовые генераторы или лазеры. Распространение лазерного излучения и его взаимодействие с веществом во многих случаях протекает в существенно иных условиях, чем в случае излучения обычных, нелазерных источников, и конкретные явления приобретают совершенно новые, неизвестные ранее черты. Сказанное относится к отражению, преломлению, дифракции, рассеянию, поглощению и к другим основным оптическим явлениям (см. главы XL, XLI).

Глава II

ВОЛНЫ

§ 3. Образование волны. Волновое уравнение

Волновые процессы представляют собой весьма общий класс явлений. Образование волны обусловливается наличием связей между отдельными частями системы, в силу которых понятие изолированного процесса является, конечно, далеко идущей абстракцией. Сравнительно редки случаи, когда процесс, протекающий в какой-либо части пространства, можно рассматривать как изолированный. Обычно он вызывает соответствующие изменения в соседних точках системы, передавая им некоторое количество энергии. От этих точек возмущение переходит к смежным с ними и т.д., распространяясь от точки к точке, т.е. создавая волну. В зависимости от природы связей, которые обусловливают указанное взаимодействие, мы имеем волну той или иной природы. Упругие силы, действующие между элементами любого твердого, жидкого или газообразного тела, приводят к возникновению упругих (акустических) волн в телах. Возмущение горизонтальной поверхности воды становится источником поверхностных волн вследствие связей между соседними участками воды, обусловленных силой тяжести и подвижностью частиц жидкости. Небольшая деформация поверхности жидкости может дать начало капиллярным волнам, вызванным действием молекулярных сил, обусловливающих явления в поверхностном слое. Электромагнитное возмущение, возникшее в каком-либо месте пространства, в силу электромагнитных связей, выражающихся в законах электромагнетизма и электромагнитной индукции, становится источником таких же возмущений в соседних участках пространства, от которых оно передается все далее и далее: возникает электромагнитная волна, которая (по Максвеллу) должна распространяться со скоростью света.

Несмотря на бесконечное разнообразие физических процессов, вызывающих волны, образование волн происходит по одному общему типу. Возмущение, происшедшее в какой-нибудь точке в известный момент времени, проявляется спустя некоторое время на некотором расстоянии от начальной точки, т.е. передается с определенной скоростью. Рассмотрим для простоты распространение возмущения по какому-либо одному направлению x; мы можем изобразить возмуще-

ние s как функцию координаты x и времени t: $s = f(x,t)$. Легко видеть, что распространение возмущения со скоростью v вдоль направления x изобразится той же функцией, в аргумент которой t и x входят в виде комбинации $(vt - x)$ или $(t - x/v)$. Действительно, это строение аргумента показывает, что значение функции, которое она имеет в точке x в момент t, повторится в несколько более отдаленной точке $x + dx$ в более поздний момент $t + dt$, если только

$$vt - x = v(t + dt) - (x + dx). \tag{3.1}$$

Таким образом, возмущение за время dt переместится на расстояние dx, распространяясь со скоростью $\dfrac{dx}{dt}$. Из соотношения (3.1) следует, что $\dfrac{dx}{dt} = v$, т.е. эта скорость равна v.

Итак, *любая* функция от аргумента $vt-x$ выражает распространение возмущения вдоль x в сторону возрастающих значений x с постоянной скоростью v. Аналогично, любая функция от аргумента $vt + x$ описывает распространение импульса со скоростью v, но в противоположную сторону. Вид функции f позволяет определить *форму* возмущения для любого момента t и зависит от условий, вызвавших его возникновение.

Нетрудно показать, что дифференциальное уравнение, описывающее волновое движение, т.е. уравнение, решением которого будет любая функция от аргумента $(vt - x)$ или $(vt + x)$, будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}. \tag{3.2}$$

Действительно, простой подстановкой легко убедиться, что возмущение s, определенное соотношением

$$s = f_1(vt + x) + f_2(vt - x), \tag{3.3}$$

где f_1 и f_2 — *произвольные* функции, является решением (3.2). Так как это уравнение есть дифференциальное уравнение второго порядка, то найденное решение, как содержащее *две* произвольные функции, является *общим* его решением. Это решение представляет совокупность двух волн, распространяющихся со скоростью v навстречу друг другу. Само собой разумеется, что из самого дифференциального уравнения никогда нельзя сделать заключения о специальной форме функций f_1 и f_2. Поэтому дифференциальное уравнение типа (3.2) математически описывает всевозможные процессы распространения волн (вдоль оси x). Рассмотрим в качестве примера образование и распространение электромагнитной волны, изучаемые в курсах электричества.

Как известно, возникновение в каком-либо месте среды переменного электрического тока сопровождается появлением в окружающем пространстве переменного магнитного поля (электромагнетизм); это последнее ведет к образованию переменного электрического поля (электромагнитная индукция), обусловливающего переменные токи смещения в окружающем пространстве. Токи смещения обусловлива-

ют возникновение магнитного поля, так же как обычные токи проводимости в проводнике создают вокруг себя магнитное поле. Таким образом, все новые и новые области пространства становятся областью действия электромагнитных полей: возникшее где-либо электрическое колебание не остается локализованным, а постепенно захватывает все новые и новые участки пространства, распространяясь в виде электромагнитной волны.

Явления электромагнетизма и электромагнитной индукции, обусловливающие этот процесс, находят свое краткое математическое выражение в уравнениях Максвелла, устанавливающих связь между изменениями напряженностей электрического ($\mathbf{E}$) и магнитного ($\mathbf{H}$) полей. Рассуждения Максвелла в соответствии с опытными данными показывают, что направления электрического и магнитного векторов оказываются взаимно перпендикулярными и перпендикулярными к направлению распространения электромагнитной волны. В простейшем случае плоской волны, когда направление осей координат таково, что электрическое поле $\mathbf{E}$ направлено вдоль оси z, а магнитное поле $\mathbf{H}$ — вдоль оси y, уравнения Максвелла имеют вид

$$\frac{\mu}{c}\,\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial E}{\partial x}\,, \tag{3.4}$$

$$\frac{\varepsilon}{c}\,\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x}\,, \tag{3.5}$$

где μ и ε — соответственно магнитная и диэлектрическая проницаемости среды, а c — отношение электромагнитной и электростатической единиц силы тока, которое, как показали измерения, равно скорости света, т.е. $3 \cdot 10^8$ м/с.

Из этих уравнений с необходимостью следует, что возникшее в каком-либо месте электромагнитное поле распространяется в пространстве со скоростью $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$. Действительно, дифференцируя уравнение (3.4) по x, а уравнение (3.5) по t и исключая из них H, найдем

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}\,\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}\,, \tag{3.6}$$

т.е. дифференциальное уравнение волны, показывающее, что электрическое поле E распространяется в пространстве вдоль оси x со скоростью $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$. Таким образом, решением этого уравнения может быть выражение $E = f(x - vt)$, где f — произвольная функция.

Аналогичное заключение может быть получено и для величины магнитного поля H.

Между E и H легко установить связь; например, полагая $E = f(x - vt)$, найдем из уравнения (3.4)

$$\frac{\mu}{c}\,\frac{\partial H}{\partial t} = -f'(x - vf) = \frac{1}{v}\,\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}\,\frac{\partial E}{\partial t}\,,$$

или

$$\sqrt{\mu}\,\frac{\partial H}{\partial t} = \sqrt{\varepsilon}\,\frac{\partial E}{\partial t}\,,$$

или

$$\sqrt{\mu}\,H = \sqrt{\varepsilon}\,E + \text{const}. \qquad (3.7)$$

Так как во всех электродинамических (а следовательно, и оптических) процессах постоянное поле роли не играет, то постоянную в последнем соотношении можно без ограничения общности положить равной нулю. Итак, имеем

$$\sqrt{\mu}\,H = \sqrt{\varepsilon}\,E. \qquad (3.8)$$

Соотношение (3.8) показывает, что E и H связаны линейной зависимостью; E и H изменяются так, что они одновременно проходят через максимум и минимум. Таким образом, для электромагнитной волны (так же, как и для волн упругих) мы имеем совокупность *двух связанных векторов*, распространяющихся волнообразно с общей скоростью $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$. Взаимное расположение трех векторов $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{v}$ соответствует правовинтовому расположению, показанному на рис. 2.1.

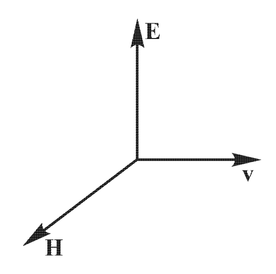


Рис. 2.1. Взаимное расположение векторов **E**, **H** и вектора скорости **v** в электромагнитной среде

§ 4. Монохроматические колебания и волны. Понятие о разложении Фурье

Итак, волну, распространяющуюся со скоростью v вдоль x, можно описать соотношением

$$s = f\left(t - \frac{x}{v}\right). \qquad (4.1)$$

Зафиксировав значение x, найдем, что вид функции f показывает, по какому закону изменяется с течением времени величина s, характеризующая возмущение, например напряженность электрического или магнитного поля. Вид функции f может быть, как уже сказано, произвольным. Особое значение имеет, как мы сейчас увидим, случай, когда f есть синусоидальная (или косинусоидальная) функция. В таком случае

$$s = a\sin\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right)\right], \qquad (4.2)$$

где a — *амплитуда* и T — *период* волны, а аргумент синусоидальной функции $\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right)$ носит название *фазы*. Значение s зависит, очевидно, от выбора начала отсчета времени t и координаты x. Поэтому для нескольких волн, имеющих одну и ту же амплитуду и период, значение s в данной точке x и в данный момент t может быть различно. Чтобы учесть это обстоятельство, удобно записать выражение для синусоидальной волны в более общем виде

$$s = a\sin\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi\right], \qquad (4.3)$$

φ носит название *начальной фазы*. Если начальные фазы всех волн совпадают или мы имеем дело с одной волной, то можно положить $\varphi = 0$ и сохранить для синусоидальной волны выражение (4.2).

Вид функции (4.2) показывает, что она периодична по времени с периодом T. Она обладает, кроме того, периодичностью и по аргументу x. Если дать x приращение $\lambda = vT$, то значение функции не изменится; действительно,

$$s = a\sin\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x+\lambda}{v}\right)\right] = a\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{vT} - 1\right)\right] = a\sin\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right)\right],$$

следовательно, расстояние по x, равное $\lambda = vT$, отделяет точки, в которых колебания совершаются в данный момент времени в одной и той же фазе. Величина $\lambda = vT$ называется *длиной волны.*

Выражение (4.2) можно переписать так:

$$s = a\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right]. \tag{4.4}$$

Введем обозначения: $2\pi/T = \omega$ — *круговая частота*, $2\pi/\lambda = k$ — *волновое число.* Тогда (4.4) примет следующий вид:

$$s = a\sin(\omega t - kx). \tag{4.5}$$

Если вместо круговой частоты ввести число колебаний в секунду (частота) $\nu = 1/T = \omega/2\pi$, то

$$s = a\sin(2\pi\nu t - kx). \tag{4.6}$$

Наконец, вместо тригонометрических функций можно ввести экспоненциальные, что часто облегчает математическую трактовку многих вопросов теории колебаний и волн. В основе этого лежит формула Эйлера

$$\exp(i\psi) = \cos\psi + i\sin\psi.$$

Действительная $\mathrm{Re}(\exp(i\psi))$ и мнимая $\mathrm{Im}(\exp(i\psi))$ части этого выражения представляют собой тригонометрические функции $\cos\psi$ и $\sin\psi$ соответственно. Так как большинство математических операций легче производить с показательными функциями, чем с тригонометрическими, то вычисления рационально вести следующим образом: введя вместо косинуса или синуса показательную функцию, произвести с ней все необходимые вычисления и в конце вернуться, если это желательно, к тригонометрическим функциям, взяв соответственно действительную или мнимую часть.

Если $\psi = \omega t$, то $a\exp(i\omega t)$ описывает гармоническое колебание с амплитудой a и круговой частотой ω (с периодом $T = 2\pi/\omega$). Если начальная фаза колебания равна δ, то выражение для колебания будет $a\exp[i(\omega t + \delta)] = a\exp(i\delta)\cdot\exp(i\omega t)$. Обозначая $a\exp(i\delta) = C$, мы вводим комплексную амплитуду C, причем в это выражение входит как обычная амплитуда a, так и начальная фаза колебаний δ. Таким образом,

$$C = a\exp(i\delta) = a\exp\delta + ia\sin\delta.$$

Для того чтобы найти амплитуду колебаний, точнее, ее квадрат a^2, надо помножить амплитуду C на сопряженную ей величину C^*:

$$a^2 = CC^* = a\exp(i\delta)a\exp(-i\delta).$$

Пользуясь показательной функцией, мы можем записать выражение (4.5) в виде

$$s = a\exp\left[i(\omega t - kx)\right] = a\exp\left(-ikx\right)\cdot\exp\left(i\omega t\right), \qquad (4.7)$$

а (4.6) — в виде

$$s = a\exp\left[i(2\pi\nu t - kx)\right] = a\exp\left(-ikx\right)\cdot\exp\left(i\cdot 2\pi\nu t\right). \qquad (4.8)$$

Волну, выраженную в одной из форм (4.2)–(4.8), будем называть *монохроматической волной.*

Применительно к введенной терминологии можно сказать, что скорость распространения монохроматической волны есть скорость, с которой передается от точки к точке фаза монохроматического колебания. Действительно, скорость распространения фазы определяется при помощи того соотношения между x и t, при котором фаза остается неизменной, т.е. из требования $\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right) = \text{const}$. Дифференцируя это соотношение, мы найдем, что скорость распространения фазы $\frac{dx}{dt} = v$. Поэтому v носит название *фазовой скорости* монохроматической волны. Пользуясь иным выражением для монохроматической волны, можно найти другое выражение для фазовой скорости. Так, из соотношения (4.5) мы найдем условие для определения фазовой скорости: $\omega t - kx = \text{const}$, т.е. $\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}$, конечно, совпадающее с данным выше.

Действительно,

$$\frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \frac{Tv}{T} = v.$$

Опыт показывает, что, по-видимому, только для вакуума фазовая скорость распространения световых волн является одной и той же для волн любого периода[1]). Во всех же остальных средах фазовая скорость распространения монохроматической световой волны зависит от ее длины, т.е. $v = \Phi(\lambda)$. Такие среды принято называть *диспергирующими.* Это обстоятельство имеет очень большое значение при распространении импульса сложного вида. Такой импульс выражается функцией произвольного вида $f(t)$. Во многих оптических и акустических проблемах $f(t)$ есть периодическая функция времени, хотя еще чаще она может и не быть периодической.

Рассмотрение общей задачи о распространении импульса произвольного вида очень упрощается тем, что любую функцию можно представить в виде суммы (вообще говоря, с бесконечным числом членов) некоторых определенных функций. Физически это означает, что *произвольный* импульс может быть представлен как сумма (бесконечно большого числа) импульсов *определенного* вида. Подавляющее большинство приемных устройств подчиняется *принципу суперпозиции,* который означает, что результат нескольких одновременных воздействий представляет собой просто сумму результатов, вызванных каждым воздействием в отдельности. Принцип суперпозиции приме-

[1]) См. подробнее гл. XXVIII.

ним в том случае, когда свойства принимающей системы не зависят от того, находится ли она уже под действием принимаемого возбуждения или нет, а эта независимость всегда имеет место, *если воздействие не становится слишком сильным* [1]. Поскольку принцип суперпозиции применим, мы можем заменить произвольный импульс суммой его слагающих и рассматривать действие каждой слагающей отдельно. Рациональный выбор этих слагающих, т.е. рациональный выбор метода разложения сложного импульса, позволяет чрезвычайно упростить рассмотрение задачи. Таким рациональным разложением является разложение на *монохроматические волны*, т.е. представление произвольной функции в виде совокупностей косинусов и синусов, введенное Фурье. Согласно теореме Фурье, любая функция [2] может быть представлена с какой угодно точностью в виде суммы синусоидальных и косинусоидальных функций с соответственно подобранными амплитудами, периодами и начальными фазами. При этом, если исходная функция периодична (с периодом T), то периоды слагающих синусов и косинусов находятся в простом кратном отношении T, $^1/_2T$, $^1/_3T$, $^1/_4T$, ... (представление в виде *ряда Фурье*). Если же функция не периодична, то в разложении содержатся не только кратные, но и все возможные периоды (представление в виде *интеграла Фурье*). Практически весьма хорошее приближение получается обычно, если ограничиться небольшим числом членов ряда Фурье.

Пользуясь разложением Фурье, мы можем представить импульс в виде совокупности монохроматических волн.

Если среда не обладает дисперсией, т.е. все монохроматические волны распространяются с одной и той же фазовой скоростью, то совокупность колебаний в любой точке среды, складываясь, дает импульс первоначальной формы. В такой среде любой импульс распространяется без изменения формы, как целое, так что фазовая скорость является в то же время и скоростью импульса. Если же среда обладает дисперсией, то отдельные синусоидальные колебания приходят в какую-либо точку x_1 к данному моменту t_1 с различным изменением в фазах и, складываясь, дают импульс измененной формы. Импульс, распространяясь в диспергирующей среде, деформируется, и понятие о скорости его распространения становится гораздо более сложным. К этому вопросу мы вернемся в гл. XX.

Таким образом, в диспергирующих средах, к числу которых принадлежат все среды (кроме вакуума), только бесконечная синусоидальная (монохроматическая) волна распространяется без искажения и с определенной скоростью. В этом кроется причина исключительного значения, которое имеет для оптики разложение Фурье в отличие от иных математически возможных разложений.

---

[1]) Явления, имеющие место при распространении в веществе световых волн с большой напряженностью электрического поля, описаны ниже. (см. главы XL, XLI)

[2]) Математические условия, которым должна удовлетворять функция для того, чтобы ее можно было аппроксимировать по методу Фурье, выполняются во всех физических проблемах.

Следует подчеркнуть, что волна называется монохроматической, если не только *период* T, но и *амплитуда* a и *начальная фаза* φ суть величины, не зависящие от времени t. Волна, описываемая одним из выражений (4.2)–(4.6), при a непостоянной не будет монохроматической. Волны, возникающие при распространении импульсов, изображенных на рисунках 2.2, 2.3, 2.4, амплитуда которых меняется с течением времени, являются примерами немонохроматических волн. Любая из соответствующих рисункам 2.2–2.4 волн не отвечает формуле $s = a\sin(\omega t - kx)$ с $a = \text{const}$ и может быть представлена по методу Фурье в виде суммы бесконечно длящихся синусоид и косинусоид. Другими словами, рассматриваемые волны представляют собой совокупность многих монохроматических волн различных периодов, а не просто монохроматическую волну.

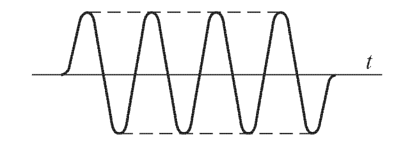


Рис. 2.2. Пример немонохроматической волны: «обрывок» синусоиды, или волновой цуг

Рис. 2.3. Пример немонохроматической волны: затухающая синусоида

Особый интерес представляет первый пример (рис. 2.2). В нем предполагается, что амплитуда сначала равна нулю, потом к моменту времени t_1 делается равной a_1, остается *постоянной* все время от t_1 до t_2 и затем вновь становится равной нулю.

Понятно, что всякая реальная волна, как бы тщательно ни поддерживалось постоянство амплитуды, в лучшем случае соответствует рассматриваемому примеру, ибо ни одна реальная волна не длится бесконечно долго, а начинается и кончается в определенные моменты времени. Значит, такая волна не является строго монохроматической, ибо ее амплитуда есть функция времени.

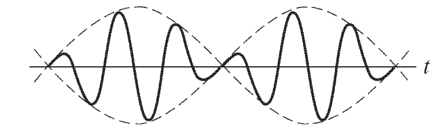


Рис. 2.4. Пример немонохроматической волны: наложение двух синусоид близкого периода (биения)

Чем длиннее интервал $t_2 - t_1$ по сравнению с периодом T, т.е. чем большее число волн данного периода испускается за время работы источника, тем более монохроматическим может считаться его излучение. Вообще, чем медленнее меняется амплитуда с течением времени, тем более монохроматична волна.

Рассмотрим следующий пример, показывающий, что синусоидальная волна с переменной амплитудой эквивалентна совокупности нескольких монохроматических волн.

Пусть дана волна, описываемая соотношением

$$s = a\cos(2\pi nt - kx), \tag{4.9}$$

где a — величина, изменяющаяся с течением времени по закону

$$a = A(1 + \cos(2\pi m t)),$$

т.е. m раз в течение секунды достигающая значения $2A$ и столько же раз обращающаяся в нуль, пробегая по указанному закону все промежуточные значения. При этом A есть некоторая *постоянная* величина. В таком случае имеем

$$s = A(1 + \cos(2\pi m t))\cos(2\pi n t - kx) = A\cos(2\pi n t - kx) + \\ + A\cos(2\pi m t)\,\cos(2\pi n t - kx) = A\cos(2\pi n t - kx) + \\ + \frac{1}{2}A\cos[2\pi(n+m)t - kx] + \frac{1}{2}A\cos[2\pi(n-m)t - kx].$$

Таким образом, наша волна есть не что иное, как совокупность трех строго монохроматических волн с амплитудами A, $^1\!/_2A$ и $^1\!/_2A$ и с частотами n, $n+m$ и $n-m$. Совокупность этих трех монохроматических волн и составляет заданную немонохроматическую волну, описываемую (4.9).

Пользуясь показательными функциями для выражения волны, можно упростить вычисления. Действительно, волна

$$s = a\exp[i(2\pi n t - kx)] = \\ = A\left[1 + \frac{1}{2}\exp(i\cdot 2\pi m t) + \frac{1}{2}\exp(-i\cdot 2\pi m t)\right]\exp[i(2\pi n t - kx)] = \\ = A\exp[i(2\pi n t - kx)] + \frac{1}{2}A\exp\{i[2\pi(n+m)t - kx]\} + \\ + \frac{1}{2}A\exp\{i[2\pi(n-m)t - kx]\}$$

представляет собой совокупность трех монохроматических волн с частотами n, $n+m$ и $n-m$.

Мы рассмотрели до конца приведенный выше пример ввиду крайней простоты математического разбора задачи. В случае иного, более сложного закона изменения амплитуды во времени (периодического или непериодического) физическая сущность явления остается той же, но математический анализ разыскания отдельных монохроматических волн, из которых можно сложить данную немонохроматическую, гораздо сложнее и требует, вообще говоря, применения теоремы Фурье.

Разобранный пример ясно показывает, что изменение амплитуды во времени влечет за собой нарушение монохроматичности волны и появление новых частот.

Изменение амплитуды во времени означает вариацию интенсивности и носит название *модуляции*. Модулировать можно не только амплитуду, но и фазу волны. Модуляция фазы также означает нарушение монохроматичности.

В приведенном примере модуляция амплитуды происходила по простому синусоидальному закону. В реальных явлениях обычно модуляция происходит более сложным образом, вообще говоря, нерегулярно (хаотическая модуляция). Так, в любом источнике света излучение отдельных атомов, составляющих источник, нерегулярно ме-

няется как по амплитуде, так и по фазе, испытывая хаотическую модуляцию [1]).

В том случае, когда модуляция происходит по закону, выбранному в нашем примере, она означает превращение монохроматической волны частоты n в три монохроматические волны с частотами n, $n+m$, $n-m$ и с соответствующими амплитудами. Такого рода воздействие на интенсивность волны, т.е. модуляция волны, сопровождающаяся расщеплением частоты монохроматической волны, играет большую роль во многих оптических явлениях. Следует отметить трудность непосредственного наблюдения в оптических опытах воздействия, подобного описанному выше, ибо частота оптических волн очень велика ($n \sim 10^{14}$ Гц), поэтому требуются очень быстрые изменения интенсивности, происходящие огромное число раз в секунду, для того чтобы можно было получить заметное изменение частоты, т.е. чтобы $n+m$ и $n-m$ заметно отличались от n.

Столь частую модуляцию произвести технически очень трудно, вследствие чего и явления подобного рода наблюдать в оптике трудно. Тем не менее они осуществляются как в искусственных опытах, так и в целом ряде естественных явлений (об этом см., например, в гл. XXIX).

Указанное явление очень легко осуществить в акустическом опыте, где мы имеем дело с небольшими частотами. Если взять камертон с частотой 100 Гц, то достаточно модулировать по указанному закону силу его звука два раза в секунду, для того чтобы получить сложную волну, эквивалентную трем волнам с частотами 98, 100 и 102 Гц. В этом легко убедиться простым опытом. Поставим друг против друга два камертона (рис. 2.5), имеющих частоты 100 и 98 Гц (или 102 Гц). Они не настроены в унисон, и волны, испускаемые одним камертоном, не вызовут резонанса в другом. Но если, заставив звучать первый камертон, мы будем два раза в секунду вносить и убирать заслонку M, прикрывающую его резонансный ящик, т.е. будем модулировать дважды в секунду силу его звука, то модулированная волна будет эквивалентна (приблизительно) совокупности трех волн с частотами 100, 98 и 102 Гц и второй камертон будет отзываться на одну из них. Опыт этого рода удается без всяких затруднений.

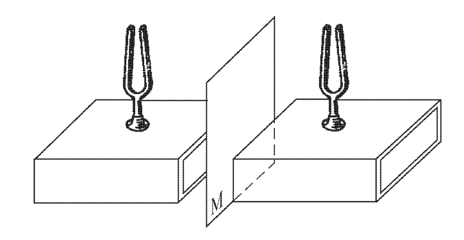


Рис. 2.5. Модуляция волны, испускаемой камертоном

Аналогичный опыт модуляции переменного тока легко осуществить при использовании для регистрации частоты язычкового частотомера. Когда синусоидальный ток с постоянной амплитудой действует на частотомер, то вибрирует язычок, отвечающий частоте тока

[1]) Подробный разбор явлений модуляции можно найти в книге: Г.С. Горелик. «Колебания и волны».– М.: Физматгиз, 1959.

(обычно $\omega = 50$ Гц). Но если ток прерывается периодически Ω раз в секунду или, еще лучше, если сила тока модулируется по синусоидальному закону с частотой Ω, то, кроме язычка ω, вибрируют и язычки, соответствующие частотам $(\omega + \Omega)$ и $(\omega - \Omega)$.

Следует отметить, что мы ввели понятие монохроматической волны на примере *плоской* волны, для которой амплитуда a не зависит от координат. Однако это ограничение несущественно, а волна остается монохроматической при любом a, если только a не зависит от *времени*: $a = f(x, y, z)$. Так, например, в § 6 мы будем иметь дело с монохроматической сферической волной, амплитуда которой убывает по мере удаления от точки излучения.

§ 5. Энергия, переносимая электромагнитной волной

Электромагнитная волна представляет собой электромагнитное возмущение, распространяющееся, как упоминалось в § 3, в вакууме со скоростью c, а в среде — со скоростью $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$, где ε — диэлектрическая проницаемость вещества, а μ — его магнитная проницаемость. С этим электромагнитным возмущением связана энергия, плотность которой (т.е. энергия, заключенная в единице объема) выражается для электрического поля через $\dfrac{\varepsilon}{8\pi}\,E^2$, а для магнитного — через $\dfrac{\mu}{8\pi}\,H^2$. В случае монохроматической волны $E = E_0 \sin(\omega t - kx)$ и $H = H_0 \sin(\omega t - kx)$, так что *энергия волны пропорциональна квадрату ее амплитуды.* Это соотношение между энергией и амплитудой сохраняет свое значение и для лобой другой волны, например, для упругих волн, рассматриваемых в механике и, в частности, в акустике.

При распространении электромагнитной волны происходит перенос (течение) энергии, подобно тому как это имеет место при распространении упругой волны. Вопрос о течении энергии в упругой волне был впервые (1874 г.) рассмотрен Н.А. Умовым [1]), который доказал общую теорему о потоке энергии в любой среде. Поток энергии в упругой волне может быть вычислен через величины, характеризующие потенциальную энергию упругой деформации и кинетическую энергию движения частиц упругой среды. Плотность потока энергии выражается с помощью специального вектора (вектор Умова). Аналогичное рассмотрение плодотворно и для электромагнитных волн. До известной степени можно уподобить энергию электрического поля потенциальной энергии упругой деформации, а энергию магнитного поля — кинетической энергии движения частей деформированного тела. Так же как и в случае упругой деформации, передача энергии от точки к точке в электромагнитной волне связана с тем обстоятельством, что волны электрической и магнитной напряженностей находятся в одной фазе. Такая волна называется *бегущей*. Движение энергии в бегущей упругой или электромагнитной волне удобно изображается при

[1]) Н. А. Умов. Уравнения движения энергии в телах.– Одесса, 1874; Избранные сочинения.– М.: Гостехиздат, 1950, с. 151–200.

помощи вектора **S**, который можно назвать вектором *потока энергии* и который показывает, какое количество энергии протекает в волне за 1 с через 1 м^2. Для электромагнитных волн вектор этот был введен Пойнтингом (1884 г.). Его уместно называть *вектором Умова–Пойнтинга.*

Нетрудно найти выражение этого вектора для простого случая, рассмотренного нами в § 3 и выражающего распространение плоской электромагнитной волны вдоль оси x. Умножив (3.4) на H и (3.5) на E и сложив, получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{c}{4\pi}\,\frac{\partial(EH)}{\partial x},$$

где $u = \dfrac{1}{8\pi}\,(\varepsilon E^2 + \mu H^2)$ есть плотность энергии. Рассматривая же поток энергии **S**, входящий и выходящий из элементарного объема, найдем выражение для изменения плотности энергии по времени

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial S}{\partial x}.$$

Отсюда

$$S = \frac{c}{4\pi}\,(EH), \tag{5.1}$$

что представляет собой численное выражение вектора Умова–Пойнтинга для электромагнитной волны [1]). Что касается направления вектора Умова–Пойнтинга, то он перпендикулярен к плоскости, проходящей через векторы электрической и магнитной напряженностей, т.е. в векторной форме запишется в общем виде

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\,[\mathbf{EH}]. \tag{5.2}$$

Своим направлением вектор Умова–Пойнтинга определяет направление переноса энергии волны и может быть во многих случаях принят за направление светового луча. Не следует, однако, забывать, что понятие луча есть понятие геометрической оптики и не имеет вполне соответствующего образа в области волновых представлений, для которых введен вектор Умова–Пойнтинга.

Монохроматическая электромагнитная волна, распространяющаяся вдоль x, представляет собой электромагнитное поле вида

$$E = \frac{a}{\sqrt{\varepsilon}}\,\sin\left[\frac{2\pi}{T}\,\left(t - \frac{x}{v}\right)\right] \quad \text{и} \quad H = \frac{a}{\sqrt{\mu}}\,\sin\left[\frac{2\pi}{T}\,\left(t - \frac{x}{v}\right)\right] \tag{5.3}$$

[1]) Приведенный вывод неприменим к диспергирующим средам, ферромагнетикам и сегнетоэлектрикам. Однако окончательное выражение (5.2) для вектора Умова–Пойнтинга верно и в этих случаях, а выражение для плотности электромагнитной энергии должно быть изменено.

Существенно заметить, что теорема Умова–Пойнтинга дает правильное выражение для потока энергии сквозь *замкнутую* поверхность. Поэтому формулировать ее как утверждение, что $S_n\,d\sigma$ дает количество энергии, проходящее в единицу времени через площадку $d\sigma$, вообще говоря, нельзя. Такое толкование имеет смысл лишь тогда, когда размеры $d\sigma$ велики по сравнению с длиной волны переменного поля.

в соответствии с (3.8). Волны (5.3) изображаются (рис. 2.6) так, что вектор **E** и вектор **H** одновременно достигают максимума и минимума, т.е. находятся в фазе, и энергия течет вдоль x (вектор **v**).

Из изложенной кратко теории Максвелла следует, что электромагнитное возмущение должно распространяться в диэлектрике со скоростью $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$. Для вакуума $\varepsilon = \mu = 1$, т.е. скорость распространения в нем электромагнитной волны $c = 3\cdot 10^8$ м/с, другими словами, она совпадает со скоростью света. Это основное заключение привело Максвелла к мысли, что свет представляет собой электромагнитное

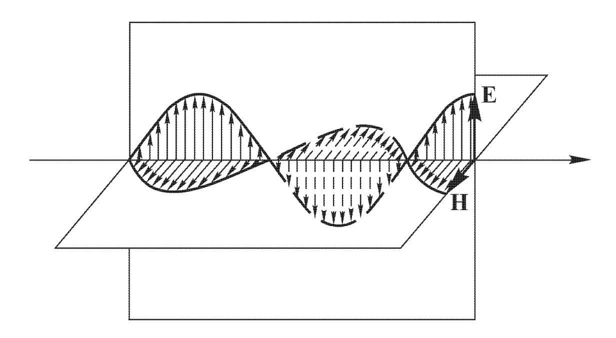


Рис. 2.6. Векторы **E** и **H** в бегущей волне находятся в фазе

явление. Написанное выше соотношение Максвелла $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ позволяет определить также фазовую скорость света (электромагнитного возмущения) для любого диэлектрика. Так как $c/v = n$ — показатель преломления среды, то, согласно Максвеллу, $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$, т.е. показатель преломления среды оказывается связанным с другими константами, характеризующими среду, именно, с диэлектрической проницаемостью ε (магнитная проницаемость для большинства тел близка к единице; кроме того, для процессов столь большой частоты, какими являются световые волны, мы можем, как показывает исследование, величину магнитной проницаемости считать равной единице для любой среды).

Дальнейшее исследование показало, однако, что показатель преломления зависит от частоты (дисперсия) и, значит, теория Максвелла нуждается в усовершенствовании: нельзя пользоваться непосредственно значением диэлектрической проницаемости, заимствованной из опытов с постоянным электрическим полем (статическая диэлектрическая проницаемость), а надо принять в расчет значение диэлектрической проницаемости, характеризующей среду под действием быстропеременного электрического поля (о динамической диэлектрической проницаемости см. ниже).

В настоящее время мы располагаем обширными данными, доказывающими тесную связь между оптическими и электромагнитными явлениями (электрооптика и магнитооптика), так что электромагнитная теория света является твердо обоснованной как с теоретической, так и с экспериментальной стороны.

§ 6. Классификация волн. Понятие о поляризации волн

При распространении монохроматической волны мы всегда можем найти геометрическое место точек, находящихся в *одной* фазе. Эта совокупность точек представляет собой поверхность, называемую *фронтом* волны. В частности, поверхностью общей фазы, т.е. фронтом волны, явится также и поверхность, все точки которой одновременно испытывают возмущение, вышедшее из источника в некоторый момент t. Это последнее определение фронта волны удобно применять и в том случае, когда мы имеем дело с совокупностью монохроматических волн, выходящих из источника с разными фазами (например, монохроматическое излучение многих независимых атомов), или когда источник посылает немонохроматическую волну (импульс).

Если источник возмущения очень мал (точка) и скорость распространения возмущения во все стороны одинакова (изотропная среда), то, очевидно, фронт волны должен иметь вид сферической поверхности с центром в источнике. В таком случае волна называется *сферической*. Уравнение такой монохроматической сферической волны имеет вид

$$s = \frac{a_0}{r}\sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)\right] = \frac{a_0}{r}\sin(\omega t - kr), \tag{6.1}$$

где a_0 — амплитуда на единичном расстоянии r от источника. Выражение это показывает, что амплитуда сферической волны уменьшается пропорционально расстоянию от источника, а следовательно, интенсивность волны, пропорциональная квадрату амплитуды, уменьшается как квадрат расстояния от источника, ибо энергия, переносимая волной, распределяется по все возрастающей площади.

Строго говоря, сферическая волна соответствует источнику точечного размера, т.е. представляет абстракцию. Однако даже при источнике конечного размера фронт волны на достаточно большом расстоянии r будет сферической поверхностью с достаточным приближением.

В практической оптике для многих задач можно считать фронт сферическим, если расстояние r превосходит линейные размеры источника в десять раз или более. В этом случае закон убывания интенсивности с квадратом расстояния выполняется практически с достаточной точностью (см. § 7).

Фронт волны перемещается вдоль направления нормали к фронту. В случае сферической волны нормали эти совпадают с проведенными из источника радиусами-векторами, вдоль которых передается возмущение из источника, называемыми *лучами*. Таким образом, распространение фронта сферической волны происходит *вдоль* лучей. Совпадение направления распространения фронта волны и лучей, всегда имеющее место в изотропной среде, не соблюдается, вообще говоря, в случае анизотропных сред (см. § 144) [1]).

---

[1]) Под направлением распространения мы понимаем направление, вдоль которого распространяется фронт волны, т.е. направление, перпендикулярное к поверхности постоянной фазы. Направление это обычно совпадает с направлением распространения энергии (лучом или вектором Умова–

Если r достаточно велико, т.е. источник находится очень далеко от области наблюдения, то фронт волны представляется частью сферической поверхности очень большого радиуса. Ее можно с достаточным приближением считать плоскостью. Волна, фронт которой представляется плоскостью, называется *плоской* волной. Если оси координат выбраны так, что плоскость фронта параллельна плоскости ZY, то уравнение такой плоской монохроматической волны имеет вид

$$s = a \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right]. \tag{6.2}$$

Действительно, из (6.2) следует, что поверхность одинаковой фазы определяется условием $x = \text{const}$, т.е. все точки плоскости, параллельной ZY, находятся в одинаковой фазе.

Фронт плоской волны перемещается параллельно самому себе, так что пути отдельных участков плоской волны параллельны между собой: плоская волна характеризует параллельный пучок лучей.

В соответствии с этим интенсивность волны, т.е. энергия, проходящая за 1 с через 1 м^2 поверхности, остается неизменной для всех значений координаты x, а следовательно, и амплитуда волны a не зависит от x. Необходимо отметить, что плоская волна также является идеализацией. Действительно, для того чтобы источник излучал плоскую волну, необходимо, чтобы он был удален бесконечно далеко. Так как всякий реальный источник излучает за 1 с конечную энергию, то при таком бесконечно удаленном источнике на ограниченный участок волны придется бесконечно малая энергия.

Возможны и другие методы образования плоской волны (параллельного пучка). Для этого можно, например, поместить источник в фокусе какой-либо оптической системы (коллиматор). Однако и в этом случае невозможно строго осуществить плоскую волну, передающую конечное количество энергии. Для того чтобы коллиматорное устройство давало строго параллельный пучок, необходимо, чтобы источник света был строго совмещен с фокусом системы, т.е. источник должен быть точечным в математическом смысле этого слова. Реальные источники, излучающие конечное количество энергии, протяженны и их нельзя точно совместить с фокусом оптической системы. Наконец, сама оптическая система, не обладающая никакими погрешностями, не осуществима. В частности, наличие дифракции, которая принципиально неустранима, исключает возможность создания строго параллельных пучков. Получаемый при помощи коллиматорного устройства пучок не будет, следовательно, строго параллельным, а волна будет отличаться от плоской. Таким образом, строго плоская

Пойнтинга. Поэтому часто не делают различия между этими двумя направлениями. Однако в ряде случаев (например, в кристаллооптике, при полном внутреннем отражении) эти два направления не совпадают. Так как векторы напряженности **E** и **H** всегда перпендикулярны к вектору Умова–Пойнтинга, то в упомянутых случаях по крайней мере один из этих векторов напряженности не перпендикулярен к направлению распространения, так что электромагнитная волна в данном случае не является строго поперечной. Исследование показывает, что заключение это относится к вектору **E**.

волна не имеет реального смысла. Практически световая волна, посылаемая звездами, может считаться плоской; Солнце, видимый угловой диаметр которого около $0{,}5^\circ$, дает волну, заметно отличную от плоской; выделив часть этой волны при помощи диафрагмы, размеры которой сколь угодно малы по сравнению с ее расстоянием до Солнца, мы вырежем пучок, крайние лучи которого составят между собой угол около $30'$ (дифракция во внимание не принимается). Хорошее коллиматорное устройство может обеспечить пучки, отступление которых от параллельных не превышает доли минуты, если источником служит маленькое ярко освещенное отверстие, с диаметром меньше 0,1 мм. Такое коллиматорное устройство дает, конечно, сравнительно мало света.

Общие законы волнового движения относятся в одинаковой степени как к продольным, так и к поперечным волнам. Поэтому очень многие явления имеют место для тех и других волн. В одном отношении, однако, поперечные волны отличаются важной особенностью. Продольные колебания симметричны относительно линии распространения, т.е. действие их на любой воспринимающий прибор не изменяется, если сам прибор будет поворачиваться вокруг направления распространения. При поперечных же волнах действия волн на прибор различны и зависят от того, в какой плоскости, проходящей через линию распространения, происходит поперечное колебание. На рис. 2.7 показаны некоторые из возможных направлений колебаний для поперечной волны, идущей от чертежа к наблюдателю.

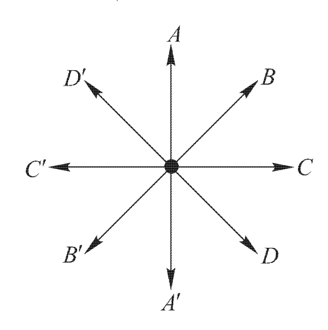


Рис. 2.7. Направления колебаний в естественной поперечной волне

Указанная особенность поперечных волн носит название *поляризации*. Если направление поперечного колебания сохраняется в одной плоскости, то волну называют *плоско* или *линейно поляризованной*. Возможны и другие, более сложные типы поляризации поперечной волны, при которых колебание вектора, оставаясь в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения, имеет более сложный характер (конец вектора описывает эллипс или окружность — *эллиптическая* или *круговая поляризация*).

Глава III

ФОТОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ И ЕДИНИЦЫ

§ 7. Основные понятия

Воздействие света на глаз или какой-либо другой приемный аппарат состоит прежде всего в передаче этому регистрирующему аппарату энергии, переносимой световой волной. Поэтому, прежде чем рассматривать законы оптических явлений, мы должны составить себе

представление об измерении света — фотометрии, которая сводится к измерению энергии, приносимой световой волной, или к измерению величин, так или иначе связанных с этой энергетической характеристикой. Прежде всего необходимо дать определения тем величинам, которые фигурируют в измерительной практике. Их выбор обусловлен особенностями приемных аппаратов, непосредственно реагирующих на ту или иную из этих величин, а также возможностью осуществления эталонов для воспроизведения этих величин. При формулировке теоретических законов или практических выводов в разнообразных областях (теория излучения, светотехника, оптотехника, физиологическая оптика и т.д.) оказывается нередко удобным пользование то одними, то другими из введенных величин.

Этим объясняется многообразие фотометрических понятий, к рассмотрению которых мы переходим.

а. Поток лучистой энергии Φ. Представим себе источник света настолько малых размеров, что на некотором расстоянии от него можно считать поверхность распространяющейся волны сферической. Такой источник обычно называют *точечным*.

Расположим на пути лучистой энергии, идущей от нашего источника L (рис. 3.1), какую-нибудь малую площадку σ и измерим количество энергии Q, протекающее через эту площадку за время τ.

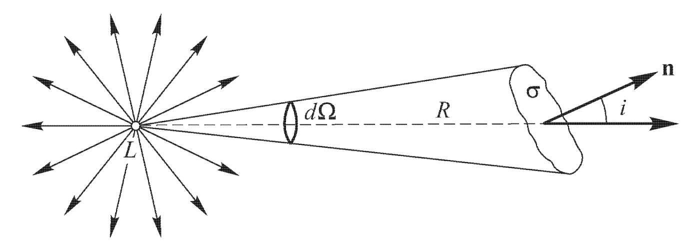


Рис. 3.1. К определению понятия «поток лучистой энергии»

Для этой цели можно покрыть площадку веществом, поглощающим всю падающую энергию (сажа), и измерить поглощенную энергию, например, по изменению температуры. Отношение

$$\frac{Q}{\tau} = d\Phi, \tag{7.1}$$

показывающее количество лучистой энергии, протекающей через площадку σ за единицу времени, т.е. *мощность* сквозь поверхность σ, называется *потоком* лучистой энергии через поверхность σ.

Так как лучистая энергия в однородной среде распространяется прямолинейно, то, проведя из точки L совокупность лучей, опирающихся на контур площадки σ, мы получим конус, ограничивающий часть потока, протекающую через σ. Если внутри среды поглощения энергии нет, то через любое сечение этого конуса протекает один и тот же поток. Сечение конуса сферической поверхностью с центром в L и с радиусом, равным единице, дает меру телесного угла конуса $d\Omega$. Если нормаль $\mathbf{n}$ к поверхности σ составляет угол i с осью конуса,

а расстояние от L до площадки есть R, то

$$d\Omega = \frac{\sigma \cos i}{R^2}\,. \tag{7.2}$$

Таким образом, выделенная нами часть потока приходится на телесный угол $d\Omega$. При этом мы предполагаем, что линейные размеры площадки σ малы по сравнению с R, так что $d\Omega$ — небольшая величина и внутри $d\Omega$ поток можно считать равномерным. Полный поток, идущий от L по всем направлениям, будет

$$\Phi = \int d\Phi.$$

Поток есть основное понятие, необходимое для оценки количества энергии, проникающей в наши приборы. Знание потока существенно необходимо при расчете многих оптических устройств. Такой приемник, как, например, фотоэлемент, непосредственно реагирует на поток (см. § 95).

б. Сила света J. Величину потока, приходящегося на единицу телесного угла, называют *силой света*. Если поток Φ посылается нашим источником равномерно по всем направлениям, то

$$J = \frac{\Phi}{4\pi} \tag{7.3}$$

есть сила света, одинаковая для любого направления. В случае неравномерного потока величина $\Phi/4\pi$ представляет лишь среднюю силу света и называется *средней сферической силой света*. Для определения истинной силы света по какому-либо направлению надо выделить вдоль него достаточно малый элементарный телесный угол $d\Omega$ и измерить световой поток $d\Phi$, приходящийся на этот телесный угол.

Сила света по данному направлению определится соотношением

$$J = \frac{d\Phi}{d\Omega}\,. \tag{7.4}$$

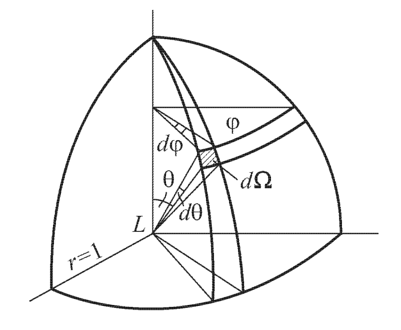


Рис. 3.2. К выводу выражения для телесного угла в полярных координатах

Охарактеризовав выбранное направление углами широты θ и долготы φ в некоторой полярной системе координат (рис. 3.2), можно обозначить силу света по данному направлению через $J_{\theta,\varphi}$. Величина эта есть функция φ и θ. Из рис. 3.2 явствует, что

$$d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

и, следовательно,

$$d\Phi = J_{\theta,\varphi} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

а полный поток

$$\Phi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} J_{\theta,\varphi} \sin\theta\, d\theta. \tag{7.5}$$

Если J не зависит от φ и θ (равномерный поток), то из этого общего соотношения следует, что

$$\Phi = 4\pi J \tag{7.6}$$

в согласии с соотношением (7.3).

Величина полного светового потока характеризует излучающий источник, и ее нельзя увеличить никакими оптическими системами. Действие этих систем может лишь сводиться к *перераспределению* светового потока, например, большей концентрации его по некоторым избранным направлениям. Таким способом достигается увеличение силы света по данным направлениям при соответствующем уменьшении ее по другим направлениям. Таково, например, действие сигнальных аппаратов или прожекторов, позволяющих при помощи источников, обладающих средней сферической силой света в несколько сот кандел, создавать на оси прожектора силу света в миллионы кандел (см. упражнение 134).

Основной светотехнический эталон есть эталон силы света (см. § 9).

в. Освещенность E. *Освещенностью* E называется величина потока, приходящегося на единицу поверхности. Освещенность площадки σ (обозначения те же, что и на рис. 3.1) есть

$$E = \frac{d\Phi}{\sigma} = \frac{J\,d\Omega}{\sigma} = \frac{J\cos i}{R^2}, \tag{7.7}$$

причем в последних двух равенствах введена сила света J по (7.4) и учтено (7.2).

Полученное выражение показывает, что освещенность, создаваемая *точечным* источником[1]), обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника до поверхности и прямо пропорциональна косинусу угла, составляемого направлением светового потока (осью узкого конуса, внутри которого распространяется поток) с нормалью к освещаемой поверхности. Это есть основной закон освещенности, создаваемой точечным источником (закон обратных квадратов).

Для *протяженных* источников мы можем разбить поверхность источников на элементарные участки (достаточно малые по сравнению с R) и, определив освещенность, создаваемую каждым из них по закону обратных квадратов, проинтегрировать затем по всей площади источника, приняв, конечно, во внимание зависимость силы света от направления. Зависимость освещенности от R окажется при этом более сложной. Однако при достаточно больших (по отношению к величине источника) расстояниях можно пользоваться и законом обратных квадратов, т.е. считать источник точечным. Этот упрощенный расчет дает практически хорошие результаты, если линейные размеры источника не превышают 1/10 расстояния от источника до освещаемой поверхности. Так, если источником служит равномерно освещенный диск диаметром 50 см, то в точке, лежащей на нормали к центру диска, ошибка в расчете по упрощенной формуле для рас-

[1]) То есть источником, размеры которого малы по сравнению с расстоянием до освещенной поверхности и поток от которого равномерен по всем направлениям.

стояния 50 см достигает приблизительно 25 %, для расстояния 2 м не превышает 1,5 %, а для расстояния 5 м составляет всего лишь 0,25 %.

Изменяя при помощи линз и зеркал распределение светового потока, мы получаем возможность сконцентрировать его на определенных участках поверхности и, таким образом, повысить их освещенность, уменьшив одновременно освещенность других. В частности, именно такое назначение имеют всевозможные арматуры (светильники), которыми обычно снабжаются источники света, предназначенные для освещения помещений, рабочих столов, улиц и т.д.

Так как в большинстве случаев мы воспринимаем несамосветящиеся предметы, то понятие освещенности приобретает очень важное значение. Большинство проблем светотехники сводится к созданию благоприятной освещенности. В «Нормах освещенности» даются требования, предъявляемые к рациональному освещению рабочих помещений.

г. Яркость источника B. Для многих светотехнических расчетов можно, как мы видели, считать некоторые источники точечными, т.е. пренебрегать их размерами по отношению к расстояниям, на которых наблюдается их действие. Однако многие из этих источников настолько велики, что мы можем при обычных расстояниях наблюдения глазом различить их форму; другими словами, размеры поверхности источника лежат в пределах способности глаза или инструмента отличать протяженный предмет от точки. По отношению к таким источникам, составляющим громадное большинство, имеет смысл определение понятия *поверхностной яркости* (или просто *яркости*), неприменимого к источникам, лежащим за пределами разрешающей способности (например к звездам). Поверхностная яркость B есть величина, характеризующая излучение светящейся поверхности по данному направлению, определяемому углом i с нормалью к светящейся поверхности и из данной области поверхности.

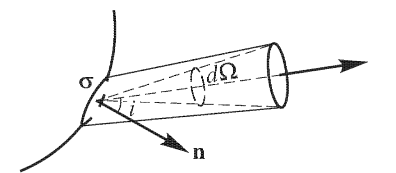


Рис. 3.3. К определению понятия яркости протяженного источника

Выделим пучок, опирающийся на элемент поверхности σ и образующий телесный угол $d\Omega$; ось пучка составляет угол i с нормалью $\mathbf{n}$ к σ (рис. 3.3). Видимая поверхность элемента в направлении оси есть $\sigma\cos i$. Пусть поток, посылаемый ею в телесный угол $d\Omega$, равен $d\Phi$. Посылаемый поток пропорционален *видимой* поверхности излучателя $\sigma\cos i$ и величине телесного угла $d\Omega$. Коэффициент пропорциональности зависит от свойств излучающей поверхности и может быть различным для различных направлений углов i относительно нормали. Обозначив этот коэффициент через B_i, найдем

$$d\Phi = B_i \sigma \cos i \, d\Omega$$

или

$$B_i = \frac{d\Phi}{\sigma \cos i \, d\Omega}. \qquad (7.8)$$

Коэффициент B_i носит название *яркости* источника по направлению, определяемому углом i. Итак, яркостью в данном направлении называется поток, посылаемый в этом направлении единицей видимой поверхности внутрь единичного телесного угла.

Яркость B_i есть величина, зависящая от направления; однако для некоторых источников она может от направления не зависеть. Такие источники называются источниками, подчиняющимися *закону Ламберта*. Строго говоря, таким источником является только абсолютно черное тело; матированная поверхность или мутная среда, каждый участок которых рассеивает свет равномерно во все стороны, служат более или менее хорошими подобиями ламбертова источника. Такие среды можно назвать *идеально рассеивающими*, если они подчиняются закону Ламберта.

Освещенная поверхность, покрытая окисью магния, или колпак из хорошего молочного стекла, освещенный изнутри, — вот примеры источников, достаточно хорошо приближающихся к ламбертовым. Поверхность Солнца излучает по закону, довольно близкому к закону Ламберта, хотя еще Бугер экспериментально установил, что яркость Солнца несколько падает от центра к периферии, составляя на расстоянии 3/4 радиуса около 80 % яркости в центре диска.

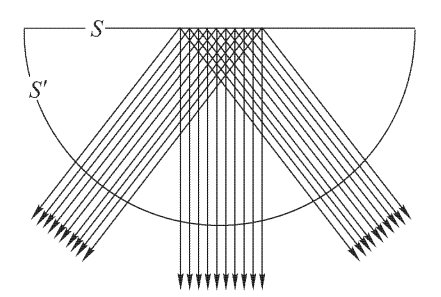


Рис. 3.4. Плоский диск и полусфера, подчиняющиеся закону Ламберта, кажутся одинаково яркими

Рассмотрим светящийся плоский диск S (рис. 3.4) и светящуюся полусферу S'. Предположим, что обе поверхности подчиняются закону Ламберта и имеют одинаковую яркость B. Тогда световые потоки, посылаемые соответствующими участками диска и сферы по любому направлению, будут одинаковы, ибо видимые поверхности их равны, а яркости по условию не зависят от направления. Таким образом, светящийся диск неотличим от светящейся полусферы, если они подчиняются закону Ламберта. Например, Солнце при не очень тщательных наблюдениях кажется нам плоским диском равномерной яркости; это доказывает, что Солнце является источником, довольно хорошо подчиняющимся закону Ламберта.

Знание яркости существенно необходимо при исследовании самосветящихся предметов, в частности, источников света. Наш глаз реагирует непосредственно на яркость источника (см. § 10). Понятие яркости используется и в теории излучения (см. гл. XXXVI).

д. Светимость S. С понятием яркости тесно связано понятие *светимости* S, представляющей собой интегральную величину, т.е. суммарный поток, посылаемый единицей поверхности наружу по *всем направлениям* (внутрь телесного угла 2π). Таким образом,

$$S = \frac{\Phi}{\sigma}, \tag{7.9}$$

если Φ есть полный поток, посылаемый светящейся площадкой σ наружу по всем направлениям.

Светимость и яркость связаны между собой простым соотношением. Поток внутри телесного угла $d\Omega$ по направлению i будет

$$d\Phi = B_i \sigma \cos i \, d\Omega = B_i \sigma \sin i \cos i \, di \, d\varphi,$$

так как

$$d\Omega = \sin i \, di \, d\varphi,$$

где φ — азимутальный угол. Чтобы получить поток, испускаемый площадкой σ, надо это выражение проинтегрировать по всем значениям i и φ, определяющим направление внутрь полусферы, т.е. по i от нуля до $\pi/2$ и по φ от нуля до 2π. Итак, полный поток (предполагается независимость B_i от φ)

$$\Phi = \int d\Phi = \sigma \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} B_i \sin i \cos i \, di = 2\pi\sigma \int_0^{\pi/2} B_i \sin i \cos i \, di.$$

Вместе с тем, тот же поток можно выразить через светимость S:

$$\Phi = \sigma S.$$

Таким образом, связь между светимостью и яркостью выражается соотношением

$$S = 2\pi \int_0^{\pi/2} B_i \cos i \sin i \, di. \tag{7.10}$$

Для источников, повинующихся закону Ламберта, $B_i = B$, т.е. не зависит от i. В этом случае имеем

$$S = 2\pi B \int_0^{\pi/2} \cos i \sin i \, di = \pi B. \tag{7.11}$$

Светимость — очень удобное для многих расчетов понятие. Мы с ним встретимся также в теории излучения.

Соотношение $\Phi = \sigma S$ показывает, что светимость S имеет ту же размерность, что и освещенность E, и представляет собой поток, отнесенный к единице поверхности. Светимость характеризует *свечение* поверхности, т.е. поток, *отходящий* от единицы поверхности; освещенность же характеризует *освещение* поверхности, т.е. поток, *приходящий* на единицу поверхности.

е. Интенсивность светового потока R. Для характеристики светового поля можно ввести еще понятие *интенсивности светового потока.* Под интенсивностью понимают величину светового потока, протекающего через единицу видимого сечения по направлению, определяемому углом i между направлением потока и нормалью к этому сечению, внутрь единичного телесного угла:

$$R = \frac{d\Phi}{\sigma \cos i \, d\Omega}. \tag{7.12}$$

Таким образом, интенсивность светового потока играет для характеристики светового поля ту же роль, что и яркость для характеристики светящейся поверхности. Поэтому ее нередко называют также *яркостью светового потока.*

Из сказанного выше должно быть ясным, что большое количество понятий, связанных с переносимой светом энергией, обусловлено, в конечном итоге, законом прямолинейного распространения света, в силу которого световая энергия может переноситься по-разному в различных направлениях и через элементы поверхности, находящиеся в разных точках. Наиболее дифференцированной характеристикой светового поля служит яркость (или интенсивность), определяющая мощность, распространяющуюся в заданном направлении вблизи заданной точки пространства. Сила света описывает мощность, также распространяющуюся в заданном направлении, но от всей поверхности протяженного источника. Освещенность и светимость характеризуют мощность, которая распространяется вблизи какой-либо определенной точки пространства во всех направлениях. Наконец, наиболее интегральной характеристикой является поток, — мощность, переносимая во всех направлениях через всю заданную поверхность. Приведенные соображения наглядно иллюстрируются соотношениями между введенными величинами и яркостью:

$$J = \int B_i \cos i \, d\sigma, \quad E = \int B_i \cos i \, d\Omega, \quad \Phi = \int B_i \cos i \, d\sigma \, d\Omega.$$

В зависимости от назначения и устройства регистрирующей аппаратуры результаты измерений наиболее естественно выражаются через ту или иную фотометрическую величину.

При наблюдении, например, звезд глаз реагирует на свет, испущенный в направлении наблюдателя всей поверхностью звезды; следовательно, в данном случае удобно говорить о силе света звезды. В фотографических приборах неважно, в каком направлении пришел свет в данную точку фотопленки и вызвал ее почернение, т.е. пленка осуществляет интегрирование энергии по углам; поэтому здесь регистрируется освещенность. В приборах с фотоэлектрическими или тепловыми приемниками излучения измеряется, как правило, полный поток, попадающий на всю поверхность приемника по всем направлениям.

Единицы измерения введенных фотометрических величин зависят, естественно, от выбора системы единиц. В системе СИ поток измеряется в ваттах, освещенность и светимость — в Вт/м^2, сила света — в Вт/ср, яркость и интенсивность — в Вт/(м^2·ср). Отметим, однако, что в оптических экспериментах сравнительно редко возникает необходимость подсчета потока, проходящего через поверхности с линейными размерами порядка метра. Как правило, речь идет о поверхностях с размерами порядка сантиметра (линзы, зеркала и другие элементы приборов) либо миллиметра (изображение). Поэтому отнесение мощности к м^2 неудобно, и в научной литературе часто используются единицы Вт/см^2 $= 10^4$ Вт/м^2 и Вт/мм^2 $= 10^6$ Вт/м^2.

§ 8. Переход от энергетических величин к световым

Мы пользовались до сих пор для определения величины потока и всех связанных с ним величин обычными единицами энергии и мощности, например, джоулями и ваттами. Такого рода энергетические измерения и выполняются, когда приемником для света является универсальный приемник, например, термоэлемент, действие которого основано на превращении поглощенной световой энергии в тепловую. Необходимо, однако, иметь в виду, что гораздо чаще мы используем в качестве приемников специальные аппараты, реакция которых зависит не только от энергии, приносимой светом, но также и от его спектрального состава. Такими весьма распространенными *селективными* приемниками являются фотопластинка, фотоэлемент и особенно человеческий глаз, играющий исключительно важную роль и при повседневном восприятии света, и как приемник излучения во многих оптических приборах. В соответствии с этим при многочисленных световых измерениях необходимо принимать во внимание особенности глаза, заставляющие выделять определенный узкий участок длин волн из всего многообразия электромагнитных колебаний. Нередко термином «свет» называют именно узкий интервал, заключенный примерно между 400 и 800 нм. С этой точки зрения интерес представляет не просто восприятие энергии, а *световое восприятие* ее. Поэтому следует установить переход от энергетических величин к величинам, характеризующим световое восприятие, и целесообразно ввести специальную систему единиц, приспособленную к свойствам глаза человека.

Чувствительность глаза к свету различной длины волны можно охарактеризовать *кривой видности*. Абсциссами этой кривой служат длины волн λ, а ординатами — относительные чувствительности глаза v_λ, т.е. величины, обратно пропорциональные мощностям монохроматического излучения, дающим одинаковые зрительные ощущения. Несмотря на субъективность таких оценок, воспроизводимость их достаточно хороша, и кривая видности v_λ, как показывают измерения, не сильно меняется при переходе от одного наблюдателя к другому. Лишь у немногих людей глаза заметно отклоняются от нормы.

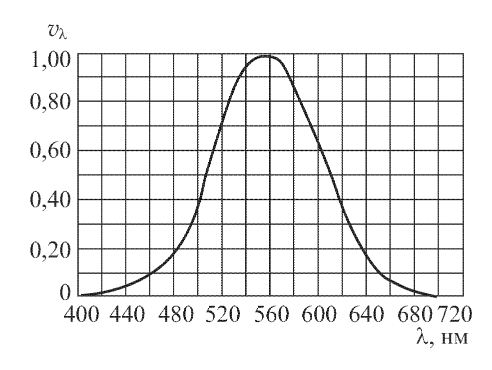


Рис. 3.5. Кривая видности

На основании многочисленных измерений установлен вид кривой видности, характеризующей средний нормальный глаз. Кривая видности имеет максимум при $\lambda = 555$ нм, условно принимаемый за единицу. Кривая, утвержденная Международной осветительной комиссией (МОК), изображена на рис. 3.5. Числовые значения ординат этой

кривой приведены в табл. 3.1. Из этой таблицы явствует, что, например, для $\lambda = 760$ нм требуется мощность, примерно в 20 000 раз больше, чем для $\lambda = 550$ нм, чтобы вызвать одинаковое по силе зрительное ощущение.

Таблица 3.1

Значения видности

λ, нм	v_λ	λ, нм	v_λ	λ, нм	v_λ
400	0,0004	520	0,710	640	0,175
410	0,0012	530	0,862	650	0,107
420	0,0040	540	0,954	660	0,061
430	0,0116	550	0,995	670	0,032
440	0,023	560	0,995	680	0,017
450	0,038	570	0,952	690	0,0082
460	0,060	580	0,870	700	0,0041
470	0,091	590	0,757	710	0,0021
480	0,139	600	0,631	720	0,00105
490	0,208	610	0,503	730	0,00052
500	0,323	620	0,381	740	0,00025
510	0,503	630	0,265	750	0,00012
				760	0,00006

§ 9. Единицы для световых измерений

Принимая в качестве приемника световой энергии глаз, МОК определила *световой поток как поток лучистой энергии, оцениваемой по зрительному ощущению.*

Таким образом, несмотря на введение понятия среднего глаза, существующий метод оценки сохраняет еще некоторую связь с психофизиологическими понятиями, ибо для измерения привлекается зрительное ощущение. Замена среднего глаза эквивалентным физическим приемником, например, фотоэлементом с соответственно подобранной кривой чувствительности, позволила бы осуществить эти измерения вполне объективно по силе возникающего фототока.

Для реализации определенного светового потока и других светотехнических величин служит условный световой эталон. Международным соглашением с 1 января 1948 г. введен новый воспроизводимый световой эталон, осуществляемый в виде абсолютно черного тела (см. § 197), применяемого при температуре затвердевания чистой платины (2046,6 K). Эталон должен быть осуществлен по определенной схеме с соблюдением определенных требований к чистоте платины. У нас в СССР такой эталон осуществлен фотометрической лабораторией Всесоюзного научно-исследовательского института метрологии.

Устройство и размеры излучателя, являющегося световым эталоном, показаны на рис. 3.6. Нагрев и расплавление платины производятся путем обогревания ее токами высокой частоты. Излучателем света является трубочка *2*, стенки которой имеют по всей длине

одинаковую температуру благодаря соприкосновению с разогретой платиной [1]).

Единица *силы света — кандела* (кд), равная 1/60 силы света, излучаемого в направлении нормали с 1/60 см^2 указанного светового эталона.

До введения нового эталона основной единицей силы света служила *международная свеча* (м. св), осуществляемая электрическими лампами специальной конструкции и равная 1,005 кд [2]).

Единицей *светового потока* является *люмен* (лм) — поток, посылаемый источником света в 1 кд внутрь телесного угла в 1 стерадиан (ср). Если источник обладает силой света в 1 кд по *любому* направлению, то он излучает полный световой поток, равный 4π лм $=$ $= 12{,}5$ лм. Новый световой эталон по нормальному направлению излучает с 1 см^2 поток, равный 60 лм/ср.

Единица *освещенности, люкс* (лк), есть освещенность, соответствующая потоку в 1 люмен, равномерно распределенному по площадке в 1 м^2:

$$1 \text{ лк} = 1 \text{ лм}/1\text{м}^2.$$

Таким образом, 1 лк есть освещенность, создаваемая на поверхности шара радиусом в 1 м, в центре которого расположен излучающий равномерно во все стороны источник силой в 1 кд.

Светимость, так же как освещенность, выражается в лм/м^2, но здесь эта величина относится к *испускаемому* потоку, а не к *полученному*.

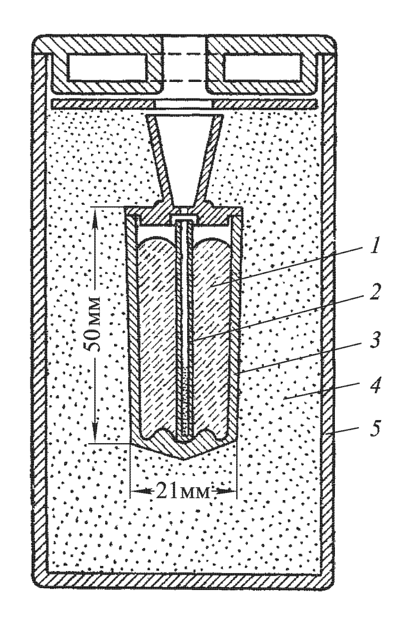


Рис. 3.6. Государственный световой эталон СССР: *1* — платина; *2* — трубочка из плавленной окиси тория; *3* — сосуд из плавленной окиси тория; *4* — засыпка из окиси тория; *5* — сосуд из кварца

Единицей *яркости* служит яркость площадки, дающая силу света в 1 кд с каждого квадратного метра в направлении, перпендикуляр-

[1]) Этот же эталон положен в основу световых единиц, принятых в международной системе единиц (СИ), которая введена в действие с 1 января 1963 г.

[2]) Применяемая иногда в лабораторных измерениях фитильная лампа определенной конструкции, в которой горит чистый амилацетат, не может служить эталоном силы света. Эта так называемая свеча Гефнера составляет около 0,90 кд. Распределение энергии свечи Гефнера по длинам волн хорошо изучено; именно поэтому она представляет интерес для лабораторных целей как сравнительно легко осуществляемый источник света с хорошо известными характеристиками.

ном к площадке. Таким образом, единица яркости есть «кандела на квадратный метр».

Помимо единицы кд/м^2 в научной литературе применяют ряд других единиц, перечисленных ниже:

Название	Обозначение	Значение в кд/м^2
нит	нт	1
стильб	сб	10^4
апостильб	асб	$1/\pi$
ламберт	лб	$10^4/\pi$

Нит есть, очевидно, просто иное название для кд/м^2. Стильб отвечает яркости площадки, дающей силу света 1 кд с каждого квадратного сантиметра. Физический смысл величин апостильб и ламберт связан с яркостью идеального рассеивателя, на котором создана определенная освещенность.

Идеальным рассеивателем называется поверхность, полностью рассеивающая весь падающий на нее поток, и притом равномерно по всем направлениям, так что яркость ее не зависит от направления (соблюдается закон Ламберта). Идеальный рассеиватель, освещенность которого доведена до одного люкса, рассеивает с каждого квадратного метра во все стороны весь падающий на него поток, т.е. 1 люмен с каждого квадратного метра. Таким образом, на основании соотношения $S = \pi B$ (см. § 7) он имеет яркость в $1/\pi = 0{,}318$ кд/м^2. Итак, 1 апостильб = 0,318 кд/м^2 — это яркость идеального рассеивателя, на котором создана освещенность в один люкс.

Ламберт отвечает, очевидно, яркости идеального рассеивателя, на котором создана освещенность 10^4 лк = 1 лм/см^2.

Яркости различных светящихся тел очень сильно разнятся между собой. Таблица 3.2 дает представление об этом разнообразии.

Таблица 3.2

Яркости различных светящихся тел

Источник	Яркость, кд/м^2
Ночное безлунное небо	около $1 \cdot 10^{-4}$
Неоновая лампа	$1 \cdot 10^3$
Полная луна, видимая сквозь атмосферу	$2{,}5 \cdot 10^3$
Пламя обычной стеариновой свечи	$5 \cdot 10^3$
Ясное дневное небо	$1{,}5 \cdot 10^4$
Газосветная лампа	$5 \cdot 10^4$
Металлический волосок лампы накаливания	$1{,}5 - 2 \cdot 10^6$
Спираль газонаполненной лампы накаливания	$5 \cdot 10^6$
Кратер обычной угольной дуги	$1{,}5 \cdot 10^8$
Солнце	$1{,}5 \cdot 10^9$
Капиллярная ртутная дуга сверхвысокого давления	$4 \cdot 10^8$
Шаровая ртутная лампа сверхвысокого давления (СВДШ)	$1{,}2 \cdot 10^9$
Импульсная стробоскопическая лампа (ИСШ)	$1 \cdot 10^{11}$

Интенсивность, так же как яркость, выражается в кд/м^2.

Располагая эталоном, дающим определенный световой поток, выражаемый в люменах, можно было бы определить этот поток в ваттах и установить связь между световыми и энергетическими единицами. Однако следует иметь в виду, что вследствие весьма различной чувствительности глаза к разным длинам волн сравнение характеризовало бы лишь экономичность примененного эталона и ничего не говорило бы об энергетической чувствительности глаза. Поэтому принято переходный множитель, определяющий в ваттах мощность, необходимую для получения светового ощущения, вызываемого потоком в 1 люмен, измерять для определенного узкого интервала длин волн, соответствующего максимуму чувствительности глаза, а именно, $\lambda = 555$ нм. Этот фактор A носит название *механического эквивалента света*. По новым измерениям он равен

$$A = 0{,}00160 \text{ Вт/лм}.$$

Ввиду трудности измерения этой величины и необходимости усреднять результаты многих наблюдателей точность определения A не превышает 2–3 %.

Для удобства мы сопоставляем все световые и энергетические единицы в табл. 3.3.

Таблица 3.3

Световые и энергетические единицы

Величины	Обозначения	Единица световая	Символ	Единица энергетическая
Световой поток	Φ	люмен	лм	ватт
Сила света	J	кандела	кд	ватт/стерадиан
Яркость	B	кандела/м^2	кд/м^2	ватт/(стерадиан·м^2)
Светимость	S	люмен/м^2	лм/м^2	ватт/м^2
Освещенность	E	люкс	лк	ватт/м^2

Совокупность фотометрических понятий и величин, установленных в качестве единиц для соответствующих измерений, даст возможность охарактеризовать действие света на наши приборы и установки.

§ 10. Световые измерения (фотометрия)

Фотометрические измерения разделяют на *объективные* (производимые с помощью приборов, не требующих участия глаза, например, с помощью фотоэлементов) и *субъективные*, или *визуальные*, в которых измерения основаны на показаниях глаза.

Объективные (фотоэлектрические) фотометры за последние годы получают все большее и большее развитие, постепенно вытесняя приборы, основанные на визуальных методах измерения. Мы познакомимся более подробно с этими приборами в главе о фотоэффекте. Укажем только, что все они основаны на зависимости, в силу которой фотоэлектрический ток прямо пропорционален поглощенному фотоэлементом световому потоку. Поэтому шкалу электроизмерительного

прибора, соединенного с фотоэлементом, можно градуировать непосредственно в тех или иных фотометрических единицах, например в люксах.

Визуальные измерения производятся непосредственно глазом. При этом надо иметь в виду, что глаз очень хорошо устанавливает *равенство* освещенностей двух каких-либо соприкасающихся поверхностей, но очень плохо непосредственно оценивает, во сколько раз освещенность одной поверхности больше освещенности второй. Поэтому все приборы, служащие для сравнения двух источников (так называемые фотометры), устроены так, что роль глаза сводится к установлению равенства освещенностей двух соприкасающихся полей, освещаемых сравниваемыми источниками. Для достижения равенства освещенностей применяются разнообразные приемы, ведущие к ослаблению освещенности, создаваемой более сильным источником. Принципиально наиболее простым является изменение расстояния от источника до фотометра и применение соотношения

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}\,. \tag{10.1}$$

Невозможность в очень широких пределах варьировать отношение расстояний заставляет прибегать к другим способам ослабления потока. К ним относятся поглощение света фильтром переменной толщины (клином) (рис. 3.7) или сетками с бо́льшим или меньшим отношением площади ячеек и проволок, введение в пучок вращающегося круга с секториальным вырезом большей или меньшей площади (рис. 3.8), а также ослабление света системой поляризационных призм (рис. 3.9).

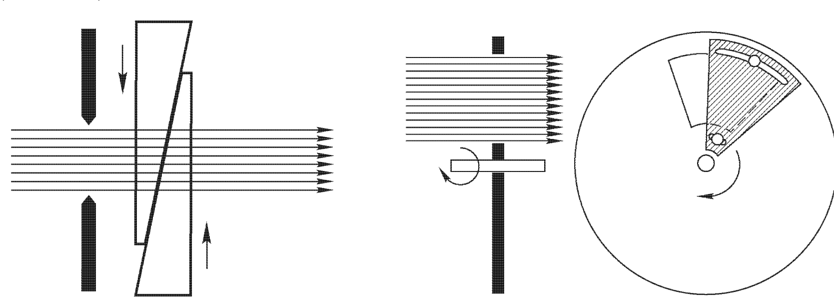


Рис. 3.7. Фотометрический ослабитель: поглощающий клин

Рис. 3.8. Фотометрический ослабитель: вращающийся диск с вырезом

Применение всех этих приспособлений требует тех или иных предосторожностей. Закон обратных квадратов справедлив лишь для точечных источников (см. § 7); фильтры должны в одинаковой степени поглощать свет различной длины волны (нейтральные фильтры); сетки не должны отбрасывать теней и поэтому употребляются предпочтительно в соединении с линзами, вблизи которых они располагаются. Наконец, вращающиеся секторы меняют, по существу, не поток, а *время* его действия и, следовательно, пригодны лишь тогда, ког-

да уменьшение среднего по времени значения потока эквивалентно уменьшению величины потока; это имеет место, как показали психофизиологические исследования, лишь при достаточной частоте прерывания (закон Тальбота).

Уравнивая тем или иным способом освещенности, создаваемые сравниваемыми источниками, мы находим отношение сил света источников

$$\frac{J_1}{J_2} = k.$$

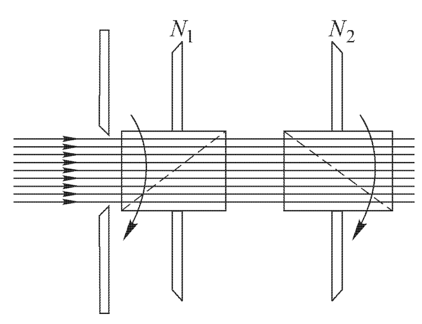


Рис. 3.9. Фотометрический ослабитель: система двух поляризационных призм. Яркость прошедшего света зависит от угла поворота вокруг горизонтальной оси

Если сила одного из источников известна (эталонный источник), то таким образом можно измерить силу второго источника в выбранном направлении. Измерив силу источника по разным направлениям, можно вычислить световой поток, освещенность и т.д. Установление равенства освещенностей делается глазом достаточно точно, если оба поля имеют одинаковый цвет. В противном случае сравнение не только затруднено, но иногда и вообще не имеет смысла. Для сравнения источников разного цвета (гетерохромная фотометрия) исходят из определения равенства освещенностей, основываясь на различных психофизиологических наблюдениях, которые и кладутся в основу измерений (например, исчезновение явления мигания при освещении прерывистым светом разной интенсивности и разного цвета).

Существуют также фотометры, позволяющие непосредственно определять суммарный световой поток, а следовательно, и среднюю сферическую силу света источника (шаровой фотометр или интегратор), освещенность поверхности (люксметр), яркость источника и т.д.

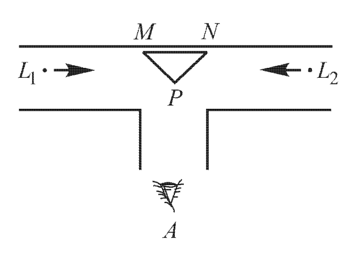


Рис. 3.10. Схема простейшего фотометра

Во всяком фотометре рассматривается некоторое поле, одна часть которого освещена только одним источником, а другая — только другим. При этом надо позаботиться о том, чтобы обе сравниваемые части поля фотометра освещались соответственными источниками под одним и тем же углом; глаз наблюдателя также должен рассматривать оба поля под одинаковыми углами. Рисунок 3.10 показывает, как осуществляется этот принцип в одной из простейших моделей фотометров.

Устройство этого фотометра крайне просто: глаз наблюдателя A рассматривает белую трехгранную призму MPN, помещенную вну-

три зачерненной трубки и освещаемую источниками L_1 и L_2. Варьируя расстояния от источников до призмы, можно уравнять освещенности поверхностей MP и PN. Для удобного измерения расстояний L_1P и L_2P приборы располагают на оптической скамье.

Более совершенно устроен фотометр Люммера–Бродхуна. Существенную часть фотометра составляет кубик Люммера, входящий как составная часть и во многие другие фотометрические аппараты. Кубик Люммера (рис. 3.11) состоит из двух прямоугольных призм, у одной из которых грань, соответствующая гипотенузе, оставлена плоской только в центре, края же сошлифованы. Призмы тщательно приполированы и плотно прижаты друг к другу, так что в месте соприкосновения представляют как бы один кусок и ведут себя подобно прозрачному телу (оптический контакт).

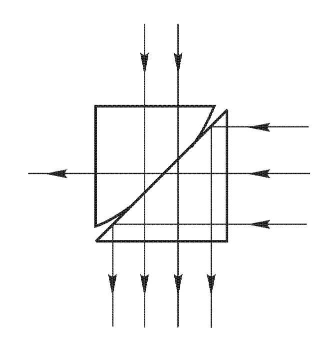


Рис. 3.11. Фотометрический кубик Люммера

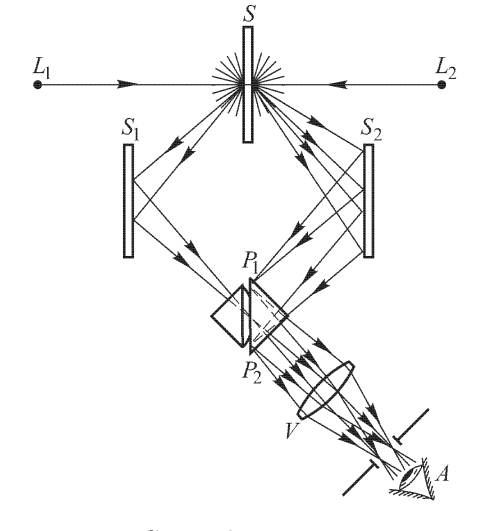


Рис. 3.12. Схема фотометра Люммера–Бродхуна

Схема фотометра с применением кубика Люммера показана на рис. 3.12. Здесь L_1 и L_2 — два сравниваемых источника света; S — белый диффузно разбрасывающий свет экран, вполне идентичный с обеих сторон; S_1 и S_2 — два вспомогательных зеркала; P_1P_2 — кубик Люммера; A — глаз наблюдателя и V — лупа, позволяющая визировать плоскость раздела кубика. При наблюдении мы видим центр кубика освещенным лучами, идущими от источника L_1, а внешняя часть поля освещается лучами от L_2, испытавшими полное внутреннее отражение на грани P_1P_2. Если освещенность экрана S с обеих сторон одинакова, то граница между полями исчезает. Определяя соответственные расстояния L_1S и L_2S, мы найдем отношение сил света источников.

В осветительной технике очень важным является вопрос, как велика должна быть *освещенность* на данной плоскости или в данном месте рабочего помещения для разных видов работы: чтения, черчения, шитья и т.д.

Освещенность, как упоминалось выше, измеряется числом люксов. Инструкциями инспекции по охране труда устанавливается определенное число люксов освещенности рабочего помещения. Наименьшая освещенность рабочей поверхности (стола) ни для какого вида работы не должна быть ниже 10 лк. Освещенность, при которой так же удобно шить, как при рассеянном дневном свете, составляет 60 лк. При освещенности порядка одного люкса можно с напряжением читать. Освещенность в одну-две десятых люкса создает при ясном небе полная луна. Этой освещенности достаточно летчику для прицельного бомбометания; такую освещенность, следовательно, нельзя допускать при светомаскировке. Освещенность в сотые доли люкса (молодая луна) позволяет производить некоторые виды работ ночью, например земляные работы. Освещенность в тысячные доли люкса (звездное небо), по-видимому, допустима при светомаскировке. Освещенность в десятитысячные доли люкса позволяет с трудом ориентироваться ночью.

Существуют специальные модели фотометров, которые приспособлены для непосредственного определения освещенности (люксметры). В последнее время в качестве люксметров с успехом применяются фотоэлементы, шкала которых проградуирована соответствующим образом.

Только точечный источник дает по любому направлению одну и ту же силу света, и, следовательно, для характеристики его достаточно произвести одно измерение на оптической скамье. Для реальных же источников сила света по различным направлениям различна, так что для полной характеристики распределения света от источника требуется производить измерения в различных азимутах. Такого рода диаграммы (в полярных координатах) чрезвычайно показательны (рис. 3.13). В тех случаях, когда источником света служит лампа, помещенная в соответствующую арматуру (светильник), диаграммы могут приобретать весьма несимметрический вид (например для автомобильных фар).

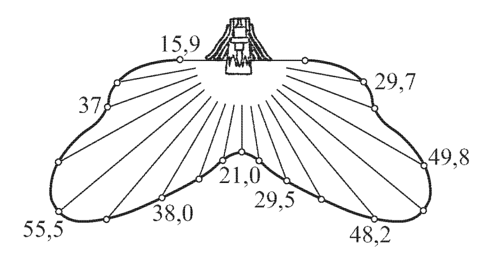


Рис. 3.13. Полярная диаграмма силы света лампы накаливания в арматуре. (Цифры выражают силу света по данному направлению в условных единицах)

Во многих случаях достаточно знать среднюю сферическую силу света, т.е. значение полного потока, посылаемого источником, а не его распределение по различным направлениям. Такое измерение может быть произведено в так называемых *интегральных фотометрах*. Одним из таких фотометров служит *шаровой* фотометр Ульбрехта. Исследуемый источник подвешивается внутри полого шара K (рис. 3.14), внутренняя поверхность которого покрыта белой матовой краской. Белый матовый экран S защищает отверстие O на поверхности шара от действия прямых лучей источника. Если отражение света от внут-

ренней поверхности шара K следует закону Ламберта, то освещенность E отверстия O пропорциональна полному световому потоку Φ лампы:

$$E = c\Phi, \qquad (10.2)$$

где c — множитель пропорциональности, зависящий от размеров шара и его окраски. Этот множитель определяется экспериментально путем замены испытуемой лампы нормальной. Отверстие O покрыто пластинкой из молочного стекла.

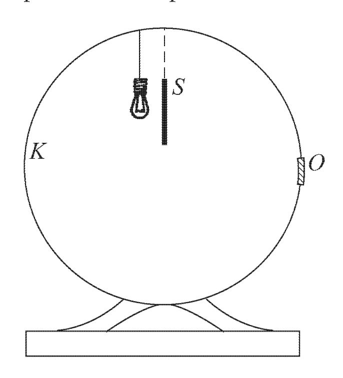


Рис. 3.14. Фотометрический шар (схематическое изображение разреза)

Для измерения E определяют яркость этой пластинки обычным фотометром на оптической скамье или каким-либо иным. Обычно употребляют шары Ульбрехта не менее 1 м диаметром. Нередко применяются и бо́льшие шары.

Своеобразной разновидностью визуального метода, пригодного для измерения самых малых яркостей, является метод, разработанный акад. С.И. Вавиловым и известный под названием «метода гашения». Основоположником этого метода С.И. Вавилов считал Франсуа Мари (1700 г.), но следует отметить, что лишь после тщательных исследований С.И. Вавилова метод этот приобрел характер важного способа оценки слабых интенсивностей. Метод покоится на способности глаза довольно хорошо оценивать *пороговое* значение яркости, т.е. минимальную, еще воспринимаемую отдохнувшим глазом яркость. Это пороговое значение оказывается для каждого наблюдателя довольно устойчивым. Метод гашения заключается в том, что каким-либо способом ослабляют наблюдаемую яркость до порогового значения. Зная, во сколько раз пришлось произвести ослабление, наблюдатель может определить исходную яркость. Таким путем удается оценивать яркости в десятитысячные кд/м^2 и ниже, что почти недоступно никаким другим методам.

ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА

Глава IV

КОГЕРЕНТНОСТЬ

§ 11. Введение

Закон независимости световых пучков, упомянутый в § 1, означает, что световые пучки, встречаясь, не воздействуют друг на друга. Это положение было ясно сформулировано Гюйгенсом, который писал в своем «Трактате»: «Одно из чудеснейших свойств света состоит в том, что, когда он приходит из разных и даже противоположных сторон, лучи его производят свое действие, проходя один сквозь другой без всякой помехи. Этим вызывается то, что несколько зрителей могут одновременно видеть через одно и то же отверстие различные предметы ...». Сам Гюйгенс прибавляет, что этот вывод нетрудно понять с точки зрения волновых представлений. Он является следствием принципа суперпозиции (см. § 4), в силу которого световой вектор одной световой волны просто складывается с вектором другой волны, не испытывая никакого искажения. При этом, однако, возникает следующий вопрос. В силу принципа суперпозиции при сложении векторов отдельных волн может получиться волна, амплитуда которой равна, например, сумме амплитуд складывающихся волн. А так как интенсивность волны пропорциональна квадрату амплитуды, то интенсивность результирующей волны не будет, вообще говоря, равна сумме интенсивностей складывающихся волн, ибо квадрат суммы нескольких величин не равен сумме их квадратов. Обычный же опыт показывает, что освещенность, создаваемая двумя или несколькими световыми пучками, представляется простой суммой освещенностей, создаваемых отдельными пучками. Таким образом, обычные экспериментальные факты кажутся на первый взгляд противоречащими волновым представлениям.

§ 12. Понятие о когерентности. Интерференция колебаний

Для выяснения этой фундаментальной проблемы напомним сведения, относящиеся к сложению колебаний и волн.

При сложении двух гармонических колебаний одного периода

$$s_1 = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \quad \text{и} \quad s_2 = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2), \tag{12.1}$$

происходящих по одному направлению, получится вновь гармоническое колебание того же периода

$$s = s_1 + s_2 = A \sin(\omega t + \theta), \tag{12.2}$$

амплитуда A и фаза θ которого определяются из следующих соотношений:

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2), \tag{12.3}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{a_1 \sin\varphi_1 + a_2 \sin\varphi_2}{a_1 \cos\varphi_1 + a_2 \cos\varphi_2} \tag{12.4}$$

(см. упражнения 13 и 14).

Выражение (12.3) показывает, что квадрат амплитуды результирующего колебания не равняется сумме квадратов амплитуд складывающихся колебаний, т.е. энергия результирующего колебания не равна сумме энергий складывающихся колебаний. Результат сложения зависит от *разности фаз* $(\varphi_1 - \varphi_2)$ исходных колебаний и может иметь любое значение в пределах от $A^2 = (a_1 - a_2)^2$ (при $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$) до $A^2 = (a_1 + a_2)^2$ (при $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$).

Однако практически мы никогда не имеем дела со строго гармоническими колебаниями, описываемыми (12.1), т.е. колебаниями, длящимися бесконечно долго с неизменной амплитудой. Обычно колебания время от времени обрываются и возникают вновь уже с иной, нерегулярно измененной фазой, т.е. не являются строго гармоническими. В таком случае и результирующая интенсивность ($I \infty A^2$) также меняется с течением времени [1]).

Наблюдая эту интенсивность, мы могли бы получить изменяющиеся значения; однако для этого необходимо применить для наблюдения прибор, который реагировал бы достаточно быстро, чтобы отмечать изменения I. В противном случае мы не сможем следить за всеми изменениями I и будем регистрировать только некоторое *среднее во времени* значение интенсивности I, обозначаемое через $\overline{I}$, подобно тому как глаз не в состоянии следить за колебаниями яркости лампочки накаливания, питаемой переменным током, и отмечает некоторую постоянную *среднюю* яркость.

Вводя обозначение $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$, вычислим средний квадрат амплитуды результирующего колебания за промежуток времени τ, длительный по сравнению со временем нерегулярных изменений фазы ψ:

$$\bar{I} \infty \bar{A}^2 = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau A^2\, d\tau = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau (a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos\psi)\, d\tau =$$

$$= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \cos\psi\, d\tau. \tag{12.5}$$

[1]) Особенности интерференционных явлений, излагаемые здесь и ниже, в равной мере относятся к любой фотометрической величине (потоку, яркости, освещенности). Поэтому не имеет смысла конкретизировать, о какой именно фотометрической величине идет речь в том или ином случае, и термин «интенсивность» будет применяться для любой энергетической величины, пропорциональной квадрату амплитуды колебаний напряженности поля.

Если ψ остается неизменным в течение времени наблюдения τ, то

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \cos\psi\, d\tau = \cos\psi;$$

следовательно,

$$\bar{A}^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos\psi, \quad \text{т.е.} \quad \bar{I} \neq I_1 + I_2.$$

При случайном же обрыве и возобновлении колебаний разность фаз изменяется совершенно беспорядочно, многократно пробегая за время τ все значения от нуля до 2π. Поэтому $\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \cos\psi\, d\tau$ стремится к нулю, и мы имеем

$$\bar{A}^2 = a_1^2 + a_2^2, \quad \text{т.е.} \quad \bar{I} = I_1 + I_2.$$

Итак, при сложении двух колебаний одного периода надо различать два случая.

1. Разность фаз колебаний сохраняется неизменной за время τ, достаточное для наблюдений. Средняя энергия результирующего колебания отличается от суммы средних энергий исходных колебаний и может быть больше или меньше нее в зависимости от разности фаз. В этом случае колебания называются *когерентными*. Сложение колебаний, при котором *не* имеет места суммирование интенсивностей, мы будем называть *интерференцией колебаний*.

2. Разность фаз колебаний беспорядочно меняется за время наблюдения. Средняя энергия результирующего колебания равна сумме средних энергий исходных колебаний. Колебания в этом случае называются *некогерентными*. При их сложении *всегда* наблюдается суммирование интенсивностей, т.е. интерференция *не* имеет места.

Как указывалось выше, строго гармонические колебания *одинаковой частоты* всегда вполне когерентны между собой, ибо, поскольку они длятся, не обрываясь, имеющаяся у них разность фаз сохраняется без изменения сколь угодно долгое время. Поэтому при сложении таких гармонических колебаний всегда проявляется интерференция.

Итак, результат сложения *двух* гармонических колебаний одинаковой частоты зависит от соотношения между их фазами. При сложении большого числа N колебаний одинаковой частоты с произвольными фазами результат будет, конечно, зависеть от закона распределения фаз. Предполагая для простоты, что все колебания имеют одинаковые амплитуды, равные a, найдем, что результирующая интенсивность может заключаться между N^2a^2 и нулем. Как показал Рэлей [1], при распределении фаз, которые подвергаются вполне случайным изменениям, *средняя* энергия суммы таких колебаний за время, охватывающее достаточно большое число изменений фаз, равна Na^2, т.е. в данном общем случае имеет место сложение интенсивностей. Этот

---

[1] Дж. В. Стрэтт (Рэлей). Волновая теория света.– М.: Гостехиздат, 1940, § 4. Изложение рассуждений Рэлея можно найти в книге: Г. С. Горелик. Колебания и волны.– М.: Физматгиз, 1959, гл. X, § 2.

вывод имеет самое непосредственное отношение к реальным источникам света. Результирующее колебание от отдельных испускающих центров (атомов), составляющих источник, создает освещенность, величина которой в данный момент и в данной точке зависит от соотношения фаз между колебаниями отдельных центров. Но наш глаз воспринимает лишь среднюю освещенность за некоторый достаточный для восприятия интервал времени и на некоторой достаточной по величине освещенной площадке. Это обстоятельство приводит к полному усреднению фазовых соотношений, в результате чего воспринимаемая освещенность окажется просто суммой освещенностей, создаваемых каждым светящимся центром нашего источника. Поэтому мы вправе сказать, что две одинаковые свечи дают освещенность вдвое бóльшую, чем одна.

§ 13. Интерференция волн

В соответствии с определением предыдущего параграфа мы говорим об *интерференции волн*, когда при их совместном действии не происходит суммирования интенсивностей. Условием интерференции волн одной и той же частоты является их когерентность, т.е. сохранение неизменной разности фаз за время, достаточное для наблюдения. В частности, *монохроматические волны*, т.е. волны, порождаемые гармоническими колебаниями, когерентны и могут интерферировать (если, конечно, они имеют одинаковый период). Способность когерентных волн к интерференции означает, что в любой точке, которой достигнут эти волны, имеют место когерентные колебания, которые будут интерферировать. Мы будем для простоты предполагать, что обе волны одинаково линейно поляризованы. Результат интерференции определяется разностью фаз интерферирующих волн в месте наблюдения, а эта последняя зависит от начальной разности фаз волн, а также от *разности расстояний*, отделяющих точку наблюдения от источников каждой из волн.

Пусть две когерентные волны исходят из источников S_1 и S_2 (рис. 4.1); колебания в них направлены перпендикулярно к плоскости

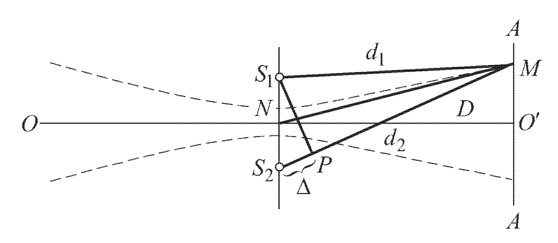


Рис. 4.1. К расчету разности фаз волн, идущих от двух когерентных источников

чертежа, и наблюдение производится в точке M. Допуская для простоты расчета, что в ней обе волны имеют одинаковые амплитуды, найдем, что колебания в M, вызываемые первой и второй волнами,

выразятся в виде

$$s_1 = a\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d_1}{\lambda}\right)\right],$$
$$s_2 = a\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d_2}{\lambda}\right) - \varphi\right],$$

где $d_1 = S_1M$ и $d_2 = S_2M$, λ — длина волны, а φ — начальная разность фаз.

Складываясь в точке M, колебания дадут

$$s = s_1 + s_2 = \\ = 2a\cos\left(\pi\frac{d_2 - d_1}{\lambda} + \frac{\varphi}{2}\right)\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d_2 + d_1}{2\lambda}\right) - \frac{\varphi}{2}\right]. \quad (13.1)$$

Таким образом, колебание в точке M имеет амплитуду, равную $2a\cos[\pi(d_2 - d_1)/\lambda + \varphi/2]$, и интенсивность, пропорциональную

$$4a^2\cos^2\left(\pi\frac{d_2 - d_1}{\lambda} + \frac{\varphi}{2}\right).$$

Для когерентных волн φ постоянна, и следовательно, различие интенсивности света в разных точках зависит только от различия разностей расстояний d_2 и d_1. Благодаря этой разности расстояний, или, как принято говорить, *разности хода* двух волн, колебания, вызванные этими волнами в точке их встречи, будут обладать *разностью фаз* даже в том случае, когда начальные фазы обеих волн были одинаковы. Разность фаз ψ, возникшая вследствие разности хода волн, равна

$$\psi = 2\pi\frac{d_2 - d_1}{\lambda}.$$

Выразим разность хода через длину волны $\Delta = d_2 - d_1 = m\lambda$, где m — любое число (целое или дробное). Соответствующая разность фаз $\psi = 2\pi m$. Если начальные фазы одинаковы ($\varphi = 0$), то интенсивность двух интерферирующих волн с одинаковыми амплитудами запишется в виде

$$I \backsim A^2 = 4a^2\cos^2\left(\pi\frac{d_2 - d_1}{\lambda}\right) = 4a^2\cos^2 m\pi. \quad (13.2)$$

Целым значениям m соответствуют различие по фазе на $2\pi m$ и интенсивность, пропорциональная $4a^2$. При m полуцелом фазы складывающихся колебаний противоположны и интенсивность равна нулю. В общем случае m — дробное число. При неравных амплитудах интенсивность выражается соотношением

$$I \backsim A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(2\pi m) = (a_1 - a_2)^2 + 4a_1a_2\cos^2\pi m. \quad (13.3)$$

При целом m имеем максимумы $A^2 = (a_1 + a_2)^2$, при полуцелом m — минимумы $A^2 = (a_1 - a_2)^2$.

Таким образом, геометрическое место точек пространства, характеризующихся одинаковыми амплитудами (и интенсивностями), удовлетворяет условию $(d_2 - d_1)/\lambda = \text{const}$, т.е. представляет собой поверхность гиперболоида вращения с осью S_1S_2, фокусами которого служат точки S_1 и S_2 (на рис. 4.1 сечение одного из таких гиперболоидов плоскостью чертежа изображено штриховыми линиями). В частности,

средняя плоскость, показанная на чертеже линией OO', соответствует плоскости максимальной интенсивности.

Описанное распределение интенсивностей представляет собой интерференционную картину, соответствующую интерференции двух когерентных волн с начальной разностью фаз, равной нулю. Если бы начальная разность фаз отличалась от нуля, то мы имели бы такую же картину, в которой, однако, темные и светлые полосы принимают некое промежуточное положение, зависящее от φ. Действительно, в этом общем случае условие, например, максимума интенсивности в интерференционной картине имеет вид

$$\frac{d_2 - d_1}{\lambda} + \frac{\varphi}{2\pi} = m.$$

Следовательно, отличие φ от нуля эквивалентно тому, что $(d_2 - d_1)/\lambda$ не равно целому числу, как было бы при $\varphi = 0$.

В случае некогерентных волн каждому значению φ будет соответствовать своя интерференционная картина, которая с течением времени будет сменяться другой. Если их смена происходит достаточно быстро, то мы не в состоянии наблюдать эти *мгновенные* интерференционные картины и воспринимаем некоторое среднее состояние, которое соответствует монотонному распределению интенсивности.

Как видно из рассмотренных примеров суперпозиции волн с *равными* и *неравными* амплитудами, соотношение между их амплитудами существенно сказывается на качестве интерференционной картины. В первом случае максимумы освещенности в интерференционной картине чередуются с областями, в которых освещенность падает до нуля, во втором случае интерференционная картина накладывается на равномерно освещенный фон. Его освещенность пропорциональна величине $(a_1 - a_2)^2$ (ср. (13.3)).

Возможность наблюдения чередующегося распределения светлых и темных полос в интерференционном поле существенно зависит от освещенности этого фона. Поэтому для оценки видимости, или контрастности, интерференционной картины в некоторой точке интерференционного поля Майкельсон ввел параметр видимости V, определяемый следующим образом:

$$V = \frac{E_{\max} - E_{\min}}{E_{\max} + E_{\min}},$$

где $E_{\max}$ и $E_{\min}$ — максимальная и минимальная освещенности интерференционных полос вблизи выбранной точки поля. Параметр V может изменяться в пределах от 1 до 0. Первое его значение соответствует наиболее контрастной интерференционной картине, второе — полному ее исчезновению.

Для того чтобы человеческий глаз мог уверенно различать чередование светлых и темных полос на интерференционной картине, значение V должно быть не менее 0,1 или $E_{\min} \approx 0{,}82 E_{\max}$.

В рассмотренном нами элементарном примере значение параметра V определяется только соотношением между амплитудами интерферирующих волн

$$V = \frac{2a_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2} = \frac{2a_2/a_1}{1 + (a_2/a_1)^2}. \tag{13.4}$$

Однако значение V может зависеть и от различия в состояниях поляризации интерферирующих волн, и от наличия некогерентного света в составе интерферирующих световых пучков и т.д. Вопрос о влиянии состояния поляризации интерферирующих волн на значения параметра видимости интерференционной картины обсуждается подробнее в § 18.

Часто встречаются случаи, когда осуществляется интерференция световых пучков, в состав которых входит некогерентный свет. В месте наложения таких световых пучков некогерентные части световых колебаний, по самому своему определению, создают равномерно освещенный фон, и это ведет к снижению видимости (контрастности) интерференционной картины.

Рассмотрим случай интерференции двух таких пучков одинаковой суммарной интенсивности, в состав которых входит доля когерентного света γ. Тогда интенсивность каждого светового пучка можно записать в виде $I_1 = \gamma I_1 + (1-\gamma)I_1$. Здесь первое слагаемое в правой части выражает интенсивность когерентного света, входящего в состав этих пучков, второе — интенсивность некогерентного света. Переменную составляющую освещенности интерференционной картины создает только когерентная часть колебаний, и поэтому вместо (13.3) получим

$$I \backsim 2I_1[1+\gamma\cos(2\pi m)] = 2I_1[1-\gamma+2\gamma\cos^2\pi m]. \qquad (13.5)$$

В соответствии со сказанным ранее, некогерентная часть света $(1-\gamma)$ создает равномерно освещенный фон, аналогично тому, как было в случае полностью когерентных пучков при разных их амплитудах (ср. (13.3)). Видимость интерференционной картины, согласно (13.5), принимает значение

$$V = \frac{E_{\max}-E_{\min}}{E_{\max}+E_{\min}} = \gamma. \qquad (13.6)$$

Таким образом, параметр видимости интерференционной картины оказывается непосредственно равным доле когерентного света, присутствующего в интерферирующих световых пучках. Следовательно, измерение видимости картины позволяет в таких случаях определить долю интенсивности когерентных составляющих этих световых пучков. В более общем виде вопрос о частично когерентном свете специально рассматривается в § 22.

§ 14. Осуществление когерентных волн в оптике

Опыт показывает, что когда два независимых источника света, например две свечи, или даже два различных участка одного и того же светящегося тела посылают световые волны в одну область пространства, то мы не наблюдаем интерференции и констатируем сложение интенсивностей. После изложенного в предыдущих параграфах мы не можем, конечно, считать результаты такого опыта доказательством несостоятельности волновых представлений о свете. Отсутствие устойчивой (наблюдаемой) интерференционной картины может обозначать только, что наши источники не посылают когерентных волн.

Это означает, следовательно, что посылаемые источниками волны — немонохроматические (см. § 12). То обстоятельство, что даже с наилучшими в смысле монохроматичности источниками (свечение разреженных газов) мы не можем получить интерференции от независимых источников, есть доказательство того, что ни один источник не излучает строго монохроматического света. Сказанное относится ко всем нелазерным источникам света.

Однако высокая монохроматичность лазерного излучения допускает наблюдение интерференции световых пучков, излучаемых *двумя*

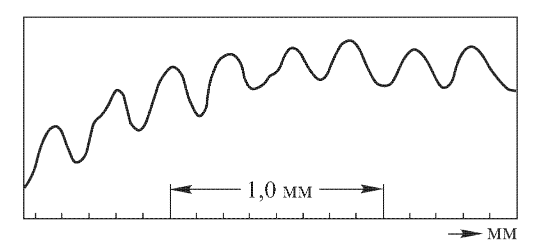


Рис. 4.2. Интерференционная картина, полученная с двумя световыми пучками от двух разных лазеров

разными лазерами. На рис. 4.2 приведена микрофотограмма интерференционной картины, созданной лазерными пучками от двух разных лазеров; отчетливо видно периодическое распределение максимумов и минимумов интенсивности света.

Нетрудно понять физическую причину немонохроматичности реального нелазерного излучения, а следовательно, и некогерентности волн, испускаемых двумя независимыми источниками света. Действительно, испускание света происходит вследствие атомных процессов, и в двух самостоятельных источниках света мы будем иметь дело с излучением атомов, не связанных друг с другом. В каждом из таких атомов процесс излучения длится очень короткое время, обрываясь вследствие потери энергии в результате излучения или помех и взаимодействий с окружающими атомами. Даже в наиболее благоприятных случаях, когда мешающее действие окружающих атомов сведено к минимуму (свечение сильно разреженных газов), длительность «правильного» излучения не превышает стомиллионных долей секунды. После прекращения свечения атом может вновь начать испускать световые волны, но, конечно, уже с новой начальной фазой. Поэтому разность фаз между излучениями двух таких независимых атомов будет изменяться при начале всякого нового акта испускания, т.е. через чрезвычайно короткие промежутки времени: такие источники излучают некогерентные волны, и мгновенные интерференционные картины, ими даваемые, сменяются настолько быстро и беспорядочно, что мы можем наблюдать только среднюю картину, т.е. равномерное распределение освещенности.

Итак, для получения двух когерентных волн излучение *различных независимых* атомов непригодно. Френель (1816 г.) показал, однако,

что можно достигнуть цели, использовав излучение лишь одного атома (или тесно расположенной группы)[1] для получения *двух систем* волн, которые, конечно, вследствие общности происхождения будут когерентными. Для этого необходимо испускаемое излучение расчленить на два потока (путем отражения или преломления) и заставить их встретиться после того, как они пройдут различные пути d_1 и d_2. Таким путем мы заставим встретиться волны, вышедшие из одного и того же источника (атома), но в разное время и притом с таким малым запозданием одной относительно другой, что когерентность будет иметь место (обе группы волн принадлежат к одному акту испускания атома).

Френель практически осуществил этот прием, заставив свет от источника отражаться от двух зеркал, расположенных под углом, близким к 180° (бизеркала Френеля). Путь лучей показан на рис. 4.3. Прямые лучи от S не доходят до экрана AA, ибо их задерживает ширма KK. От каждого атома источника S к экрану AA приходят волны, идущие по двум путям разной длины и поэтому запаздывающие одна относительно другой. Волны, идущие от S и отражающиеся зеркалами I и II, представляют две системы когерентных волн, как бы исходящих из источников S_1 и S_2, являющихся мнимыми изображениями S в зеркалах I и II. В различные точки экрана AA эти волны приходят с некоторой разностью фаз, определяемой различием в длине пути от S_1 и S_2 до соответствующей точки экрана. Поэтому освещенность экрана в разных точках различна, как это условно показано на рис. 4.3.

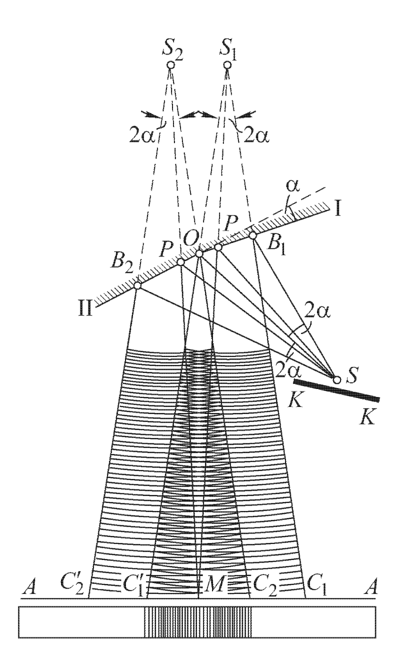


Рис. 4.3. Бизеркала Френеля

§ 15. Основные характеристики интерференционных схем

Не только в описанном опыте, но и во многих других интерференционных схемах дело сводится к получению двух источников когерентных волн с помощью приспособлений, дающих два изображения

[1]) Если два светящихся атома находятся очень близко (на расстоянии, малом по сравнению с длиной волны) друг от друга, то они не являются независимыми: излучение одного может воздействовать на другой, и их излучение в известной степени может оказаться когерентным, но в таком случае атомы практически совпадают по своему положению.

единого излучающего центра. Мы рассмотрим подробнее одну схему, на которой очень отчетливо выступают все наиболее существенные детали.

Эта схема, известная под названием *билинзы Бийе*, осуществляется с помощью линзы, разрезанной по диаметру; обе половины слегка разводятся, благодаря чему получаются два действительных изображения S_1 и S_2 светящейся точки S. Прорезь между полулинзами закрывается экраном K [1]) (рис. 4.4).

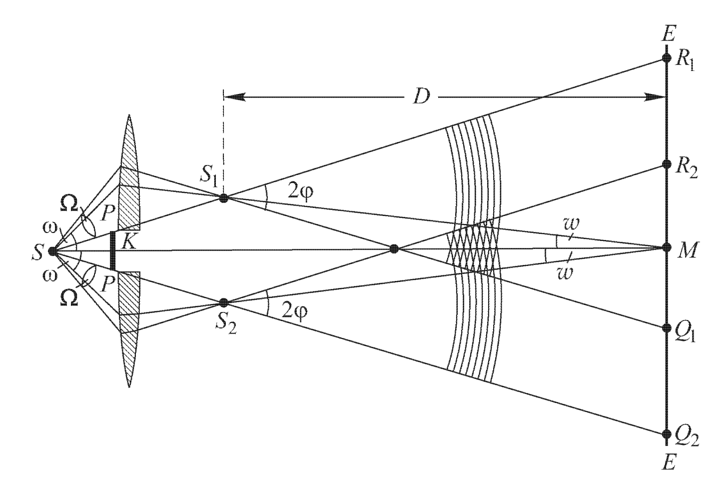


Рис. 4.4. Билинза Бийе: $\angle R_1S_1Q_1 = \angle R_2S_2Q_2 = 2\varphi$ — апертура перекрывающихся пучков для бесконечно удаленного экрана, $\angle PSP = 2\omega$ — апертура интерференции для центральной точки M экрана EE

Интерференция наблюдается в области, где перекрываются оба световых потока, идущих от S_1 и S_2. Точка M интерференционного поля имеет освещенность, зависящую от разности хода двух интерферирующих лучей. На этой схеме ясно видно, что интерферирующие световые потоки задаются размерами телесных углов Ω, величина которых зависит от угла $2\varphi = \angle Q_1S_1R_1 = \angle Q_2S_2R_2$ между лучами, определяющими перекрывающиеся части пучков. Этот угол 2φ мы назовем *апертурой перекрывающихся пучков*. Максимальное значение угла 2φ соответствует условию $S_1Q_1 \parallel S_2Q_2$ и $S_1R_1 \parallel S_2R_2$; при этом экран расположен в бесконечности. Обычно угол 2φ несколько меньше, ибо экран располагается на конечном расстоянии D, хотя и большом по сравнению с S_1S_2. Величина апертуры 2φ определяет собой угловые размеры поля интерференции, *средняя* освещенность которого зависит от яркости и угловых размеров изображений ис-

[1]) Билинзу Бийе можно использовать и так, что S_1 и S_2 окажутся мнимыми изображениями S. Для того чтобы пучки от мнимых изображений перекрывались, необходимо из середины линзы вырезать кусок и обе оставшиеся части сблизить друг с другом.

точника S_1, S_2. Полный поток, проходящий через поле интерференции, пропорционален площади этого поля и, следовательно, углу 2φ. В интерференционном поле благодаря интерференции происходит перераспределение освещенности — образуются интерференционные полосы.

Угол 2ω между соответствующими лучами, идущими от S через каждую из двух ветвей интерферометра к M, представляет собой угол раскрытия лучей, определяющий интерференционный эффект в точке M. Практически то же значение имеет этот угол и для любой другой точки интерференционного поля. Этот угол мы будем называть *апертурой интерференции.* Ему соответствует в поле интерференции *угол схождения лучей* $2w$, величина которого связана с углом 2ω правилами построения изображений. При неизменном расстоянии до экрана $2w$ тем больше, чем больше 2ω.

Величина апертуры интерференции 2ω тесно связана с допустимыми размерами источника. Теория и опыт (см. § 17) показывают, что с увеличением апертуры интерференции уменьшаются допустимые размеры ширины источника, при которых еще имеет место отчетливая интерференционная картина. Поскольку освещенность пропорциональна ширине источника, увеличение апертуры интерференции приводит к уменьшению освещенности интерференционной картины. Вместе с тем, величина интерферирующих световых потоков, связанная с размерами интерференционного поля, определяется, согласно § 7, выражением $\Phi = B\sigma\Omega$ (принимаем, что источник излучает по направлению, нормальному к своей поверхности). При заданной яркости источника B величина потока зависит от произведения $\sigma\Omega$, причем σ согласно сказанному тем больше, чем меньше апертура интерференции, а Ω тем больше, чем больше апертура перекрывающихся пучков. При обсуждении вопроса, может ли данная интерференционная схема обеспечить большие размеры и хорошую освещенность интерференционной картины, надо учитывать, возможно ли осуществить одновременно большую апертуру перекрывающихся пучков (2φ) и малую апертуру интерференции (2ω).

Основные черты интерферометра Бийе повторяются в любой интерференционной схеме, которую в общем виде можно изобразить рис. 4.5.

Точки S_1 и S_2 — изображения излучающего центра S, получаемые с помощью оптической системы интерферометра, не показанной на чертеже [1]). Эти точки могут быть как действительными, так и мнимыми изображениями точки S. В частности, S может совпадать с одной из этих точек (схема Ллойда, см. ниже рис. 4.8). Апертура интерференции 2ω и связанный с нею угол $2w$ определяют допустимый размер источника света, ширина которого обозначена через $2b$ (см. рис. 4.5).

[1]) Метод рассмотрения интерференционных схем с помощью правил построения изображений очень полезен при расчете сложных интерферометров. Последовательное развитие его принадлежит проф. А.Н. Захарьевскому и изложено им в книге: А. Н. Захарьевский. Интерферометры.– М.: Оборонгиз, 1952.

Для расчета интерференционной картины в любом интерферометре достаточно знать взаимное расположение S_1 и S_2 и их положение относительно экрана EE. Если экран EE расположен перпендикулярно к линии S_1S_2, то, как явствует из § 13, интерференционные полосы

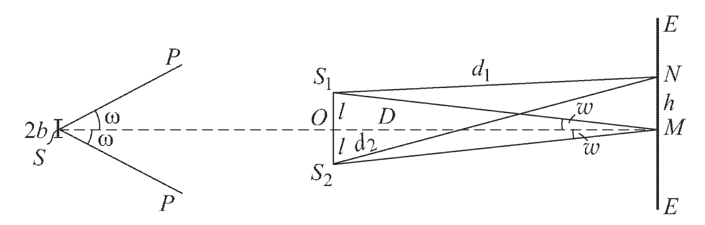


Рис. 4.5. Общая интерференционная схема: $\angle PSP = 2\omega$ — апертура интерференции; $\angle S_1MS_2 = 2w$ — угол схождения лучей SP; $S_1S_2 = 2l$; $MN = h$; $OM = D$. Для точки N разность хода $\Delta = d_2 - d_1 = 2h \cdot 2l/(d_1 + d_2)$.

будут представлять собой концентрические окружности (сечения гиперболоидов вращения с фокусами S_1 и S_2 плоскостью, перпендикулярной к оси). При расположении экрана EE параллельно линии S_1S_2 полосы имеют вид гипербол, которые в случае точечного источника (сферическая волна) мало отличаются благодаря условию $OM \gg S_1S_2$ от параллельных прямых. Обычно в качестве источника применяют ярко освещенную узкую щель, параллельную плоскости симметрии системы (разрезу билинзы Бийе, ребру бизеркал Френеля и т.д.). При таком линейном источнике (цилиндрические волны) интерференционные картины от разных его точек будут сдвинуты друг относительно друга перпендикулярно плоскости чертежа (вдоль источника), давая на экране EE интерференционные полосы, параллельные щели, так что для решения задачи о распределении максимумов и минимумов можно ограничиться рассмотрением плоскости чертежа. Рассчитаем этот последний случай (см. рис. 4.5).

Пусть расстояние $S_1S_2 = 2l$, расстояние от S_1S_2 до экрана $OM = D$, а расстояния от S_1 и S_2 до какой-либо точки экрана N — соответственно d_1 и d_2. Если S_1 и S_2 синфазны ($\varphi = 0$), то центральный максимум лежит на средней линии в точке M ($S_1M - S_2M = 0$).

Из рис. 4.5 нетрудно определить разность хода $\Delta = d_2 - d_1$ до любой точки экрана N, лежащей на расстоянии h от M:

$$d_2^2 = D^2 + (h + l)^2, \quad d_1^2 = D^2 + (h - l)^2,$$

$$d_2^2 - d_1^2 = (d_2 + d_1)(d_2 - d_1) = 2h \cdot 2l$$

или

$$\Delta \equiv d_2 - d_1 = \frac{2h \cdot 2l}{d_1 + d_2}\,.$$

Разность хода Δ составляет несколько длин волн и всегда значительно меньше d_1 и d_2. Поэтому можно положить $d_1 + d_2 \approx 2d$, где d — расстояние ON. С той же точностью $d = d_1 + \Delta/2 = d_2 - \Delta/2$. Итак,

$$\Delta = h\,\frac{2l}{d}\,. \tag{15.1}$$

В большинстве случаев расстояние до экрана D гораздо больше, чем $2l$; поэтому $d \approx D$, т.е.

$$\Delta = h\,\frac{2l}{D}\,. \tag{15.2}$$

В дальнейших рассуждениях предположим, что свет, которым мы пользуемся, монохроматичен. Теперь, когда главное затруднение, связанное с немонохроматичностью волн (отсутствие когерентности), обойдено благодаря приему Френеля, мы не делаем принципиальной ошибки, считая наши волны монохроматическими, и лишь упрощаем расчеты. В дальнейшем будет показано, какие изменения вносит в действительно наблюдаемую картину то обстоятельство, что волны не строго монохроматичны.

Пусть источник посылает волны длины λ. Разность хода, выраженная в длинах волн, есть $\Delta = h \cdot 2l/D = m\lambda$, где m — любое число (целое или дробное), определяющее *порядок интерференции.* Согласно расчетам, приведенным в § 13, изменение освещенности в зависимости от h (или $m = 2hl/\lambda D$) описывается формулой (при равных амплитудах a интерферирующих волн)

$$A^2 = 4a^2\cos^2\left(\pi\,\frac{2l}{\lambda D}\;h\right) = 4a^2\cos^2 \pi m. \tag{15.3}$$

Эта формула дает максимумы при целых значениях m $(0,\,1,\,2,\,\ldots)$ и минимумы — при полуцелых m $(1/2, 3/2, \ldots)$.

Рисунок 4.6 передает ход освещенности, выражаемый формулой (15.3). Расстояние между соседними максимумами или минимумами, соответствующее изменению m на единицу, т.е. равное

$$\mathscr{B} = \frac{D}{2l}\;\lambda, \tag{15.4}$$

носит название *ширины полосы.* Эта формула показывает, что полосы будут тем шире, чем меньше расстояние $2l$ между источниками при заданных D и λ. Ширину полосы нетрудно выразить через угол схождения лучей $2w$, связанный с апертурой интерференции. Так как обычно угол $2w$ мал, то из рис. 4.5 видно, что $2l = 2wD$, т.е.

$$\mathscr{B} = \frac{\lambda}{2w}\,. \tag{15.5}$$

Ширина полосы зависит от расстояния D до экрана, увеличиваясь безгранично по мере удаления экрана. Поэтому рационально ввести понятие об угловой ширине полос интерференции, понимая под ней угловое расстояние между соседними максимумами, наблюдаемое с места расположения источников. Угловая ширина полосы

$$\beta = \frac{\mathscr{B}}{D} = \frac{\lambda}{2l}\,. \tag{15.6}$$

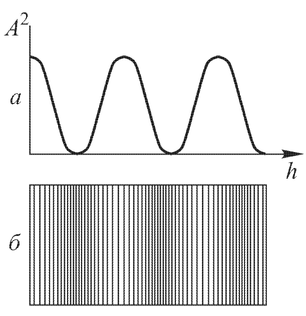


Рис. 4.6. Распределение освещенности экрана при интерференции двух лучей: *а* — график освещенности в функции координаты h; *б* — схематическое изображение освещенности экрана

Она тем больше (интерференционная картина крупнее), чем меньше расстояние между источниками $2l$.

Осуществив интерференционный опыт, мы можем, измерив расстояния $\mathscr{B}$, D и l, найти длину световой волны λ. Такого рода измерения явились одним из первых определений длины световых волн, показавших, что крайние красные лучи приблизительно соответствуют длине волны $\lambda_{\text{к}} = 8000$ Å $= 800$ нм, а крайние фиолетовые — $\lambda_{\text{ф}} = 4000$ Å $= 400$ нм.

Как ясно из описания, картина будет представлять чередование резких черных полос, разделенных более светлыми промежутками, только в том случае, когда мы имеем дело с монохроматическим светом (λ имеет вполне определенное значение). Практически для интерференционного опыта достаточно покрыть источник цветным стеклом (светофильтром), выделяющим совокупность волн, незначительно отличающихся друг от друга по своей длине. Если же источник посылает белый свет, то интерференционная картина представит собой чередование цветных полос, причем полной темноты не будет нигде, ибо места минимумов для одной длины волны совпадают с местами максимумов для другой. Измеряя расстояния $\mathscr{B}$ между соседними максимумами для данного цвета, можно определить (приблизительно) длину волны, соответствующую этому цвету.

В других, более тонких, интерференционных опытах (см. ниже) монохроматизация света при помощи светофильтров недостаточна, и надо прибегать к иным способам получения монохроматического излучения.

§ 16. Различные интерференционные схемы

Существенные черты общей интерференционной схемы (см. рис. 4.5) имеются во всех предложенных расположениях. Рассмотрим некоторые из них.

а. Бизеркала Френеля (см. рис. 4.3). Источниками когерентных волн S_1 и S_2 служат два мнимых изображения S. Расстояние $S_1S_2 = 2l$ тем меньше и, следовательно, интерференционная картина тем крупнее, чем меньше угол между зеркалами α (см. упражнение 17). Максимальный телесный угол, в пределах которого могут еще перекрываться интерферирующие пучки, определяется углом $2\varphi = \angle C_1S_1C_1' = \angle C_2S_2C_2'$, находимым из условий $S_1B_1C_1 \parallel S_2OC_2$ и $S_1OC_1' \parallel S_2B_2C_2'$ (см. рис. 4.3). При этом экран должен быть расположен достаточно далеко (теоретически — бесконечно далеко).

На основании законов отражения угол $2\varphi = 2\alpha$, где α — угол между зеркалами. Таким образом, апертура перекрывающихся пучков не может быть больше, чем 2α. Для экрана, расположенного на конечном расстоянии, $2\varphi < 2\alpha$. Значение 2α имеет и апертура интерференции $2\omega = \angle PSP$, т.е. угол между парой интерферирующих лучей, сходящихся после отражения в какой-либо точке весьма удаленного экрана. На рис. 4.3 апертура интерференции показана для центральной точки поля M экрана, расположенного на конечном расстоянии от S_1S_2.

Таким образом, в бизеркалах Френеля и апертура перекрывающихся пучков (определяющая телесный угол интерферирующих по-

токов), и апертура интерференции имеют одинаковое значение и зависят от величины угла между зеркалами α. На основании сказанного в § 15 отсюда следует, что бизеркала Френеля не могут обеспечить большие размеры интерференционной картины, что делает эту установку малопригодной для демонстрации. К тому же для получения достаточно широких полос интерференции надо работать при малых значениях угла между зеркалами, следя в то же время за тем, чтобы зеркала в месте соединения не образовывали ступеньку, которая становится источником дополнительной разности хода.

б. Бипризма Френеля (рис. 4.7). Максимальная апертура перекрывающихся пучков 2φ соответствует бесконечно удаленному экрану и определяется условием $S_1B_1R_1 \parallel S_2OR_2$ и $S_1OQ_1 \parallel S_2B_2Q_2$.

При экране, расположенном на конечном расстоянии, эта апертура несколько меньше. Апертура интерференции $2\omega = \angle PSP$ несколько меньше апертуры перекрывающихся пучков (2ω показано для центральной точки поля M для экрана, расположенного на конечном расстоянии от S_1S_2; для других точек поля 2ω практически имеет то же значение). Так как преломляющие углы бипризмы делаются очень

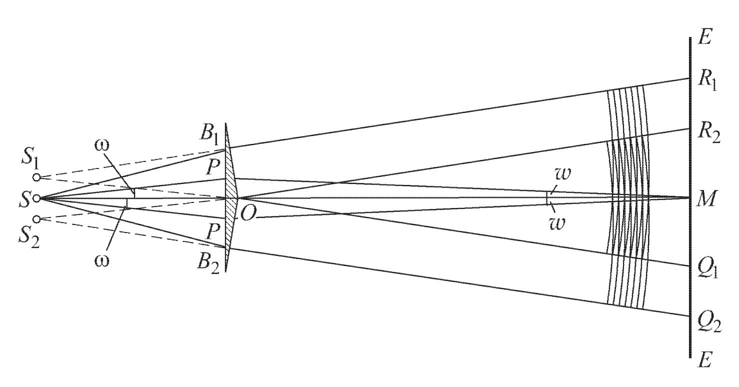


Рис. 4.7. Бипризма Френеля: $\angle PSP = 2\omega$ — апертура интерференции для центральной точки поля M экрана EE; $\angle R_1S_1Q_1 = \angle R_2S_2Q_2 = 2\varphi$ — апертура перекрывающихся пучков для бесконечно удаленного экрана

малыми, для того чтобы обеспечить малое расстояние S_1S_2 и, следовательно, широкие полосы интерференции, то практически апертура интерференции не отличается от апертуры перекрывающихся пучков. Поэтому, так же, как и при бизеркалах, расположение с бипризмой дает малое поле интерференции.

в. Зеркало Ллойда (рис. 4.8). Прямой пучок от источника интерферирует с пучком, отраженным от зеркала под углом, близким к прямому. Таким образом, источниками когерентных волн являются источник S и его мнимое изображение в зеркале S_1.

В отличие от схем Френеля в схеме Ллойда апертура интерференции 2ω сильно зависит от того, для какого места на экране исследуется интерференция. Она тем меньше, чем ближе это место к центру поля

(к плоскости зеркала) (см. рис. 4.8). Поэтому для точек экрана, близких к плоскости зеркала, можно пользоваться сравнительно широкими источниками, и установка получается достаточно светосильной [1]); однако при этом на некотором расстоянии от плоскости зеркала полосы размываются.

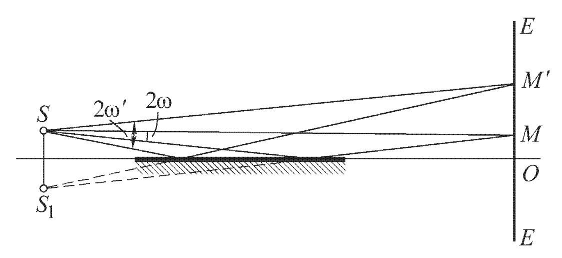


Рис. 4.8. Зеркало Ллойда: апертура интерференции для точки M равна 2ω, для точки M' — $2\omega'$. По мере удаления от плоскости зеркала апертура интерференции растет

г. Светосильное расположение (Р. Поль) (рис. 4.9). Свет от источника S отражается от двух поверхностей тонкой плоскопараллельной пластинки (тонкий листок слюды), толщина которой l не превышает 0,03–0,05 мм. Таким образом, источниками когерентных волн являются S_1 и S_2 — мнимые изображения S. Расстояние $S_1S_2 = 2l$ (если пренебречь преломлением в слюде). Апертура интерференции $2\omega = \angle PSQ$ зависит от точки интерференционного поля, т.е. от угла θ. Из чертежа (см. рис. 4.9) найдем

$$2\omega = \angle PSQ = \frac{l}{A+K}\ \sin 2\theta,$$

где $A = SO$ — расстояние от источника до слюды, а $K = MN$ — расстояние от слюды до экрана.

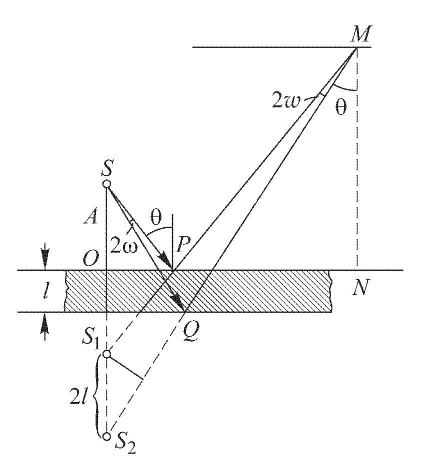


Рис. 4.9. Светосильное расположение: $\angle PSQ = 2\omega$ — апертура интерференции для точки M удаленного экрана. Так как l очень мало, то Q расположено почти под P

Так как l ($\approx$ 0,05 мм) гораздо меньше $A + K$ ($\approx$ 500 см), то даже при $\theta = 45°$ апертура интерференции будет очень мала. В соответствии с этим размер источника можно выбрать большим (например, ртутная лампа), дающим, следовательно, большой световой поток. Поэтому данное расположе-

[1]) См. также § 17.

ние отличается большой светосилой и может быть легко продемонстрировано. Угловой размер интерференционного поля очень велик. Располагая листком слюды площадью в несколько квадратных сантиметров, можно получить от небольшой ртутной лампы яркую интерференционную картину, покрывающую потолок и стены аудитории.

Так как расстояние $A+K$ весьма значительно (несколько метров), то на экране получаются очень широкие полосы интерференции. Действительно (см. (15.5)),

$$\mathscr{B} = \frac{\lambda}{2w} = \frac{\lambda(A+K)}{l\sin 2\theta},$$

ибо угол схождения

$$2w = \frac{l\sin 2\theta}{A+K},$$

что легко увидеть из чертежа. Полагая $A + K = 5$ м, для $\theta = 45°$ и $\lambda = 5\cdot 10^{-5}$ см найдем $\mathscr{B}$, равное 5 см. Размер источника (≈ 10 мм) гораздо больше расстояния S_1S_2 ($\approx 0{,}1$ мм), так что изображения источника почти полностью перекрываются, но это, конечно, не мешает делу.

д. Расположение Юнга. Принципиально иным образом осуществляется образование налагающихся когерентных волн в методе Юнга (рис. 4.10).

Источником света служит ярко освещенная щель S, от которой световая волна падает на две узкие щели S_1 и S_2, освещаемые, таким образом, различными участками одного и того же волнового фронта.

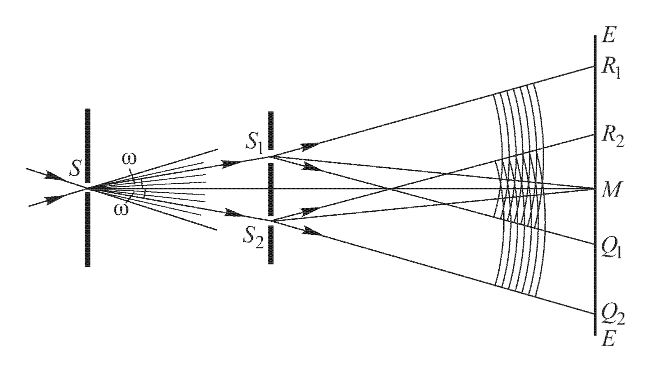


Рис. 4.10. Расположение Юнга: $\angle S_1SS_2 = 2\omega$ — апертура интерференции для любой точки поля; $\angle R_1S_1Q_1 = \angle R_2S_2Q_2 = 2\varphi$ — апертура перекрывающихся пучков для бесконечно удаленного экрана

Световые пучки, проходящие через *малые* отверстия S_1 и S_2, расширяются в результате дифракции и частично перекрываются, создавая интерференцию, как и в других интерференционных схемах. При расположении Юнга апертура интерференции $2\omega = \angle S_1SS_2$ определяется отношением расстояния между щелями S_1 и S_2 к расстоянию от S до S_1S_2.

Юнг первый наблюдал осуществленные таким образом явления интерференции (1802 г.) [1] и первый в ясной форме установил принцип сложения амплитуд, объяснив явления интерференции. Историческое значение этого опыта очень велико. Он, однако, несколько труднее для толкования, ибо в этом случае встреча двух участков волны делается возможной не благодаря явлениям отражения (бизеркало) или преломления (бипризма), а благодаря явлению дифракции. Этот опыт будет подробнее рассмотрен в разделе, посвященном дифракции.

§ 17. Значение размеров источника света. Пространственная когерентность

Мы уже неоднократно отмечали, что во всех практических интерференционных схемах большое значение имеют размеры источника света. Если размеры источника значительно меньше длины световой волны, то, конечно, всегда получается резкая интерференционная картина, ибо разность хода от *любой* точки источника до какой-нибудь точки M интерференционного поля всегда будет одна и та же. Однако на практике мы обычно имеем источники, размеры которых значительно превосходят длину световой волны. Согласно изложенному выше, интерферируют между собой волны, исходящие из соответствующих точек, являющихся изображениями одной и той же точки источника. Поэтому в случае источника, размеры которого сравнимы с расстоянием между соответствующими точками, мы получаем, по существу, наложение многих интерференционных картин, создаваемых многими парами когерентных источников. Эти картины сдвинуты одна относительно другой так, что результирующая картина окажется более или менее размытой и при значительной ширине источников практически перестанет наблюдаться.

Влияние размеров источника на резкость интерференционной картины можно выразить количественно, исходя из общей интерференционной схемы, показанной на рис. 4.11, и используя соотношения между шириной источника $2b$ и апертурой интерференции 2ω.

Пусть AB — протяженный источник ширины $2b$. Интерференционные максимумы, получаемые от точки S (середины источника) на удаленном экране, расположатся в точках S_0, S_1, S_1' и т.д., образуя полосы шириной $\mathscr{B}$. Интерференционные максимумы от края источника (точка A, например) расположатся в точках A_0, A_1, A_1' и т.д.,

[1] Сходный по расположению опыт был выполнен еще в 1665 г. Гримальди, который, однако, работал без щели S, пользуясь в качестве источника света непосредственно Солнцем. Расчет показывает, что в этих условиях при тех расстояниях между щелями, которыми пользовался Гримальди, явление интерференции не могло наблюдаться ввиду значительного углового размера источника света — Солнца (около 0,5°). Полосы света и тени, наблюдавшиеся Гримальди, объясняются, по-видимому, явлениями контраста (см. упражнение 93).

смещенных на величину S_0A_0, зависящую от размеров источника и параметров схемы. Смещение это равно $S_0A_0 = SA\frac{PM}{SP}$. Вводя те же обозначения, что и раньше, а именно, $SA = b$, $PQ = 2l$, $PM = d$, найдем $S_0A_0 = b\,\frac{d}{l/\sin\omega} = b\,\frac{d}{l}\,\sin\omega$. Так как расстояние $2l$ может быть довольно значительным, то при вычислении ширины полосы $\mathscr{B}$

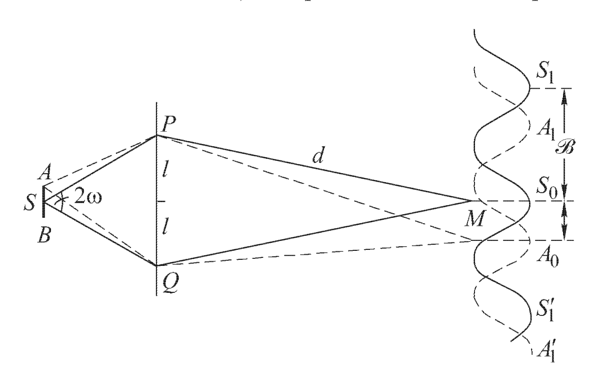


Рис. 4.11. К выводу условия $2b\sin\omega = \lambda/4$

надо использовать формулу (15.1), а не (15.2). Хотя ширина полосы несколько меняется по мере удаления от центра картины, ибо несколько меняется d, однако это изменение невелико, и мы можем не принимать его в расчет. Итак, ширина полосы $\mathscr{B} = \frac{d}{2l}\,\lambda$.

Если смещение одной системы полос (от S) относительно другой (от A) достигает половины ширины полосы ($S_0A_0 = \mathscr{B}/2$), то интерференционная картина от одной половины источника полностью смазывает картину от второй половины, и интерференция не наблюдается. При большем значении смещения ($S_0A_0 > \mathscr{B}/2$) максимумы вновь выявляются. При $S_0A_0 = \mathscr{B}$ (совмещение максимумов) они становятся вновь отчетливыми, но при этом общий светлый фон усиливается, картина становится менее контрастной и при дальнейшем увеличении ширины источника постепенно исчезает.

Пользуясь формулой (15.3), можно количественно рассчитать изменение контрастности интерференционной картины по мере увеличения ширины источника (см. упражнение 43).

Интерференционная картина остается достаточно резкой, если S_0A_0 не превышает примерно 1/4 ширины полосы ($S_0A_0 \leqslant \mathscr{B}/4$) (рис. 4.12 *а*, *б*). Итак, условие хорошего наблюдения интерференции от протяженного источника можно записать в виде $b\,\frac{d}{l}\,\sin\omega \leqslant \frac{1}{4}\,\frac{d}{2l}\,\lambda$ или

$$2b\sin\omega \leqslant \frac{\lambda}{4}\,. \tag{17.1}$$

Это условие, несмотря на его приближенный характер, можно положить в основу расчетов допустимых размеров источника.

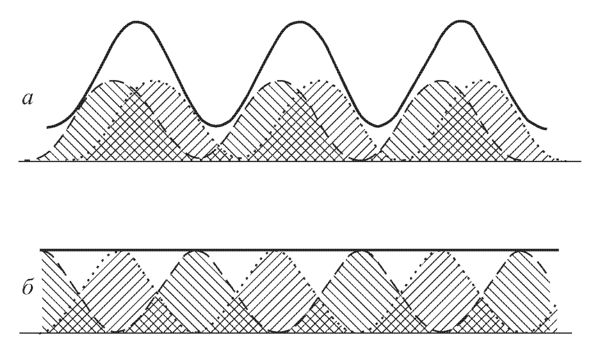


Рис. 4.12. Наложение интерференционных картин, сдвинутых друг относительно друга: штриховыми и точечными линиями показаны кривые, соответствующие первой и второй интерференционным картинам; сплошная кривая соотвествует результирующей картине: *а* — сдвиг на 1/4 полосы, отчетливые максимумы и минимумы еще наблюдаются; *б* — сдвиг на 1/2 полосы, освещенность равномерная

Ввиду важности соотношения (17.1) покажем возможность его приближенного обоснования еще одним, несколько более общим способом. Будем наблюдать интерференцию от протяженного ($2b$) источника (рис. 4.13) с помощью какого-нибудь интерферометра, не показанного на чертеже. Лучи I и II, проходящие через два плеча нашего интерферометра, определяют апертуру интерференции, равную 2ω. Пусть, например, лучи, исходящие из точки S (середина источника), приводят в какой-либо точке экрана к образованию максимума. Лучи, идущие из точки A на краю источника к той же точке экрана, будут иметь добавочную разность хода, равную $(AM + SN)$, ибо длина пути для луча AII на AM *больше* длины пути для луча SII, а для луча AI на SN меньше, чем для SI. $AM = SN = b \sin\omega$. Таким образом, добавочная разность хода от точки A до рассматриваемой точки экрана составляет $2b \sin\omega$. Если $2b \sin\omega \leqslant \lambda/4$, то еще не наблюдается значительной порчи интерференционной картины. Сказанное относительно A и S справедливо и для любой пары точек левой и правой половин источника, расстояние между которыми равно b.

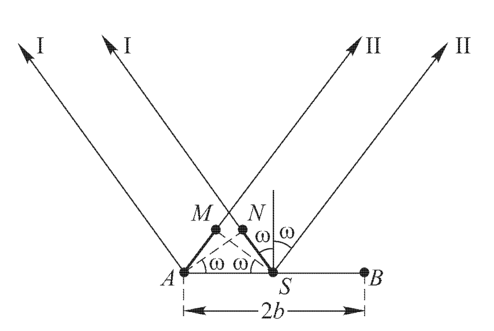


Рис. 4.13. К выводу условия $2b \sin\omega = \lambda/4$

Таким образом, условие $2b \sin \omega \leqslant \lambda/4$ является условием, связывающим апертуру интерференции и размеры протяженного источника, при которых еще возможно наблюдение отчетливой интерференционной картины. В частности, если апертура интерференции достигает 180° ($\omega = 90°$), т.е. лучи, которые мы заставляем интерферировать, идут приблизительно в противоположных направлениях, то размер источника должен быть меньше 1/4 длины волны.

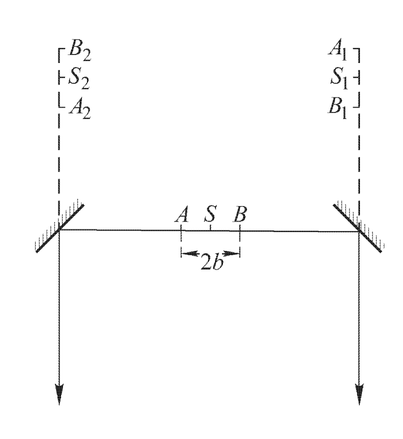


Рис. 4.14. Интерференция под углом, близким к 180°, возможна, если ширина источника $2b \leqslant \lambda/4$

Этот случай, изображенный на рис. 4.14, легко рассчитать непосредственно. Лучи, исходящие из середины источника (точка S) и от какого-либо его края (точка A, например), придут в некоторую точку удаленного экрана с разностью хода $A_1S_1 + A_2S_2 = 2b$. Если $2b = \lambda/2$, то максимумы от точки S совпадут с минимумами от точки A; то же будет справедливо и для любой пары соответственных точек левой и правой половин источника AB. Таким образом, при $2b = \lambda/2$ интерференционная картина от одной половины источника смажется картиной от второй его половины. Для сохранения хорошей видимости $2b$ не должно превышать $\lambda/4$, т.е. $2b = \lambda/4$ в согласии с условием (17.1) при $\omega = 90°$.

Возможность формирования интерференционных картин с высокой степенью видимости различными источниками света можно рассмотреть и в иной постановке, чем это было сделано выше.

Для того чтобы придать новой постановке вопроса сразу конкретный характер, обратимся к схеме интерференционного опыта Юнга (см. рис. 4.10). Предположим, что опыт осуществляется без первого экрана со щелью S, а источник света непосредственно освещает экран с двумя щелями S_1 и S_2.

Если применяется точечный источник света, расположенный далеко от экрана со щелями, то, очевидно, видимость интерференционной картины не уменьшится из-за отсутствия входной щели интерференционной установки. В самом деле, в данном случае обеих щелей S_1 и S_2 будет достигать плоский волновой фронт световых волн, излучаемых точечным источником света. Это обеспечит и равенство амплитуд колебаний на участках волнового фронта, достигающих щелей S_1 и S_2, и *когерентность* колебаний на этих участках волнового фронта. Не понадобится также помещать точечный источник света обязательно на нормали к поверхности экрана со щелями, восставленной на середине отрезка S_1S_2. Если даже точечный источник света будет расположен несимметрично относительно щелей, то это не нарушит когерентности их освещения. Световые колебания вблизи щелей S_1 и S_2

будут происходить *не* в одинаковой фазе, *но с постоянной разностью фаз*, что отнюдь не противоречит условию когерентности освещения обеих щелей.

Единственным результатом несимметричного расположения точечного источника света по отношению к щелям S_1 и S_2 будет соответствующий сдвиг интерференционной картины на экране, где ведется ее наблюдение. Видимость интерференционной картины не уменьшится, но сама она расположится несимметрично относительно середины отрезка S_1S_2, что легко заметить при наблюдении интерференции в белом свете, когда центральная интерференционная полоса нулевого порядка тоже не окрашена.

Точно так же на видимость интерференционной картины не повлияет изменение расстояния между щелями, хотя пространственный ее период (расстояние между интерференционными полосами) будет, конечно, изменяться обратно пропорционально расстоянию между щелями. Пусть теперь на экран со щелями S_1 и S_2 падает пучок не от точечного источника, а пучок, в котором колебания в разных его точках не вполне когерентны между собой. Такое частично когерентное освещение можно реализовать, например, если использовать протяженный источник света. Световые пучки, распространяющиеся через щели S_1 и S_2, также не будут полностью когерентными, что уменьшит видимость интерференционной картины, наблюдаемой на экране, расположенном за щелями.

Дело здесь обстоит так же, как и в рассмотренном выше случае интерференции световых пучков равной интенсивности, в состав которых входит доля некогерентного света. В § 13 было показано, что видимость интерференционной картины V равна доле когерентного света γ, входящей в состав интерферирующих световых пучков (см. (13.6)).

Таким образом, оказывается, что интерференционный опыт, поставленный по схеме Юнга, может позволить выяснить, насколько когерентны между собой колебания в сечении светового пучка, достигающего щелей S_1 и S_2. Варьируя расстояние между щелями S_1 и S_2 и одновременно измеряя видимость интерференционной картины на расположенном за ними экране, можно «обследовать» когерентность колебаний на всей площади сечения светового пучка, освещающего экран со щелями. Для количественной характеристики результатов такого обследования в сечении светового пучка, *перпендикулярном к направлению его распространения*, вводится понятие *пространственной когерентности*.

Количественные результаты определения видимости интерференционной картины в схеме Юнга в зависимости от расстояния между щелями S_1 и S_2 позволят определить пространственную когерентность вдоль одного из диаметров поперечного сечения освещающего их светового пучка. Производя подобные же измерения при другой ориентации щелей S_1 и S_2 и раздвигая их вдоль другого диаметра светового пучка, можно выяснить пространственную когерентность вдоль другого диаметра пучка и т.д.

Если применяемый световой пучок излучается точечным источником света, то пространственная когерентность по всему сечению светового пучка окажется одинаковой и равной единице, что соответ-

ствует максимальной видимости интерференционной картины, конечно, при условии использования монохроматического света.

Если световой пучок излучается протяженным светящимся телом, например диском, расположенным симметрично относительно щелей S_1 и S_2, то нетрудно предсказать качественный результат обследования пространственной когерентности по сечению этого светового пучка. Очевидно, что пространственная когерентность будет максимальна вблизи центра сечения пучка. Кроме того, по мере удаления диска от плоскости экрана со щелями S_1 и S_2 пространственная когерентность светового пучка будет возрастать.

В рамках изложенных представлений и при использовании понятия пространственной когерентности роль входной щели S в традиционной постановке интерференционного опыта Юнга состоит в следующем. В отсутствие такой щели или при слишком большой ее ширине не обеспечивается пространственная когерентность световых пучков, освещающих щели S_1 и S_2, что ведет к обращению в нуль видимости интерференционной картины.

Проведенные рассуждения, основанные на понятии частичной когерентности световых волн, проходящих через щели S_1, S_2, объясняют, разумеется, те же явления, о которых шла речь в начале параграфа, — уменьшение видимости интерференционных полос при увеличении угловых размеров источника света. Различие состоит лишь в способе рассуждений. В начале параграфа находилась интерференционная картина, обусловленная светом, испускаемым малым элементом протяженного источника света, и суммировались интенсивности в интерференционных картинах, вызванных светом от разных участков этого источника; уменьшение видимости полос в результирующей картине возникало при этом способе анализа как следствие различного положения полос для разных участков источника. Во втором подходе предварительно рассматриваются световые колебания, происходящие в щелях S_1, S_2 и обусловленные излучением всего протяженного источника света. Эти колебания оказываются не полностью когерентными, и уменьшение видимости полос интерпретируются как проявление этой частичной когерентности колебаний в S_1, S_2. Из сказанного ясно, что исходной причиной уменьшения видимости интерференционных полос служит конечный угловой размер источника света, и два сравниваемых способа рассуждений отличаются лишь тем, на каком этапе производится суммирование действий различных участков источника: в первом способе это суммирование проводится на последнем этапе, т.е. в интерференционной картине, а во втором способе — на промежуточном этапе, в плоскости, где расположены щели S_1, S_2.

Одна из особенностей лазерных источников света заключается в высокой пространственной когерентности световых колебаний в сечении излучаемых ими световых пучков. Как мы увидим ниже, опыт Юнга с лазерным пучком света можно осуществить без входной щели в интерференционной схеме. Оказывается, что при специальном режиме работы лазера щели S_1 и S_2 можно раздвинуть до краев сечения лазерного пучка без снижения видимости интерференционной картины, но, разумеется, с уменьшением ее пространственного периода.

§ 18. Роль поляризации при интерференции поперечных волн

Как было указано в § 13, мы предполагали, что оба интерферирующих колебания имеют одно и тоже направление. В том случае, когда мы имеем дело с *продольными* волнами (например, звуковые волны в воздухе), при совпадении направлений распространения волн совпадают и направления колебаний. В том же случае, когда волны *поперечны* (например, световые волны), возможно, что при совпадении направлений распространения двух волн направления колебаний в них *не совпадают*. Действительно, в поперечной волне возможно колебание по *любому* направлению, перпендикулярному к направлению распространения волны.

Поперечность световых волн можно принять во внимание, если возмущения, которые фигурировали в предыдущем рассмотрении, представить в виде векторов $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$, перпендикулярных к направлению распространения интерферирующих волн. Результирующее возмущение $\mathbf{s}$ в точке наблюдения запишется как

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2,$$

и тогда для интенсивности в точке наблюдения получим

$$I \propto \mathbf{s}^2 = \mathbf{s}_1^2 + \mathbf{s}_2^2 + 2\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2.$$

Интерференционные явления описываются, очевидно, членом $2\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2$ в этом соотношении. Для осуществления интерференции поляризованных световых колебаний необходимо, следовательно, обеспечить встречу двух световых лучей, в которых направления колебаний $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$ должны быть не перпендикулярными. Если же $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$ взаимно перпендикулярны, то интерференция не наблюдается и область перекрытия световых пучков освещена равномерно. Максимальное значение видимости полос достигается в том случае, когда интерферирующие волны поляризованы одинаково, т.е. $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$ параллельны. Таким образом, интерференция поляризованных световых волн зависит не только от их амплитуд и фаз, но и от состояния поляризации.

Наблюдение интерференции в естественном свете, для которого имеют место поперечные колебания всех направлений, также возможно, и, как правило, на опыте реализуется интерференция именно когерентных пучков естественного света. Для выяснения этого вопроса каждый из интерферирующих пучков естественного света представим в виде суперпозиции двух волн, ортогонально поляризованных и не связанных друг с другом никакими определенными фазовыми соотношениями. Условие когерентности пучков означает, что одинаково поляризованные волны имеют равные начальные фазы. Поэтому при наложении двух когерентных пучков естественного света формируются две независимые, но пространственно совпадающие интерференционные картины, отвечающие двум парам одинаково поляризованных волн.

Мы можем прийти к только что полученному выводу и с помощью элементарных соображений о процессе испускания света атомами среды, аналогичных изложенным в § 14. Свет, посылаемый каким-либо

атомом, представляет собой поляризованный свет, однако излучение разных атомов поляризовано по-разному. Поэтому наблюдаемое нами излучение очень большого числа атомов содержит в себе колебания со всеми возможными направлениями, т.е. является естественным светом. Кроме того, каждый атом, начав испускать свет, прекращает это действие через короткий промежуток времени и вновь начинает испускать свет уже с новым направлением колебаний и с новой начальной фазой. Однако прием Френеля, состоящий в расчленении одной волны на две, и здесь приходит на помощь. В интерференционных опытах мы заставляем встретиться волны, посланные почти одновременно одним и тем же атомом, т.е. сохраняющие одну и ту же начальную фазу и одно и то же направление колебаний. Таким образом, оказывается возможным наблюдение интерференции в естественном свете, представляющем смесь различно ориентированных поляризованных волн, ибо интерференция происходит между частями одной и той же поляризованной волны.

К вопросу об интерференции поляризованных лучей мы вернемся в гл. XVIII.

§ 19. Кажущиеся парадоксы в явлениях интерференции волн

В случае двух когерентных источников света, например источника и его изображения в зеркале, в окружающем пространстве будет иметь место распределение амплитуд различных значений от $a_1 + a_2$ до $a_1 - a_2$. В частности, когда амплитуды, обусловливаемые обоими источниками, равны ($a_1 = a_2 = a$), то амплитуда результирующего колебания лежит между крайними значениями — нулем и $2a$, а соответствующие интенсивности — между нулем и $4a^2$.

Максимумы и минимумы освещенности, наблюдаемые в интерференционных картинах, не связаны, вообще говоря, с какими-либо превращениями лучистой энергии, т.е. в местах минимумов световая энергия отнюдь не переходит в другие формы, например в тепло. Дело сводится лишь к *перераспределению* светового потока, так что максимумы освещенности в одних местах компенсируются минимумами в других. Если подсчитать энергию, проходящую через замкнутую поверхность, окружающую источник и зеркало, а затем энергию, протекающую через ту же поверхность в отсутствие зеркала, то энергии в обоих случаях оказываются равными. Таким образом, конечно, никакого противоречия с законом сохранения энергии нет.

Однако можно представить себе более сложные случаи. Предположим, что расстояние между двумя когерентными источниками *меньше* $\lambda/2$, т.е. $S_1S_2 = 2l < \lambda/2$. В таком случае, как легко видеть из рис. 4.1, мы нигде не найдем точек, в которых интенсивность равна нулю; действительно, $d_1 - d_2$ всегда меньше $2l$ и, следовательно, меньше $\lambda/2$, т.е. нигде не выполняется условие обращения в нуль амплитуды результирующего колебания. С другой стороны, для всех точек линии OO' реализуется условие максимума, т.е. во всех точках этой линии интенсивность достигает $4a^2$. Уже из такого простого рас-

суждения видно, что вопрос о компенсации минимумов и максимумов в этом случае не так прост. И действительно, подсчет подтверждает, что в данном случае общая энергия, протекающая за единицу времени через замкнутую поверхность, окружающую оба когерентных источника, *больше*, чем было бы в случае некогерентных источников. Здесь, конечно, нет никакого нарушения закона сохранения энергии. Мы имеем дело с действительным увеличением энергии, *испускаемой* за единицу времени парой когерентных источников благодаря воздействию их друг на друга. Энергия эта доставляется из тех запасов, которые питают наши источники. Если же ее запасы ограничены, то, очевидно, они вследствие указанного взаимодействия израсходуются за более короткий срок и источники раньше прекратят свое действие (затухание увеличится).

Подобные случаи особенно легко осуществить с радиоволнами, длина которых значительна, так что нетрудно расположить два источника таких волн (антенны) на расстоянии, меньшем половины длины волны. Установки подобного типа позволяют улучшить излучающее действие антенны и, кроме того, направить максимум излучения в определенном направлении (направленное действие). Ими часто пользуются на практике.

§ 20. Оптическая длина пути. Таутохронизм оптических систем

Разобранные в настоящей главе случаи интерференции света дают возможность наблюдать это явление на специально осуществляемых опытах. Однако явление встречи двух или нескольких когерентных волн, между которыми наблюдается интерференция, имеет место, по существу, во всяком оптическом процессе. Распространение света через любое вещество, преломление света на границе двух сред, его отражение и т.д. суть процессы такого рода. Распространение света в веществе сопровождается воздействием световой электромагнитной волны на электроны (и ионы), из которых построено вещество. Под действием световой волны эти заряженные частицы приходят в колебание и начинают излучать вторичные электромагнитные волны с тем же периодом, что и у падающей волны. Так как движение соседних зарядов обусловливается действием одной и той же световой волны, то вторичные волны определенным образом связаны между собой по фазе, т.е. являются *когерентными*. Они интерферируют между собой, и эта интерференция позволяет объяснить явления отражения, преломления, дисперсии, рассеяния света и т.д. Мы познакомимся в дальнейшем с объяснением перечисленных явлений с указанной точки зрения. В настоящем же параграфе мы остановимся на одном частном случае из описанного ряда явлений.

Прежде всего заметим, что если в вакууме скорость волны c и длина ее λ_0, то для среды с показателем преломления n имеем соответственно $v = c/n$ и $\lambda = \lambda_0/n$. В соответствии с этим, если волна проходит путь d_1 в одной среде (n_1) и путь d_2 во второй среде (n_2),

то возникающая разность фаз ψ выразится так:

$$\psi = 2\pi \left(\frac{d_2}{\lambda_2} - \frac{d_1}{\lambda_1} \right) = 2\pi \frac{n_2 d_2 - n_1 d_1}{\lambda_0} .$$

Произведение показателя преломления на длину пути называется *оптической длиной* пути; вводя обозначение $n_1 d_1 = (d_1)$, мы можем записать выражение для разности фаз в виде

$$\psi = 2\pi \frac{(d_2) - (d_1)}{\lambda_0} . \tag{20.1}$$

Если $(d_1) = (d_2)$, то $\psi = 0$; таким образом, два пути световых лучей оптически эквивалентны друг другу, т.е. не внесут никакой разности фаз, если их оптические длины равны между собой. Такие пути называются часто *таутохронными*, т.е. совпадающими по времени, ибо свет по этим не равным по геометрической длине путям распространяется за одно и то же время. Условию таутохронизма удовлетворяют, в частности, все пути лучей, проходящих через какую-либо оптическую систему, например линзу, и дающих изображение S' источника S. Действительно, если бы отдельные лучи не были таутохронными, то части световой волны, распространяющиеся по разным путям, обладали бы некоторой разностью фаз и взаимно ослабляли бы друг друга при встрече в S'. Возможность получения интенсивного максимума в S', который и есть изображение источника S, обусловливается взаимным усилением отдельных частей волны, пришедших в точку S' без разности фаз (по таутохронным путям). Пути, ведущие от S ко всякой другой точке пространства, не будут оптически равными, и во всех иных точках, кроме S', взаимная интерференция поведет к ослаблению света. Таким образом, получение изображения в линзе есть *интерференционный эффект*. Мы видим, следовательно, что линза не вносит разности хода между отдельными лучами, образующими изображение. Это относится и к любой оптической системе, дающей *изображение* источника.

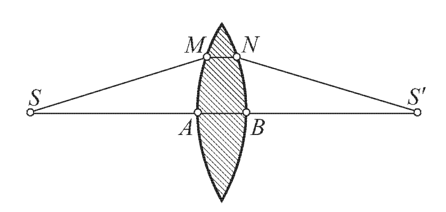


Рис. 4.15. Таутохронизм линзы

Рисунок 4.15 поясняет, каким образом пути лучей, идущих через середину и край линзы, могут быть таутохронными. Хотя геометрически путь $SABS'$ короче пути $SMNS'$, но часть, приходящаяся на путь внутри линзы, соответственно больше ($AB > MN$). Так как скорость света в материале линзы меньше, чем в воздухе, то запаздывание на участке AB компенсирует опережение на участках SA и BS' по сравнению с соответствующими участками пути SM и NS'. Условие таутохронизма есть

$$SA + nAB + BS' = SM + nMN + NS',$$

где $n = n_2/n_1$ — относительный показатель преломления материала линзы.

§ 21. Интерференция немонохроматических световых пучков

Как уже упоминалось в § 15, интерференция немонохроматического света приводит к сложной картине, состоящей из совокупности максимумов и минимумов, соответствующих разным λ. Если λ имеет все возможные значения, то согласно формуле $h = mD\lambda/2l$ *любой точке* экрана (h) соответствует бо́льшая или меньшая интенсивность света данной длины волны. Следовательно, в любой части экрана имеется значительная освещенность. Если бы в нашем источнике различные длины волн были представлены с одинаковой интенсивностью и приемное устройство было одинаково чувствительно ко всем длинам волн (например, идеально панхроматическая фотопластинка), то мы не могли бы обнаружить никаких следов интерференционной картины.

Для того чтобы такое обнаружение было возможно, необходимо, чтобы разнообразие длин волн было ограничено и не превышало некоторого спектрального интервала, заключенного между λ и $\lambda + \Delta\lambda$. Пользуясь формулой $h = mD\lambda/2l$, легко найти $\Delta\lambda$. Действительно, интерференция не будет наблюдаться, если максимум m-го порядка для $(\lambda + \Delta\lambda)$ совпадет с максимумом $(m+1)$-го порядка для λ. В этих условиях весь провал между соседними максимумами будет заполнен максимумами неразличимых длин волн нашего интервала (рис. 4.16).

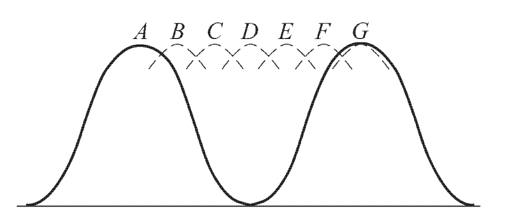


Рис. 4.16. Распределение максимумов интерференции немонохроматических лучей: сплошная кривая — распределение освещенности для длины волны λ, причем A — максимум m-го порядка, G — максимум $(m+1)$-го порядка, $B, C, D\ldots$ — максимумы m-го порядка для длин волн в интервале $\lambda < \lambda_i \leqslant \lambda + \Delta\lambda$

Условие неразличимости интерференционной картины: $(m+1)\lambda = m(\lambda + \Delta\lambda)$, т.е. $\Delta\lambda = \lambda/m$, где m — целое число. Для того чтобы интерференционная картина при данных значениях $\Delta\lambda$ и λ обладала высокой видимостью, приходится ограничиваться наблюдением интерференционных полос, порядок которых много меньше значения $m = \lambda/\Delta\lambda$ [1]).

Другими словами, чем выше порядок интерференции (m), который нужно наблюдать, тем *у́же* должен быть спектральный интервал, еще допускающий наблюдение интерференции. Наоборот, чем менее монохроматичен свет, тем ниже порядки интерференции, доступные наблюдению.

Монохроматизацию света можно осуществить с помощью светофильтра или спектрального аппарата. При этом, конечно, безразлич-

---

[1]) Однако надо иметь в виду, что видимость интерференционной картины *существенно* зависит от закона распределения энергии в используемом световом спектральном интервале. Приведенный расчет справедлив для случая уширенной спектральной линии.

но, стоит ли монохроматизирующее приспособление *перед* интерферометром или *после* него. В первом случае мы уменьшаем спектральный интервал $\Delta\lambda$ интерферирующего света. Во втором мы с помощью монохроматора устраняем из полученной интерференционной картины мешающие волны, так что на приемник (глаз, фотопластинка) падает уже упрощенная и различимая интерференционная картина. Роль такого «монохроматора» может играть и непосредственно наш глаз благодаря его способности к различению цветов: при наблюдении глазом мы легко отличаем максимум одного цвета от максимумов другого. Однако эта способность нашего глаза к различению также ограничена, хотя и превосходит избирательную способность большинства физических приемников (фотоэлемент, фотопластинку и тем более вполне нейтральный термоэлемент). Особенно затруднительно для глаза различение оттенков при наличии непрерывного перехода. При этих условиях глаз вряд ли способен обнаружить различие, если λ меняется менее чем на несколько десятков (сто) ангстрем [1]). Вооружив глаз светофильтром с узкой полосой пропускания или спектроскопом, мы получаем возможность наблюдать интерференцию при большей разности хода.

Порядок интерференции m связан с разностью хода интерферирующих световых пучков $d_2 - d_1$ и длиной волны λ соотношением $m = (d_2 - d_1)/\lambda$. Из проведенного выше обсуждения интерференции немонохроматического света следует, что разность хода, при которой исчезает интерференционная картина, определяется соотношением $L \equiv d_2 - d_1 = \lambda^2/\Delta\lambda$.

Эта величина называется *длиной когерентности*. Она определяется свойствами источника света либо применяемого монохроматора. Для того чтобы наблюдать интерференционную картину с достаточной видимостью (например, с $V \approx 0{,}1$), необходимо обеспечить в интерференционной схеме условия, при которых максимальная разность хода интерферирующих световых пучков *много меньше* длины когерентности для применяемого источника света.

Опыт показывает, что при использовании в качестве источника света свечения разреженного газа длина когерентности для отдельных спектральных линий этого газа не превышает нескольких десятков сантиметров. Лазерные источники света (см. гл. XL) позволяют наблюдать интерференцию при разности хода в несколько километров. Однако практический предел разности хода, при которой возможно наблюдение интерференции, ограничивается уже не длиной когерентности лазерных источников света, но трудностями создания стабильной интерференционной схемы подобных размеров и неоднородностью земной атмосферы.

---

[1]) Рэлей утверждал, что он способен различать оттенки, соответствующие двум компонентам желтой линии натрия, отличающимся на 6 Å. Это, по-видимому, предельная чувствительность глаза к оттенкам, проявляющаяся при одновременном наблюдении двух близких, но *дискретных* спектральных участков. При наблюдении сплошной совокупности различение цветов гораздо труднее.

В § 14 указывалось, что волны, испускаемые атомами, сохраняют регулярность лишь в течение ограниченного интервала времени. Другими словами, в течение этого интервала времени амплитуда и фаза колебаний приблизительно постоянны, тогда как за больший промежуток времени и фаза, и амплитуда существенно изменяются. Часть последовательности колебаний, на протяжении которой сохраняется их регулярность, называется *цугом волн* или *волновым цугом.* Время испускания цуга волн называется длительностью цуга или *временем когерентности.* Пространственная протяженность цуга L (*длина цуга волн*) и время когерентности T связаны очевидным соотношением $L = Tc$, где c — скорость света. Если, например, средняя длина цугов волн, излучаемых некоторым источником света, равна по порядку величины 1 см, то время когерентности для этого источника света составляет величину порядка $0{,}3 \cdot 10^{-10}$ с. Следовательно, в среднем через такие промежутки времени прекращается излучение одной регулярной последовательности волн, испускаемой источником света, и начинается излучение нового цуга волн с амплитудами, фазами и поляризацией, не связанными закономерно с соответствующими параметрами предшествующего волнового цуга.

Нетрудно понять, что длина когерентности и длина цуга волн совпадают. Действительно, если разность хода интерферирующих пучков становится больше длины цуга волн, то в данной точке интерференционного поля складываются волны, испущенные атомом в моменты времени, отличающиеся более чем на время когерентности. Но такие колебания не могут интерферировать. Следовательно, интерференция не может наблюдаться, если разность хода больше длины цуга, а максимальная разность хода, при которой интерференция еще наблюдается, т.е. *длина когерентности*, равна длине цуга.

Используя связь между длиной когерентности и шириной спектрального интервала $\Delta\lambda$, можно найти соотношение между $\Delta\lambda$ и временем когерентности T

$$|\Delta\lambda| = \frac{\lambda^2}{L} = \frac{\lambda^2}{cT},$$

откуда, учитывая, что $|\Delta\lambda| = c\Delta\nu/\nu^2$, получаем

$$\Delta\nu T = 1, \tag{21.1}$$

где $\Delta\nu$ — ширина спектрального интервала в шкале частот.

Обратная пропорциональность между временем когерентности T и отвечающей ему шириной спектрального интервала имеет весьма общий характер. Более строгая теория, учитывающая особенности случайных изменений фаз и амплитуд волны, приводит лишь к изменению числового значения в правой части соотношения (21.1) (подробнее см. § 22).

§ 22. Частично когерентный свет

В предшествующих параграфах, посвященных явлению интерференции световых пучков, резко противопоставлялись когерентные и некогерентные пучки. В то же время при интерференции немонохроматических пучков увеличение разности хода приводит, разумеется,

к постепенному ухудшению контрастности интерференционных полос. Поэтому представления о полностью когерентных и полностью некогерентных пучках соответствуют некоторым крайним, предельным условиям. В действительности же реализуются и все промежуточные случаи, и тогда говорят о *частичной когерентности.*

Из обсуждения процесса испускания волн атомами источника света (см. § 14, 21) должно быть ясно, что причиной нарушения когерентности служат случайные (статистические) изменения амплитуды и фазы волны, вызванные, в свою очередь, случайными воздействиями окружающей среды на излучающие атомы. Поэтому анализ интерференции частично когерентных световых пучков требует учета статистических свойств волн, испускаемых атомами. В данном курсе нет возможности останавливаться на этой стороне вопроса сколько-нибудь подробно [1]), однако ряд важных физических выводов можно получить, опираясь на сравнительно простые, но общие статистические соображения.

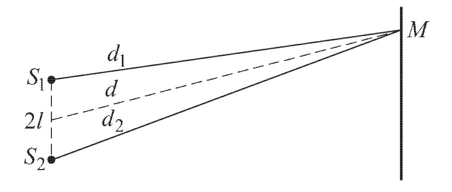


Рис. 4.17. К расчету степени когерентности

Пусть две волны из точечных источников S_1, S_2 приходят в точку наблюдения M (рис. 4.17). Обозначим через $a_1(t)$, $a_2(t+\tau)$ и $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t+\tau)$ амплитуды и фазы интерферирующих волн в точке M. В аргументах амплитуд и фаз отражен тот факт, что волны испущены в разные моменты времени t и $t+\tau$, отличающиеся на $\tau = (d_2 - d_1)/c$. В соответствии со сказанным ранее будем считать амплитуды и фазы случайными величинами и вычислим квадрат амплитуды результирующего колебания, усредненный за большой промежуток времени [2]):

$$\begin{gathered}\overline{A^2} = \overline{a_1^2} + \overline{a_2^2} + \overline{2a_1(t)a_2(t+\tau)\cos\left[\overline{\omega}\tau + \varphi(\tau)\right]},\\ \varphi(\tau) = \varphi_2(t+\tau) - \varphi_1(t),\end{gathered} \tag{22.1}$$

где черта сверху означает усреднение, аналогичное тому, которое проводилось в § 12. Частота $\overline{\omega}$ — средняя частота регулярных колебаний. Первые два члена соответствуют средним квадратам амплитуд интерферирующих колебаний. Простые преобразования показывают, что $\overline{A^2}$ можно представить в следующем виде (см. упражнение 20):

$$\begin{aligned}\overline{A^2} = \overline{a_1^2} + \overline{a_2^2} + 2\sqrt{\overline{a_1^2}\cdot\overline{a_2^2}}\,[c(\tau)\cos\overline{\omega}\tau - s(\tau)\sin\overline{\omega}\tau] =\\ = \overline{a_1^2} + \overline{a_2^2} + 2\sqrt{\overline{a_1^2}\cdot\overline{a_2^2}}\,\gamma(\tau)\cos\left[\overline{\omega}\tau + \psi(\tau)\right],\end{aligned} \tag{22.2}$$

[1]) Более детальное изложение статистических явлений в оптике см. в книге: Г. С. Горелик. Колебания и волны.– М.: Физматгиз, 1959, гл. X.

[2]) Предполагается, что период регулярных колебаний $2\pi/\overline{\omega}$ значительно меньше интервала времени, в течение которого амплитуды и фазы меняются заметным образом.

где величины $c(\tau)$, $s(\tau)$, $\gamma(\tau)$, $\psi(\tau)$ определяются соотношениями

$$\begin{gathered}
c(\tau) = \frac{\overline{a_1(t)a_2(t+\tau)\cos\varphi(\tau)}}{\sqrt{\overline{a_1^2}\cdot\overline{a_2^2}}}\,,\\
s(\tau) = \frac{\overline{a_1(t)a_2(t+\tau)\sin\varphi(\tau)}}{\sqrt{\overline{a_1^2}\cdot\overline{a_2^2}}}\,,\\
\gamma(\tau) = \sqrt{c^2(\tau)+s^2(\tau)}, \quad \operatorname{tg}\psi(\tau) = \frac{s(\tau)}{c(\tau)}\,.
\end{gathered} \tag{22.3}$$

Если ввести интенсивности I, I_1, I_2, пропорциональные усредненным квадратам амплитуд $\overline{A^2}$, $\overline{a_1^2}$, $\overline{a_2^2}$, то формулу (22.2) можно переписать в виде

$$\begin{gathered}
I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,[c(\tau)\cos\overline{\omega}\tau - s(\tau)\sin\overline{\omega}\tau] = \\
= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,\gamma(\tau)\cos[\overline{\omega}\tau + \psi(\tau)], \quad (22.4)\\
\overline{\omega}\tau = 2\pi\,\frac{d_2 - d_1}{\lambda}\,.
\end{gathered}$$

Выражение (22.4) отличается от (13.3), полученного для интенсивности результирующего колебания при полностью когерентных пучках, дополнительным множителем $\gamma(\tau)$ в интерференционном члене и дополнительным сдвигом фазы $\psi(\tau)$. Вполне очевидно, что $\gamma(\tau)$ не может быть больше единицы, т.е. $\gamma(\tau) \leqslant 1$. В противном случае амплитуда суммарного колебания могла бы быть больше суммы амплитуд интерферирующих колебаний, либо обратиться в нуль при неравных амплитудах. И то, и другое физически бессмысленно. Таким образом, множитель $\gamma(\tau)$ уменьшает величину интерференционного члена по сравнению со случаем полностью когерентных пучков, т.е. характеризует ухудшение контрастности интерференционных полос. Если $\gamma(\tau) = 0$, то интерференция не наблюдается; $\gamma(\tau) = 1$ соответствует интерференции полностью когерентных пучков. Все промежуточные значения $\gamma(\tau)$ отвечают частично когерентным пучкам. Величина $\gamma(\tau)$ называется *степенью когерентности* пучков.

При любом значении $\gamma(\tau)$ интенсивность I можно записать так:

$$I = \gamma(\tau)\{I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,\cos[\overline{\omega}\tau + \psi(\tau)]\} + [1-\gamma(\tau)][I_1 + I_2].$$

Первое слагаемое в правой части этого соотношения отвечает когерентному сложению колебаний с интенсивностями $\gamma(\tau)I_1$, $\gamma(\tau)I_2$ и разностью фаз $\psi(\tau)$, второе слагаемое — полностью некогерентному сложению колебаний с интенсивностями $[1-\gamma(\tau)]I_1$, $[1-\gamma(\tau)]I_2$. Можно поэтому считать, что свет в точке M интерференционной картины как бы состоит из когерентной и некогерентной частей, причем доля когерентного света равна $\gamma(\tau)$. Обсуждаемое соотношение уже было получено в § 13 с помощью элементарных соображений, основанных на представлении о разделении света интерферирующих пучков на когерентную и некогерентную части (ср. (13.5)). Анализ, проведенный в данном параграфе, устанавливает точный смысл такого разделения.

Экспериментальное определение степени когерентности $\gamma(\tau)$ и фазы $\psi(\tau)$ может быть основано на измерении видимости и положения

интерференционных полос. Из формулы (22.4) следует, что параметр видимости V (см. § 13) и $\gamma(\tau)$ связаны соотношением

$$V = \frac{E_{\max} - E_{\min}}{E_{\max} + E_{\min}} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}\,\gamma(\tau). \tag{22.5}$$

Таким образом, измеренные значения интенсивностей I_1, I_2 интерферирующих пучков и освещенностей в максимумах и минимумах интерференционной картины $E_{\max}$, $E_{\min}$ позволяют вычислить $\gamma(\tau)$. При одинаковых I_1 и I_2 степень когерентности $\gamma(\tau)$ совпадает с видимостью полос V.

Положение максимумов освещенностей определяется условием

$$\frac{d_2 - d_1}{\lambda} + \frac{\psi(\tau)}{2\pi} = m. \tag{22.6}$$

Измеряя разность хода $d_2 - d_1$, длину волны λ и порядок интерференции m, можно найти с помощью (22.6) фазу $\psi(\tau)$. Измерение разности хода удобно (с экспериментальной точки зрения) заменить измерением положения интерференционных полос, как следует из вычислений, проведенных в § 15. Наконец, можно иметь дело не с максимумами, а с минимумами освещенности, и тогда m в формуле (22.6) будет не целым, а полуцелым числом.

До сих пор степень когерентности $\gamma(\tau)$ и фаза $\psi(\tau)$ рассматривались как экспериментальные характеристики интерференционной картины. Поставим теперь вопрос о теоретическом вычислении $\gamma(\tau)$ и $\psi(\tau)$, которое должно основываться на соотношениях (22.3). Если среда между источниками света и местом наблюдения интерференции однородна и неизменна во времени, то статистические характеристики случайных амплитуд $a_1(t)$, $a_2(t)$ и фаз $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ определяются свойствами источников S_1, S_2 и для теоретического расчета необходимы определенные предположения о процессе испускания света. Примем следующую простую схему для этого процесса: точечный источник испускает последовательность волновых цугов с равными длительностями T и равными амплитудами a, а фазы различных цугов принимают совершенно случайные, независимые друг от друга значения. Данная схематизация соответствует тому, что излучающий атом в течение очень короткого времени, значительно меньшего длительности цуга T, испытывает резкое возмущение со стороны окружающих его частиц (атомов, электронов и др.), в результате чего и изменяется фаза излучаемой им волны. Вычисления показывают, что для указанной схемы степень когерентности $\gamma(\tau)$ и фаза $\psi(\tau)$ определяются выражениями (см. упражнение 21)

$$\gamma(\tau) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|\tau|}{T}, & |\tau| \leqslant T, \\ 0, & |\tau| > T, \end{cases} \qquad \psi(\tau) = 0. \tag{22.7}$$

Степень когерентности уменьшается при увеличении $|\tau|$ по линейному закону до тех пор, пока не станет равной нулю, а при еще больших значениях $|\tau|$ остается нулевой (рис. 4.18). Такое поведение $\gamma(\tau)$ имеет простое объяснение. Если разность хода $d_2 - d_1$ больше длины цуга или, что то же самое, время запаздывания τ больше длительности цуга T, то в точке M складываются колебания заведомо разных

цугов, фазы которых, по предположению, никак не связаны между собой. Поэтому интерференция не может наблюдаться при $|\tau| > T$, чему и отвечает $\gamma(\tau) = 0$. Если же $|\tau| \leqslant T$, то в точке наблюдения частично перекрываются разные участки одного и того же цуга и в меру этого перекрытия будет более или менее значительной контрастность интерференционных полос. Поскольку степень перекрытия линейно уменьшается с увеличением запаздывания цуга от S_2 относительно цуга от S_1, степень когерентности уменьшается по линейному закону с изменением $|\tau|$.

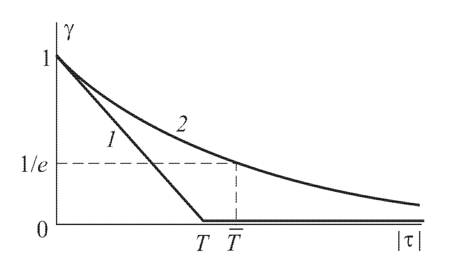


Рис. 4.18. Графики зависимости степени когерентности от времени запаздывания для пучков, состоящих из волновых цугов: *1* — цуги равной длительности T, *2* — длительность цугов подчинена распределению Пуассона (22.8)

Очевидным недостатком рассмотренной схемы следует считать предположение о равенстве длительностей всех цугов. Этот недостаток легко устранить. Пусть атом испускает волновые цуги разной длины и время наблюдения достаточно велико, чтобы реализовались практически все возможные значения T. Результирующая степень когерентности будет зависеть от того, как часто испускаются цуги с той или иной длительностью. Предположим, что относительное число цугов с длительностью T дается выражением (распределение Пуассона)

$$\frac{T}{\overline{T}} \exp\left(-\frac{T}{\overline{T}}\right), \tag{22.8}$$

где $\overline{T}$ — некоторая средняя длительность. Тогда для $\gamma(\tau)$ получим (см. упражнение 21)

$$\gamma(\tau) = \exp\left(-\frac{|\tau|}{\overline{T}}\right). \tag{22.9}$$

В данном случае степень когерентности не равна нулю при любых значениях $|\tau|$ (см. рис. 4.18), чему отвечает возможность испускания цугов, длительность которых по случайным обстоятельствам превышает среднюю длительность $\overline{T}$. Однако относительное число таких длинных цугов мало́, и $\gamma(\tau)$ быстро убывает при $|\tau| > \overline{T}$.

В обсужденной выше схеме процесса испускания случайным воздействиям подвергалась лишь фаза колебаний. Такие колебания называют колебаниями со *случайной фазовой модуляцией*. При фазовой модуляции интенсивность, пропорциональная квадрату амплитуды колебаний, не изменяется во времени. Можно предполагать, что взаимодействие излучающего атома с окружающими частицами приводит не только к фазовой модуляции испускаемых им волн, но и к изменению амплитуды. В последнем случае говорят о *случайной амплитудной модуляции* колебаний.

Пусть испускаемое атомом излучение представляет собой последовательность волновых цугов, амплитуды которых изменяются по случайным причинам, но фаза не модулируется. Расчет показывает, что в этом случае степень когерентности имеет вид (см. упражнение 21)

$$\gamma(\tau) = \begin{cases} \dfrac{(\overline{a})^2}{\overline{a^2}} + \left[1 - \dfrac{|\tau|}{T}\right] \dfrac{\overline{[a-\overline{a}]^2}}{\overline{a^2}}, & |\tau| \leqslant T, \\ \dfrac{(\overline{a})^2}{\overline{a^2}}, & |\tau| > T, \end{cases}$$

где T — длительность, одинаковая для всех цугов, $\overline{a}$ — средняя амплитуда, $\overline{a^2}$ — средний квадрат амплитуды. Как и в случае фазовой модуляции, график функции $\gamma(\tau)$ имеет треугольную форму при $|\tau| < T$, однако при $|\tau| > T$ степень когерентности не обращается в нуль, а остается постоянной величиной, равной $(\overline{a})^2/\overline{a^2}$. Опыт показывает, однако, что $\gamma(\tau) \to 0$ при достаточно больших $|\tau|$. Поэтому следует считать $\overline{a} = 0$, что эквивалентно изменению знака амплитуды при смене одного цуга другим или, иными словами, скачкам фазы на π. Следовательно, на основе опыта мы приходим к выводу, что фазовая модуляция в той или иной форме обязательно существует при взаимодействии излучающих атомов с окружающей средой.

Измерение $\gamma(\tau)$ при разных τ и сопоставление с теоретически вычисленной функцией позволяет, таким образом, сделать определенные заключения об особенностях процесса испускания волн атомами.

Уменьшение видимости полос при интерференции немонохроматических пучков объяснялось в § 21 иным способом, а именно, предполагалось, что они являются суперпозицией монохроматических пучков с различными частотами (или длинами волн). Естественно возникает вопрос о взаимоотношении спектрального подхода, изложенного в § 21, и временнóго подхода, использующегося в данном параграфе. Для выяснения этого вопроса напомним, что строго гармоническое (монохроматическое) колебание, по самому своему определению, должно происходить бесконечно долго. Если колебание следует гармоническому закону в течение ограниченного промежутка времени, по истечении которого изменяются его амплитуда, частота или фаза (волновой цуг), то это *модулированное* колебание можно представить в виде суммы монохроматических колебаний с различными частотами, амплитудами и фазами. Но такое *разложение* волновых цугов на монохроматические составляющие и дает основу для представления об интерференции немонохроматических пучков. Итак, спектральный и временной подходы к анализу интерференции оказываются разными способами рассуждений об одном и том же явлении, — нарушении когерентности колебаний [1]).

Приведем количественные соотношения, отвечающие представлению об интерференции немонохроматических пучков. Будем считать, что частоты монохроматических компонент, входящих в состав интер-

[1]) Более подробно о соотношении между спектральным и временны́м способами рассуждений см.: Г.С. Г о р е л и к. Колебания и волны.– М.: Физматгиз, 1959, гл XI.

ферирующих пучков, сосредоточены вблизи некоторой средней частоты $\overline{\omega}$. Обозначим через $I_1(\omega-\overline{\omega})\,d\omega$, $I_2(\omega-\overline{\omega})\,d\omega$ интенсивности колебаний в интерферирующих пучках, происходящих с частотой ω. Величины $I_1(\omega-\overline{\omega})$, $I_2(\omega-\overline{\omega})$ носят название *спектральных плотностей интенсивности колебаний.* Полные интенсивности пучков равны, очевидно,

$$I_1 = \int I_1(\omega-\overline{\omega})\,d\omega, \quad I_2 = \int I_2(\omega-\overline{\omega})\,d\omega \tag{22.10}$$

и совпадают с интенсивностями I_1, I_2, встречавшимися ранее (например, в (22.4)). Поскольку источниками интерферирующих пучков служат два изображения одного и того же точечного источника света, спектральные плотности $I_1(\omega-\overline{\omega})$, $I_2(\omega-\overline{\omega})$ одинаковым образом зависят от частоты и отличаются только постоянными множителями, пропорциональными I_1 и I_2. С помощью введенных обозначений интенсивность в какой-либо точке интерференционной картины можно записать в виде соотношения, полностью совпадающего с (22.4), причем степень когерентности $\gamma(\tau)$, фаза $\psi(\tau)$ и величины $c(\tau)$, $s(\tau)$ связаны с $I_1(\omega-\overline{\omega})/I_1 = I_2(\omega-\overline{\omega})/I_2$следующим образом (см. упражнение 22):

$$\begin{gathered}
c(\tau) = \frac{1}{I_1}\int I_1(\Omega)\cos\Omega\tau\,d\Omega, \\
s(\tau) = \frac{1}{I_1}\int I_1(\Omega)\sin\Omega\tau\,d\Omega, \quad \Omega = \omega-\overline{\omega}, \\
\gamma(\tau) = \sqrt{c^2(\tau)+s^2(\tau)}, \quad \operatorname{tg}\psi(\tau) = \frac{s(\tau)}{c(\tau)}\,.
\end{gathered} \tag{22.11}$$

Таким образом, представления об интерференции немонохроматических пучков и об интерференции пучков в виде волновых цугов приводят к идентичным выводам о распределении интенсивности в интерференционной картине. Приведенные выше соображения о разложении волновых цугов на монохроматические колебания нашли свое количественное выражение в том, что функции $c(\tau)$, $s(\tau)$ оказываются суперпозицией гармонических составляющих с амплитудами, пропорциональными спектральной плотности интенсивности колебаний.

Соотношения (22.11), (22.5) и (22.6) позволяют вычислить степень когерентности $\gamma(\tau)$, фазу $\psi(\tau)$, видимость V и положение интерференционных полос, если известна относительная спектральная плотность $I_1(\omega-\overline{\omega})/I_1$. Справедливо и обратное утверждение [1] — если известны $\gamma(\tau)$ и $\psi(\tau)$, то можно вычислить $I_1(\Omega)/I_1$ по формуле

$$I_1(\Omega)/I_1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \gamma(\tau)\cos\left[\Omega\tau-\psi(\tau)\right]d\tau. \tag{22.12}$$

Следовательно, исследование интерференционной картины позволяет

[1] Доказательство формулы (22.12), представляющей собой частный случай преобразования Фурье, см., например, в книге: В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. Основы математического анализа. Ч. II.– М: Физматлит, 2002.

определить спектральный состав излучения. Этот метод получил название фурье-спектроскопии и нашел по ряду причин особо широкое применение при работе в инфракрасной области спектра.

Разберем несколько примеров. Непосредственным расчетом легко убедиться в том, что спектральной плотности

$$I_1(\omega - \overline{\omega}) = I_1 \frac{\Gamma/\pi}{\Gamma^2 + (\omega - \overline{\omega})^2} \tag{22.13}$$

соответствует степень когерентности

$$\gamma(\tau) = \exp(-\Gamma|\tau|). \tag{22.14}$$

Итак, степени когерентности волновых цугов с различными длительностями (ср. (22.9)) отвечает спектральная плотность, определяемая формулой (22.13) с $\Gamma = 1/\overline{T}$. Величина Γ равна тому интервалу частот, на протяжении которого $I_1(\omega - \overline{\omega})$ уменьшается в два раза по сравнению со своим максимальным значением, достигаемым при $\omega = \overline{\omega}$ (рис. 4.19 *а*). Следует обратить внимание на обратную пропорциональность Γ и $\overline{T}$, что представляет собой частный случай общего

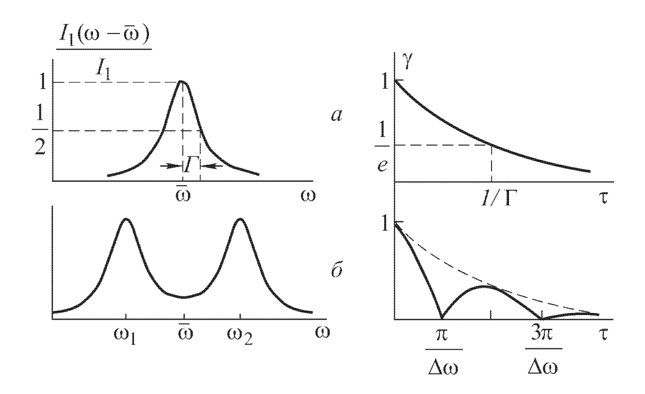


Рис. 4.19. Спектральные плотности и степени когерентности для случаев, описываемых соотношениями (22.13), (22.14) (*а*) и (22.15), (22.16) (*б*)

соотношения между длительностью волнового цуга и величиной спектрального интервала, на которую приходится существенная часть интенсивности немонохроматического пучка света (см. конец § 21).

Если спектральная плотность состоит из двух компонент, обладающих одинаковой формой вида (22.13), достигающих максимальных значений при частотах ω_1 и ω_2 и имеющих одинаковые интенсивности и полуширины Γ:

$$I_1(\omega - \overline{\omega}) = \frac{1}{2} I_1 \left[\frac{\Gamma/\pi}{\Gamma^2 + (\omega - \omega_1)^2} + \frac{\Gamma/\pi}{\Gamma^2 + (\omega - \omega_2)^2} \right], \tag{22.15}$$

$$\overline{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2),$$

то степень когерентности оказывается равной

$$\gamma(\tau) = \exp\left(-\Gamma|\tau|\right) \left|\cos\left(\frac{\Delta\omega\tau}{2}\right)\right|, \quad \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \tag{22.16}$$

и, помимо уменьшения с ростом $|\tau|$, испытывает осцилляции с периодом, равным $2\pi/|\Delta\omega|$, т.е. обратно пропорциональным расстоянию между компонентами спектральной плотности (см. рис. 4.19 *б*). Огибающая же этих осцилляций определяется полушириной компонент Г.

Рассмотрим теперь иную модель процесса излучения. Примем во внимание движение излучающего атома и не будем учитывать разбиение его излучения на волновые цуги. Вследствие эффекта Доплера (см. гл. XXI) частота света ω в месте наблюдения отличается от частоты света $\overline{\omega}$, испускаемого неподвижным атомом, на величину

$$\omega - \overline{\omega} = \frac{v}{c}\,\overline{\omega},$$

где v — проекция скорости атома на направление наблюдения. Пусть источником света служит газ; излучающие атомы этого газа имеют различные скорости и, следовательно, газ в целом испускает немонохроматическое излучение. Пусть имеет место максвелловское распределение атомов по проекциям скоростей на направление наблюдения

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\overline{v}} \exp\left[-\left(\frac{v}{\overline{v}}\right)^2\right], \quad \overline{v}^2 = \frac{2kT}{m},$$

где k — константа Больцмана, m — масса атома и T — абсолютная температура [1]). Тогда для спектральной плотности интенсивности излучения газа получим

$$I_1(\omega - \overline{\omega}) = I_1 \left[\frac{\sqrt{\pi}\,\overline{\omega}\,\overline{v}}{c}\right]^{-1} \exp\left[-\frac{(\omega - \overline{\omega})^2}{(\overline{\omega}\,\overline{v}/c)^2}\right]; \tag{22.17}$$

в данном случае она оказывается гауссовой функцией с полушириной

$$\frac{\overline{\omega}\,\overline{v}}{c}. \tag{22.18}$$

Вычисление степени когерентности в этом случае приводит к соотношению (см. упражнение 23)

$$\gamma(\tau) = \exp\left[-\left(\frac{\tau}{\overline{\tau}}\right)^2\right], \quad \overline{\tau} = \frac{2c}{\overline{v}\,\overline{\omega}}. \tag{22.19}$$

Степень когерентности монотонно уменьшается с ростом τ и при

$$\tau = \overline{\tau} = \frac{2c}{\overline{v}\,\overline{\omega}} = \frac{\lambda}{\pi\overline{v}} \tag{22.20}$$

[1]) Здесь время когерентности и абсолютная температура обозначены одной и той же буквой T, но это не может привести к недоразумению, так как из контекста ясно, о чем идет речь.

оказывается в e раз меньше своего максимального значения. Величина τ играет, следовательно, роль, аналогичную средней длительности цуга. Как и в предыдущей схеме процесса испускания, время когерентности обратно пропорционально полуширине спектральной плотности интенсивности, но коэффициент пропорциональности оказывается иным (в 2 раза больше).

Замечательная особенность рассмотренного (так называемого доплеровского) механизма возникновения немонохроматичности и частичной когерентности состоит в том, что время когерентности определяется только температурой газа, средней частотой излучения и атомным весом. Для газа с атомным весом ≈ 100 и $T \approx 300$ K находим значение длины когерентности

$$L = c\overline{\tau} = \frac{1}{\pi}\,\lambda\frac{c}{v} \approx 21 \text{ см} \quad (\lambda = 0{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ мм}).$$

Разобранные примеры наглядно показывают, насколько чувствителен общий вид функции $\gamma(\tau)$ к особенностям спектральной плотности. Это делает ясным возможность использования кривой видимости для анализа спектрального состава излучения. Впервые такой способ был применен Майкельсоном, и ему удалось установить, что почти все спектральные линии в излучении разреженных газов состоят из нескольких, тесно расположенных компонент, которые не разрешались обычными спектральными приборами.

До сих пор степень когерентности $\gamma(\tau)$ и фаза $\psi(\tau)$ рассматривались как характеристики интерференционной картины, позволяющие, в частности, определять контрастность и положение полос. Можно понимать эти величины в несколько более общем смысле. Дело в том, что световые колебания, складывающиеся в какой-либо точке интерференционной картины, однозначно определяются световыми колебаниями в источнике света: амплитуды колебаний в точках M и S_1, S_2 пропорциональны друг другу, а фазы отличаются на величины $2\pi d_1/\lambda$, $2\pi d_2/\lambda$. Можно сказать поэтому, что $\gamma(\tau)$ и $\psi(\tau)$ представляют собой характеристики световых колебаний, происходящих в источнике в разные моменты времени t и $t+\tau$. В отличие от напряженности поля, которая характеризует состояние световых колебаний в какой-то один момент времени, степень когерентности $\gamma(\tau)$ и фаза $\psi(\tau)$ описывают состояние световых колебаний в два различных момента времени t и $t+\tau$.

В развитие этой точки зрения рассмотрим еще более общую характеристику светового поля, которая описывает состояние световых колебаний в два разных момента времени и в двух разных точках пространства. Выберем две произвольные точки P_1, P_2, в которых совершаются световые колебания

$$\begin{aligned} s_1(P_1,t) &= a_1(P_1,t)\cos\left[\overline{\omega}t + \varphi_1(P_1,t)\right],\\ s_2(P_2,t) &= a_2(P_2,t)\cos\left[\overline{\omega}t + \varphi_2(P_2,t)\right]. \end{aligned} \tag{22.21}$$

Как и ранее, будем полагать амплитуды $a_1(P_1,t)$, $a_2(P_2,t)$ и фазы $\varphi_1(P_1,t)$, $\varphi_2(P_2,t)$ случайными функциями времени. Введем, пока со-

вершенно формально, величины, аналогичные $c(\tau)$, $s(\tau)$:

$$
\begin{aligned}
c_{12}(\tau) &= [\overline{a_1^2(P_1)}\,\overline{a_2^2(P_2)}]^{-1/2}\times \\
&\times\overline{a_1(P_1,t)a_2(P_2,t+\tau)\cos[\varphi_2(P_2,t+\tau)-\varphi_1(P_1,t)]}; \\
s_{12}(\tau) &= [\overline{a_1^2(P_1)}\,\overline{a_2^2(P_2)}]^{-1/2}\times \\
&\times\overline{a_1(P_1,t)a_2(P_2,t+\tau)\sin[\varphi_2(P_2,t+\tau)-\varphi_1(P_1,t)]}
\end{aligned}
\tag{22.22}
$$

и составим из них комбинации, аналогичные $\gamma(\tau)$, $\psi(\tau)$:

$$\gamma_{12}(\tau)=\sqrt{c_{12}^2(\tau)+s_{12}^2(\tau)},\quad \operatorname{tg}\psi_{12}(\tau)=\frac{s_{12}(\tau)}{c_{12}(\tau)}\,. \tag{22.23}$$

Величина $\gamma_{12}(\tau)$ служит, очевидно, мерой способности колебаний $s_1(P_1,t)$ и $s_2(P_2,t)$ к интерференции. Действительно, установим экран с двумя маленькими отверстиями, выделяющими световые волны из точек P_1, P_2 (рис. 4.20). Волны от остальных точек светового поля задерживаются экраном. В результате дифракционных явлений за экраном будут распространяться волны почти во всех направлениях. Следовательно, отверстия вблизи точек P_1, P_2 играют роль источников света, за экраном образуется интерференционная картина, а положение и контрастность интерференционных полос будут определяться величинами $\gamma_{12}(\tau)$, $\psi_{12}(\tau)$, если под τ понимать время $(d_2-d_1)/c$, на которое волна от первого отверстия запаздывает по сравнению с волной от второго. Таким образом, $\gamma_{12}(\tau)$ характеризует способность к интерференции колебаний в точках P_1, P_2 при разности хода $d_2-d_1=c\tau$ или, другими словами, когерентность световых колебаний в точках P_1, P_2 в разные моменты времени, отличающиеся на τ. Для $\gamma_{12}(\tau)$ принято название *степень когерентности световых колебаний в точках* P_1, P_2 или, просто, степень когерентности.

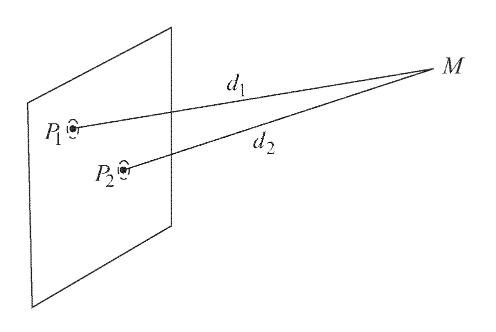


Рис. 4.20. К интерпретации степени когерентности $\gamma_{12}(\tau)$ световых колебаний в точках P_1 и P_2

Точки P_1, P_2 были выбраны произвольно; в частности, они могут совпадать. В этом случае колебания $s_1(P_1,t)$, $s_2(P_1,t+\tau)$ отличаются только моментом времени, когда они совершаются, и говорят о *временно́й когерентности колебаний.* В разобранных выше интерференционных опытах, где в качестве источников света S_1, S_2 выступали два изображения одного точечного источника света, существенна именно временна́я когерентность, поскольку складываются колебания, происходившие в разные моменты времени, но в одном и том же реальном точечном источнике света.

Если считать моменты времени t и $t+\tau$ совпадающими ($\tau=0$), но точки P_1, P_2 — различными, то $\gamma_{12}(0)$ характеризует когерентность

колебаний, совершающихся в точках P_1, P_2 одновременно. В этом случае говорят о *пространственной когерентности колебаний в точках* P_1, P_2 или, сокращенно, — о *пространственной когерентности.*

Пространственная когерентность играет важную роль в образовании изображения в оптических системах (приборах). Вследствие таутохронизма оптических систем (см. § 20) световые колебания в изображениях различных точек соответствуют одновременным колебаниям в источнике света, т.е. в изображаемом предмете. Вместе с тем, в результате дифракционных явлений и аберраций в каждую точку плоскости изображения приходят волны, испущенные разными точками предмета. Если предмет самосветящийся, то колебания в разных его точках некогерентны и в изображении можно складывать интенсивности от разных точек предмета, приходящие в данную точку плоскости изображения. Если же предмет несамосветящийся, то разные его точки, вообще говоря, частично когерентны и складывать интенсивности нельзя. Действительно, несамосветящиеся предметы наблюдаются в результате рассеяния волн, падающих на предмет от постороннего источника света. Если им служит точечный источник света, то световые колебания во всех точках освещаемого предмета находятся в строго определенных фазовых соотношениях, т.е. полностью когерентны, и в изображении следует складывать не интенсивности, а амплитуды колебаний, приходящих от разных точек предмета в данную точку плоскости изображений.

Несамосветящимся предметом является, например, препарат, наблюдаемый с помощью микроскопа и освещаемый посторонним источником света (см. § 97), либо щель спектрального аппарата, также освещаемая источником, спектр излучения которого подлежит наблюдению (см. § 100). Наконец, все предметы, наблюдаемые визуально при дневном или искусственном освещении, относятся к разряду несамосветящихся объектов.

В интерференционном опыте Юнга (см. § 16) источниками света служат две щели, освещаемые некоторым источником света, т.е. схема опыта в существенных своих чертах совпадает со схемой рис. 4.20. Если разность хода сравнительно невелика, так что наблюдаются полосы низкого порядка, то контрастность интерференционных полос будет определяться главным образом степенью пространственной когерентности освещения щелей. Аналогично положение и в случае звездного интерферометра Майкельсона (см. § 45), где частичная пространственная когерентность освещения щелей интерферометра служит средством для измерения угловых размеров звезд.

Роль частичной пространственной когерентности во всех перечисленных выше случаях можно понять, рассмотрев следующую упрощенную схему. Пусть различные точки линейного источника света испускают волны с вполне случайными фазами. Будем интересоваться пространственной когерентностью светового поля, создаваемого этим протяженным источником света в точках P_1, P_2. В качестве модели протяженного источника примем совокупность светящихся точек, расположенных эквидистантно на отрезке прямой длиной $2b$ (рис. 4.21) и испускающих волны с равными амплитудами, но с совершенно произвольными фазами (под светящимися точками можно понимать, ради

наглядности, отдельные атомы источника света). Расчет показывает (см. упражнение 24), что степень когерентности колебаний в двух точках P_1, P_2, лежащих на прямой, параллельной источнику света и отстоящих друг от друга на расстояние $2l$, равна

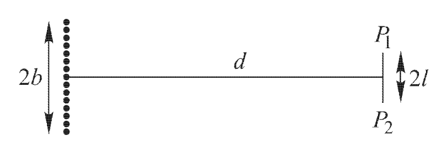


Рис. 4.21. В расчету пространственной когерентности $\gamma_{12}(0)$

$$\gamma_{12}(0) = \left|\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right|, \quad \alpha = \frac{4\pi bl}{\lambda d}, \qquad (22.24)$$

где d — расстояние между источником и точками наблюдения. На рис. 4.22 приведен график зависимости степени когерентности от величины $\alpha = 4\pi bl/\lambda d$. При возрастании α степень когерентности $\gamma_{12}(0)$ сначала уменьшается, затем обращается в нуль при $\alpha = \pi$ и при еще больших значениях α испытывает осцилляции, но не превышает примерно 0,2. Таким образом, неравенство $\alpha < \pi$ можно принять в качестве критерия существования пространственной когерентности.

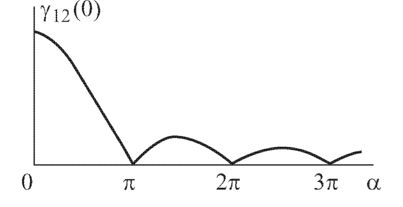


Рис. 4.22. График зависимости степени пространственной когерентности от $\alpha = 4\pi\, bl/\lambda d$ в случае протяженного самосветящегося источника света

Если зафиксировать расстояние $2l$ между точками P_1, P_2, то из требования существования когерентности следует ограничение, налагаемое на размеры источника

$$\theta = \frac{2b}{d} < \frac{\lambda}{2l}\,.$$

Следовательно, угловые размеры θ источника света не должны превышать отношения длины волны к расстоянию $2l$ между точками P_1, P_2. Таким образом, для создания практически когерентного освещения нет необходимости применять строго точечный источник света. Если, например, $\alpha = \pi/4$, то $\gamma_{12}(0) = 0{,}90$, т.е. степень когерентности всего на 10 % хуже, чем при строго точечном источнике света.

Пусть теперь зафиксированы угловые размеры источника света. Тогда условие $\alpha < \pi$ определит расстояния $2l_{\text{ког}}$, при которых и следует принимать во внимание частичную когерентность колебаний в точках P_1, P_2. Совокупность точек, отстоящих друг от друга не далее чем на $2l_{\text{ког}}$, называют *областью когерентности*. Учитывая соотношение (22.24), из условия $\alpha < \pi$ находим

$$2l < 2l_{\text{ког}} = \frac{\lambda}{\theta}\,.$$

Если освещение происходит прямым светом от Солнца, угловые размеры которого $\theta = 30' = 0{,}9\cdot 10^{-2}$ рад, то размеры области когерентности составят $1{,}1\cdot 10^2\lambda = 0{,}06$ мм (для $\lambda = 0{,}55\cdot 10^{-3}$ мм). В отношении опыта Юнга (при использовании Солнца в качестве источника света) из приведенного расчета следует, что щели S_1, S_2 (см. рис. 4.10) следует располагать на расстоянии, меньшем 0,06 мм, а для наблюдения

отчетливых интерференционных полос с видимостью, например 0,90, нужно брать $2l = 0{,}015$ мм.

Если освещение объекта наблюдения происходит не за счет прямого солнечного света, а за счет света, рассеянного на окружающих предметах или на облаках, то отдельные точки этих предметов можно считать источниками некогерентных волн (так как область когерентности для них имеет размеры 0,06 мм) и использовать модель некогерентного протяженного источника и в данном случае. При всестороннем освещении объекта следует считать $\theta \approx 1$, и для размеров области когерентности имеем $2l_{\text{ког}} \approx \lambda$.

Разрешающая способность глаза человека при наблюдении на расстоянии 250 мм (так называемое расстояние наилучшего зрения) составляет приблизительно 0,1 мм. Два маленьких предмета, находящиеся на таком расстоянии и освещаемые даже прямым солнечным светом, можно считать практически некогерентными источниками. Тем более это относится к всестороннему освещению. Таким образом, при наблюдении невооруженным глазом в естественных условиях можно не принимать во внимание частичной когерентности волн, попадающих в глаз от различных точек предметов. Напротив, при наблюдении с помощью микроскопа, обладающего разрешением порядка длины волны, учет частичной когерентности освещения объекта, как правило, необходим.

Обсуждаемый критерий пространственной когерентности был выведен для идеализированного простого случая линейного источника света, состоящего из эквидистантно расположенных светящихся точек. Нетрудно увидеть, однако, что в качественной форме этот критерий останется в силе и для любого протяженного источника света, состоящего из произвольно расположенных светящихся точек. Для того чтобы убедиться в справедливости сказанного, перенумеруем светящиеся точки индексом j и запишем колебание s_{1j}, создаваемое j-м источником в точке наблюдения:

$$s_{1j} = a_j \cos\left(\omega t - \frac{2\pi d_1}{\lambda} + \varphi_j\right),$$

где a_j и φ_j — амплитуды и фазы, характеризующие j-й точечный источник света, и d_{1j} — расстояние от него до точки P_1. Колебание s_1, создаваемое в точке P_1 всем протяженным источником, есть сумма всех колебаний s_{1j}:

$$s_1 = \sum_j s_{1j}.$$

Амплитуды a_j и фазы φ_j представляют собой случайные величины, но для каждой конкретной совокупности a_j, φ_j, d_{1j} суммарное колебание имеет какое-то определенное значение амплитуды и фазы. Если сместиться из точки P_1 в точку P_2, то фазы суммируемых колебаний изменятся в результате того, что расстояние d_{2j} до точки P_2 отличается от d_{1j} и суммарное колебание будет иметь амплитуду, отличную от амплитуды в точке P_1. Амплитуды суммарного колебания в точках P_1 и P_2 будут различаться заметным образом лишь при достаточно больших расстояниях $2l$ между P_1 и P_2, когда разности $d_{2j} - d_{1j}$ длин путей, вычисленные для разных точечных источников,

будут различаться по меньшей мере на величину порядка длины волны. В противном случае фазы всех парциальных колебаний изменятся практически на одинаковую величину и амплитуда результирующего колебания останется прежней. С помощью простых выкладок, аналогичных сделанным в § 15, находим, что расстояние $2l$ между точками P_1, P_2 должно удовлетворять неравенству

$$\frac{2l \cdot 2b}{d} > \lambda.$$

Но это условие совпадает с условием практической некогерентности колебаний в точках P_1 и P_2. Обратный знак неравенства

$$2l < \frac{\lambda d}{2b} = 2l_{\text{ког}} \qquad (22.25)$$

будет означать практическую когерентность колебаний в точках P_1, P_2, т.е. определяет размеры области когерентности. Таким образом, неравенство (22.25) есть универсальный критерий пространственной когерентности, применимый к произвольным протяженным источникам света. Тем самым можно оправдать проведенное выше обсуждение конкретных примеров освещения (солнечным светом и т.д.).

Следует иметь в виду, что степень когерентности и размер области когерентности суть усредненные характеристики случайного светового поля. В каждой конкретной реализации случайных фаз и амплитуд на поверхности протяженного источника света мы будем иметь вполне конкретное распределение освещенности по экрану, где проводится наблюдение, но это распределение будет нерегулярно. На рис. 4.23 приведены фотографии (позитивы) освещенности, созданной на фотопленке протяженным источником света, в качестве которого служило хорошо матированное стекло, освещенное излучением гелий-неонового лазера, причем для рис. 4.23 *а–в* освещенная область представляла собой кружок с диаметром около $2b = 0{,}3$ мм. Освещенность фотопленки имеет характерную нерегулярную «зернистую» структуру, причем размер пятен или «зерен» увеличивается пропорционально расстоянию d.

Вследствие нерегулярных неоднородностей матового стекла пространственно когерентная лазерная волна приобретает приращения фазы, случайным образом изменяющиеся от точки к точке источника. Поэтому рассеянный свет хорошо моделирует излучение протяженного самосветящегося источника, и результаты опыта с матовым стеклом можно сопоставлять с проведенным выше расчетом.

Участки фотографий с повышенным значением освещенности отвечают, очевидно, тому, что волны, приходящие в них из различных точек матового стекла, оказываются, по случайным обстоятельствам, преимущественно синфазными. Наоборот, в участках с пониженной освещенностью происходит взаимное гашение волн, приходящих из разных точек матового стекла. Для того чтобы степень синфазности этих волн существенно изменилась, нужно сместиться в плоскости фотопленки на некоторое расстояние; его среднее значение и будет определять размер области когерентности. Таким образом, «среднее зерно» есть область когерентности, и средний его размер есть размер области когерентности. Изменение размера зерен с изменением

расстояния d между матовым стеклом и фотопленкой согласуется с расчетом, ибо размер области когерентности $l_{\text{ког}}$ пропорционален d.

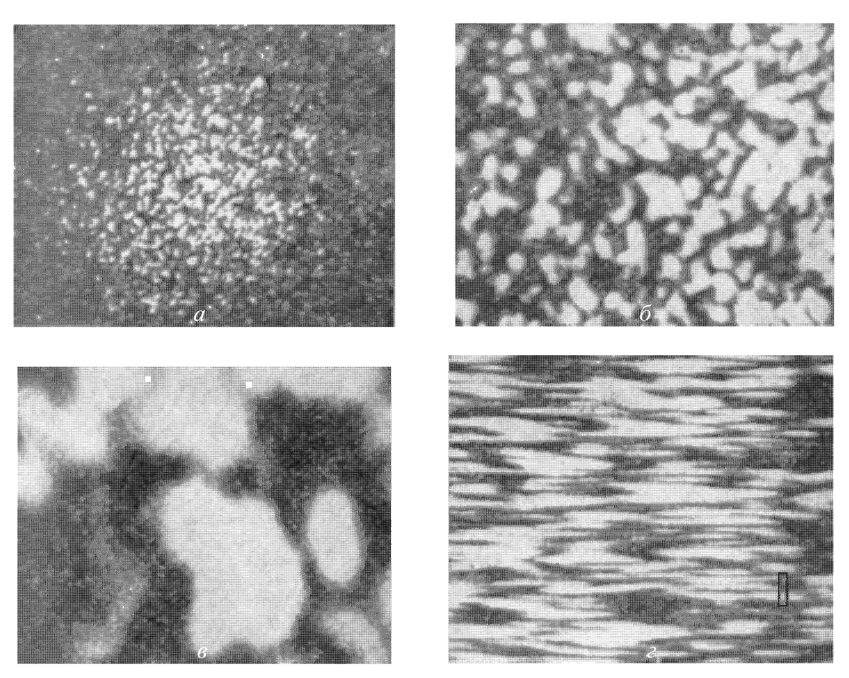


Рис. 4.23. Фотография случайного распределения освещенности, создаваемой протяженным источником света (матовое стекло), при расстояниях от источника до фотопленки d, равных 10 см (*а*), 30 см (*б*), 100 см (*в*). Случай *г* соответствует вытянутому источнику, показанному прямоугольником

Фотография, приведенная на рис. 4.23 *г*, получена при $d = 100$ см, но на матовом стекле был освещен участок примерно прямоугольной формы с размерами $0{,}2 \times 1$ мм^2, ориентированный так, как показано на фотографии (излучение лазера фокусировалось цилиндрической линзой). Как мы видим, размеры области когерентности в вертикальном и горизонтальном направлениях сильно различаются и находятся в обратной пропорции с соответствующими размерами источника излучения. Этот факт согласуется с результатами расчета, согласно которым $2l_{\text{ког}} \approx l/\theta = \lambda d/2b$.

Важное отличие матового стекла от самосветящегося источника света состоит в следующем: фазовые соотношения между световыми колебаниями в разных точках матового стекла нерегулярны, но неизменны во времени. Поэтому зернистая структура освещенности экрана также постоянна во времени. В случае же самосветящегося источника разность фаз колебаний в двух каких-либо точках его поверхности будет быстро изменяться, что приведет, очевидно, к хаотическому движению зерен и исчезновению зернистой структуры

при экспонировании в течение достаточно большого интервала времени. Поэтому при использовании самосветящихся объектов в обычных условиях, с инерционными приемниками излучения, мы не наблюдаем зернистой структуры. Можно сказать, что фотографии, полученные с помощью матового стекла, отвечают мгновенному распределению освещенности, возникающей в случае самосветящихся источников.

До сих пор мы рассматривали интерференционные опыты, в которых измеряется интенсивность света в зависимости от разности хода (или времени задержки) между двумя интерферирующими пучками. Результаты этих опытов, как было выяснено, можно описать степенью когерентности $\gamma_{12}(\tau)$, которая характеризует степень согласованности, или *корреляции*, существующую между колебаниями s_1 и s_2. Поэтому $\gamma_{12}(\tau)$ называют и *функцией корреляции.*

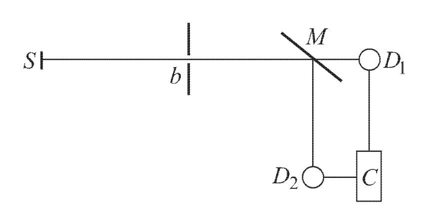


Рис. 4.24. Схема опыта для измерения корреляции интенсивностей

Возможны опыты несколько иного типа, в которых, однако, также проявляются корреляционные свойства световых пучков. Сущность дела можно понять из схемы опыта, изображенной на рис. 4.24 (Браун и Твисс, 1956 г.). Свет от источника S проходит через малое отверстие b (размером меньше размера области когерентности), разделяется на два пучка полупрозрачным зеркалом M и попадает на приемники света D_1 и D_2. Фототоки, возникающие в D_1, D_2, перемножаются радиотехническими методами в корреляторе C, и их произведение усредняется. Передвигая один из приемников и вводя тем самым задержку между двумя пучками, можно измерить величину

$$G(\tau) = \frac{1}{I^2}\,\frac{1}{t}\int\limits_0^t I(t')I(t'+\tau)\,dt' \tag{22.26}$$

как функцию τ. Задержку τ можно вводить и радиотехническим способом.

Рис. 4.25. График функции $G(\tau)$

Результаты измерений $G(\tau)$ в такого рода опыте схематически представлены на рис. 4.25. Главные особенности графика функции $G(\tau)$ заключаются в существовании более или менее резко выраженного максимума при малых значениях τ и в примерном постоянстве при больших τ.

Отмеченные черты функции $G(\tau)$ можно легко понять, если принять во внимание непостоянство интенсивности пучков $I(t)$ во времени. В противном случае, очевидно, будем иметь $G(\tau) = 1$. В действительности $I(t)$ случайно модулировано во времени, т.е. представляет собой случайную последовательность максимумов и минимумов. При

$\tau = 0$ все максимумы одного сомножителя подынтегральной функции в (22.26) совпадают с максимумами другого, и в результате $G(0)$ имеет повышенное значение. Если время задержки τ достаточно велико, то корреляция между положениями максимумов сомножителей исчезает и величина $G(\tau)$ уменьшается в сравнении с $G(0)$. Таким образом, функция $G(\tau)$ характеризует степень корреляции значений интенсивности в моменты времени t и $t+\tau$ в зависимости от времени задержки τ. Так как интенсивности квадратично зависят от амплитуд поля, функция $G(\tau)$ получила название *корреляционной функции второго порядка.*

Для теоретического вычисления функции $G(\tau)$ воспользуемся моделью амплитудно модулированных волновых цугов, т.е. будем считать, что в течение интервалов времени с длительностью T интенсивность $I(t)$ сохраняет постоянное значение, а по истечении времени T скачком изменяется на случайную величину. Выполняя выкладки по схеме упражнения 21, относящейся к модели амплитудно модулированных цугов, можно получить

$$G(\tau) = \begin{cases} \dfrac{(\overline{I})^2}{\overline{I^2}} + \left[1 - \dfrac{|\tau|}{T}\right]\left[1 - \dfrac{(\overline{I})^2}{\overline{I^2}}\right], & |\tau| \leqslant T, \\ \dfrac{(\overline{I})^2}{\overline{I^2}}\,, & |\tau| \geqslant T. \end{cases} \tag{22.27}$$

Таким образом, главные качественные особенности функции $G(\tau)$ — максимум при малых $|\tau|$ и постоянство при больших $|\tau|$ — правильно передаются выбранной моделью. Как и в случае интерференционных опытов, время корреляции определяется, естественно, длительностью цуга волн T.

Особый интерес представляет относительная величина максимума, расположенного при $\tau = 0$, т.е. отношение

$$g = \frac{G(0)}{G(\infty)} = \frac{\overline{I^2}}{(\overline{I})^2}\,.$$

Предположим, что относительное число цугов с интенсивностью I определялось распределением Рэлея

$$\exp\left(-\frac{I}{\overline{I}}\right).$$

Тогда простые вычисления (см. упражнение 25) приведут к $g = 2$. Для распределения Рэлея характерны относительно небольшие флуктуации интенсивности. Например, значения интенсивности, превышающие среднее значение более чем в два раза, встречаются всего в 14 % случаев. Такое положение, как показывает более глубокий анализ, закономерно для источников, в которых атомы излучают волны независимо друг от друга.

Большие значения величины g означают, что максимальное мгновенное значение интенсивности излучения намного превосходит ее среднюю величину. Например, в некоторых лазерах излучение имеет вид сильных «вспышек», разделенных интервалами времени, существенно превышающими продолжительность самих «вспышек» (см. § 230), и в таком случае $g \gg 1$.

Глава V

СТОЯЧИЕ СВЕТОВЫЕ ВОЛНЫ

§ 23. Образование стоячих волн. Опыты Винера

Как было указано выше, необходимым условием получения устойчивой интерференционной картины является наличие по крайней мере двух накладывающихся друг на друга когерентных волн. Метод получения двух когерентных волн, указанный Френелем, состоит в расщеплении каким-либо приемом падающей волны на две. Простой прием наложения двух когерентных волн, ведущий к весьма интересному и важному случаю интерференции, состоит в отражении волны, падающей нормально на стенку; отраженная волна при этом распространяется через те же участки среды, двигаясь в обратном направлении. Получающаяся при этом интерференционная картина зависит от соотношения фаз обеих волн (падающей и отраженной). Условия интерференции между падающей и отраженной волнами сходны для волн любых типов. Они подробно рассматриваются в курсах механики и акустики. Существенным является то обстоятельство, что в процессе отражения может иметь место изменение фазы волны. Поэтому, если уравнение падающей волны есть

$$s_1 = a\sin(\omega t - kx), \tag{23.1}$$

то для волны, отраженной в точке $x = 0$, имеем

$$s_2 = a\sin(\omega t + kx + \delta), \tag{23.2}$$

где, как обычно, $\omega = 2\pi/T$ и $k = 2\pi/\lambda$. Перемена знака при x соответствует изменению *направления* распространения, а δ означает изменение фазы при отражении. Результирующая волна записывается в виде

$$s = s_1 + s_2 = 2a\cos\left(kx + \frac{\delta}{2}\right)\sin\left(\omega t + \frac{\delta}{2}\right). \tag{23.3}$$

Формула (23.3) показывает, что амплитуда колебаний равна $2a\cos(kx + \delta/2)$, т.е. различна для различных точек среды, меняясь от точки к точке по простому гармоническому закону. Множитель же, выражающий периодическое изменение во времени, $\sin(\omega t + \delta/2)$, не зависит от координаты.

То обстоятельство, что амплитуда выражается гармонической функцией

$$2a\cos\left(kx + \frac{\delta}{2}\right) = 2a\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\delta}{2}\right),$$

показывает, что *знак* амплитуды остается неизменным в пределах полуволны и меняется на противоположный при изменении x на $\lambda/2$, т.е. при переходе от одной полуволны к другой. Другими словами, когда в пределах одной полуволны все s положительны, то в пределах соседней они отрицательны. Если считать амплитуду существенно положительной величиной, как это обычно делается, то указанное обстоятельство можно было бы выразить утверждением, что фаза

колебания остается постоянной в пределах полуволны и меняется на π при переходе от одной полуволны к другой. Такую формулировку можно рассматривать как определение стоячей волны.

Из формулы (23.3) следует, что в стоячей волне имеется ряд точек, которым соответствует амплитуда, равная нулю. Эти точки определяются из условия $kx + \delta/2 = n\pi/2$, где $n = 1, 3, 5, \ldots$ — нечетные числа. Точки эти расположены, очевидно, на расстоянии полуволны одна от другой и называются узловыми точками или *узлами* стоячей волны. Посредине между ними расположены места, соответствующие максимальным значениям амплитуды, а именно, значениям $2a$. Эти точки называются *пучностями*. Они определяются из условия $kx + \delta/2 = n\pi/2$, где $n = 0, 2, 4, \ldots$ — четные числа. Что же касается величины δ, определяющей изменение фазы при отражении, то необходимо иметь в виду следующее обстоятельство. Бегущая волна (электромагнитная, упругая и т.д.) представляет собой совокупность двух волн, соответствующих двум частям, из которых складывается энергия распространяющейся волны (энергия электрическая и магнитная, потенциальная и кинетическая). В бегущей электромагнитной волне направления обоих векторов (**E** и **H**) для каждого момента связаны определенным образом с направлением распространения (**v**), образуя правовинтовую систему (рис. 5.1). Необходимым условием отражения, т.е. изменения направления распространения на противопо- ложное,

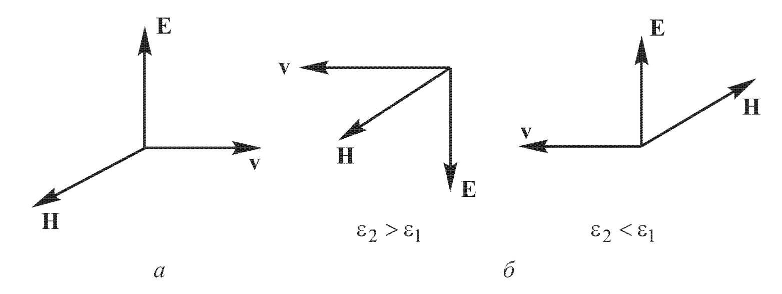


Рис. 5.1. Расположение векторов **E**, **H** и **v** в падающей (*а*) и в отраженной (*б*) волнах

является изменение направления одного из векторов **E** или **H** на противоположное. Действительно, ведь в бегущей волне, образовавшейся в результате отражения, векторы **E**, **H** и **v** вновь должны образовывать правовинтовую систему, а так как при отражении изменилось направление **v**, то один из векторов **E** или **H** также должен скачком переменить свое направление, т.е. получить добавочное изменение фазы на π, или, как говорят, испытать потерю полуволны. В зависимости от условий на границе, где происходит отражение, эта потеря будет иметь место для того или другого вектора. Мы подробнее рассмотрим этот вопрос для электромагнитных (световых) волн в гл. XXIII, пока же ограничимся лишь указанием, что для электромагнитных волн $\delta = 0$ для магнитного вектора и $\delta = \pi$ для электрического вектора, если диэлектрическая проницаемость второй среды ε_2 больше, чем

диэлектрическая проницаемость первой ε_1, т.е. если $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$. Наоборот, при $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ отражение сопровождается потерей полуволны для магнитного вектора, а электрический сохраняет свою фазу неизменной (см. рис. 5.1). Это различие в δ ведет к тому, что узлы одного из векторов совпадают с пучностями другого, что показано на рис. 5.2.

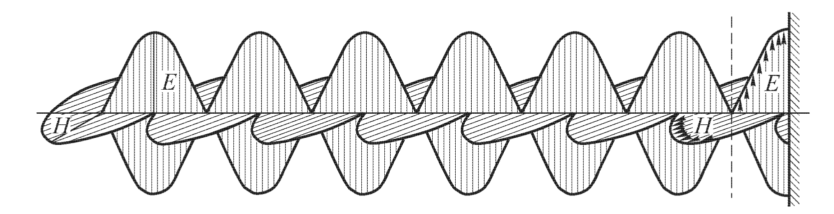


Рис. 5.2. Стоячая электромагнитная волна

Из рассмотрения члена $\sin(\omega t + \delta/2)$ нетрудно видеть, что *моменты* прохождения через максимум вектора **E** и вектора **H** также отличаются друг от друга на четверть периода.

Эти особенности стоячей волны приводят к тому, что в ней мы не имеем непрерывного движения энергии в направлении распространения волны, как в волнах бегущих; энергия стоячей волны локализована и переходит от области пучности **E** (где она имеет форму электрической) к области пучности **H** (т.е. обращается в магнитную) и обратно. Таким образом, вместо течения энергии мы имеем дело с колебаниями ее, сопровождающими переход энергии из одной формы в другую. Это обстоятельство и повело к появлению термина «стоячая волна».

Стоячие волны можно, конечно, наблюдать не только при отражении волн, но и всякий раз, когда навстречу друг другу идут две когерентные волны одинаковой амплитуды. Простейший практический прием реализации этого условия есть отражение волны.

Из изложенного выше следует, что в зависимости от условий опыта можно заранее предвидеть, где расположатся узлы электрического и магнитного векторов. Этим обстоятельством можно воспользоваться, чтобы на опыте решить вопрос о том, какой из двух векторов, составляющих световую волну, электрический или магнитный, производит непосредственное действие на большинство приборов, предназначенных для обнаружения света (глаз, фотографическая пластинка, флуоресцирующий экран, фотоэлемент и т.д.).

Соответствующий опыт для исследования действия света на фотографическую эмульсию был выполнен Винером (1890 г.). Идею Винера легко понять, вообразив следующий опыт. Представим себе слой фотографической эмульсии, налитой на зеркальную металлическую поверхность. Падающий нормально на зеркало сквозь эмульсию монохроматический (приблизительно) свет отражается от металлического зеркала и дает систему стоячих волн, причем ближайший к зеркалу (первый) узел электрического вектора расположится на поверхности зеркала, ибо в случае отражения от металла меняет фазу именно элек-

трический вектор; первый узел магнитного вектора расположится на расстоянии в четверть световой волны от нее. В толще фотографической эмульсии поле световой волны будет представлено системой узлов и пучностей напряженностей электрического и магнитного полей с соответствующими переходами от узлов к пучностям.

Фотографическое действие связано с воздействием электромагнитных сил на бромистое серебро, представляющее собой светочувствительную компоненту фотографической эмульсии. В соответствии со слоистым распределением в пространстве амплитуд напряженностей электрического и магнитного полей разложение бромистого серебра должно произойти также слоями: максимум разложения (почернения пластинки) должен приходиться на слои, соответствующие максимальным значениям этих амплитуд. Если фотографическое действие вызывается электрическим вектором, то, очевидно, на поверхности зеркала разложения бромистого серебра не должно быть и первый черный слой должен образоваться на расстоянии четверти волны от поверхности зеркала и далее через каждые полволны. Если же определяющую роль играет магнитный вектор, то первый слой выделившегося серебра должен лежать в области первой его пучности, т.е. на поверхности зеркала.

Опыт должен состоять в установлении распределения слоев выделившегося серебра в толще эмульсии. Трудность этого наблюдения, связанную с малыми расстояниями между пучностями и узлами, Винер обошел, применив прием «малого наклона», впервые указанный Ньютоном (см. § 26). Система стоячих волн получалась Винером в воздухе при отражении монохроматического света от металлического зеркала. На рис. 5.3, представляющем схему подобного опыта, показано положение очень тонкого (около $\lambda/20$) светочувствительного слоя, образующего малый угол φ с поверхностью зеркала MM. Стеклянная пластинка, на которую нанесен светочувствительный слой, не показана на чертеже. Светочувствительный слой пересекается с плоскостями пучностей той или иной силы по параллельным прямым, след от которых изображен на нашем рисунке в виде черных пятен. Расстояние AB между этими прямыми по *поверхности* пластинки равно, очевидно,

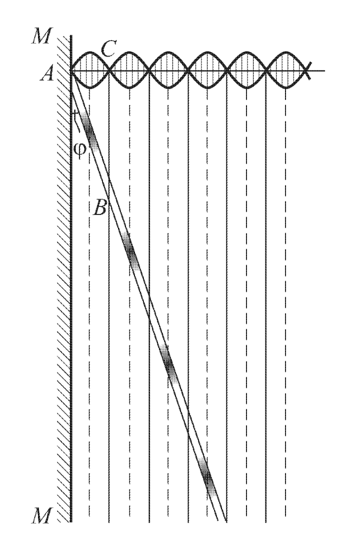


Рис. 5.3. Схема опыта Винара: максимальное выделение серебра происходит в пучности вектора **E**

$$AB = \frac{AC}{\sin\varphi} = \frac{\lambda/2}{\sin\varphi}.$$

Если φ достаточно мало, то расстояние между местами почернения становится достаточно большим. В опытах Винера φ было около $1'$, так что $AB \approx 1$–2 мм. При этих условиях можно заметить, что первая тем-

ная полоса не совпадает с зеркалом, а отстоит от него на четверть волны [1]).

Опыт Винера, позволивший впервые получить стоячие световые волны, показал также, что фотографическое действие световой волны связано с ее электрическим вектором. Позднее Друде и Нернст (1892 г.) повторили опыт Винера, заменив фотографический слой тонкой пленкой флуоресцирующего вещества, и также обнаружили, что максимум действия лежит в областях пучностей электрического вектора. Аналогичный опыт с фотоэлектрическим слоем был осуществлен Айвсом (1933 г.); и в этом случае, как и следовало ожидать, эффект вызывался электрическим вектором.

Результаты всех описанных и аналогичных опытов легко понять, исходя из электронных представлений. Большинство процессов, наблюдаемых в веществе под действием света, связано с его воздействием на электроны: при фотоэффекте происходит вырывание электронов из освещаемого металла; при флуоресценции или фотохимических процессах (фотография, зрительное восприятие) — возбуждение атомов и молекул или их ионизация, т.е. также воздействие на электроны, входящие в состав этих атомов и молекул. Так как электроны представляют собой электрические заряды, то сила, действующая на них, определяется в первую очередь электрическим полем, т.е. электрическим вектором электромагнитной волны. Магнитный вектор играет лишь второстепенную роль, и действие его непосредственно почти не сказывается.

В соответствии с изложенным электрический вектор электромагнитной волны нередко называют *световым* вектором. Когда говорят, что световая волна потеряла при отражении полволны, то имеют в виду именно потерю полуволны световым (электрическим) вектором. Такая потеря имеет, например, место при отражении света, падающего нормально на границу воздух–стекло. Наоборот, на границе стекло–воздух световой (электрический) вектор не испытывает потери полуволны, и стоячие волны образуются вследствие потери полуволны магнитным вектором.

§ 24. Цветная фотография по методу Липпмана

Пользуясь явлением образования стоячих волн внутри фотографической эмульсии, Липпман (1891 г.) предложил следующий метод цветной фотографии. Пластинка с толстым слоем эмульсии располагается так, что эмульсия касается поверхности ртутного зеркала. Изображение спектра проецируется нормально на пластинку, и отразившийся свет, интерферирующий с падающим, образует стоячие волны, причем в пучностях электрического вектора происходит максимальное разложение бромистого серебра (рис. 5.4 — схема опыта, рис. 5.5 — фотография разреза мокрой, сильно набухшей эмульсии). Вся толща эмульсии после обработки оказывается разбитой на ряд

---

[1]) Точные определения положения темных полос выполнялись методом колец Ньютона (см. § 26).

слоев тончайшими прослойками из металлического серебра, расстояние между которыми равно полуволне излучения того цвета, который действовал на данное место пластинки.

Будем теперь рассматривать обработанную таким образом пластинку, направив на нее белый свет под тем же углом, под которым

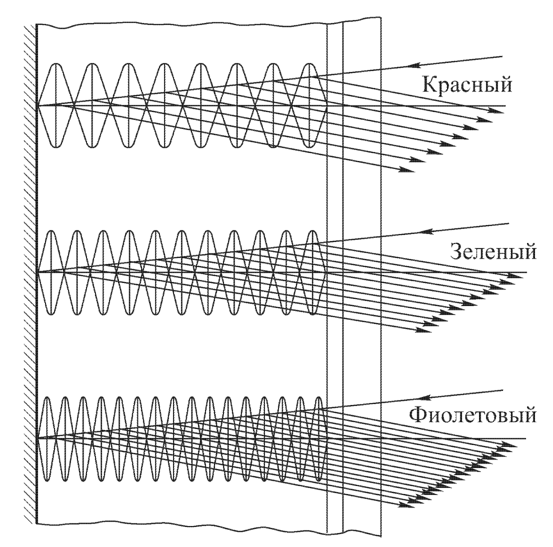


Рис. 5.4. Схема, поясняющая метод цветной фотографии Липпмана

велось освещение. От первой тонкой прослойки серебра отразится небольшое количество света; бо́льшая же часть его проникнет дальше, отразится частично от второй, третьей и т.д. прослоек. Разность хода между всеми отраженными от разных прослоек пучками будет равна двойному расстоянию между прослойками; она равна λ_1 для той области, где прослойки разделены расстояниями $\lambda_1/2$, т.е. где при обработке действовал свет длины волны λ_1. Интерферируя между собой, пучки, отраженные от этой области, дадут максимум для света с длиной волны λ_1. Наоборот, для всякой другой длины волны (λ) найдется такое число слоев m, которое даст разность хода, равную *нечетному* кратному полуволны $\lambda/2$. Соответствующее m определится из условия $m\lambda_1 = (2p+1)\lambda/2$. Таким образом, луч с длиной волны λ, отраженный от первого слоя, будет ослаблен лучом, отраженным от $(m+1)$-го слоя; луч, отраженный от второго слоя, нейтрализуется лучом, отраженным от $(m+2)$-го слоя, и т.д. Следо-

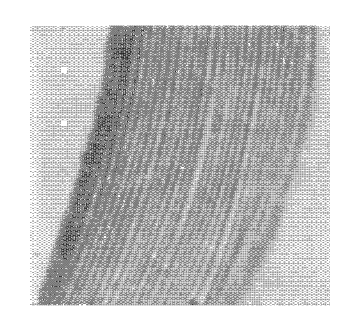


Рис. 5.5. Разрез эмульсии, обработанной по методу Липпмана

вательно, в отраженном свете этот цвет с длиной волны λ будет более или менее исключен. Итак, препарированная по указанному методу пластинка приобретает способность избирательного отражения световых лучей и в отраженном свете будет давать то распределение цветов, которое было применено при ее приготовлении; пластинка дает возможность видеть в отраженном свете изображение в натуральных цветах. Механизм действия пластинки становится особенно ясным, если рассмотреть процесс отражения по методу, изложенному в § 51.

Современное техническое развитие цветной фотографии пошло по иному пути. В нем используется принцип светофильтров, для чего в эмульсию фотопластинки вводятся соответствующие красящие пигменты.

Описанные выше явления получили интересные применения для голографической регистрации изображения (см. § 65).

Глава VI

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ПОЛОС ИНТЕРФЕРЕНЦИИ

§ 25. Цвета тонких пластинок

Как было выяснено в § 17, при точечных источниках света будут наблюдаться резкие интерференционные картины. В таком случае при любом положении экрана, пересекающего систему поверхностей максимумов и минимумов, мы получим отчетливую картину интерференционных полос, которые, следовательно, не имеют определенной области локализации и могут считаться *нелокализованными*. Однако необходимое для этого условие точечности источника осуществляется лишь приближенно, а во многих случаях и совсем не выполняется. Особенно часто нам приходится иметь дело с протяженным источником при явлениях интерференции, наблюдаемых в естественных условиях, когда источником света служит участок неба, т.е. рассеянный дневной свет. Наиболее часто встречающийся и весьма важный случай подобного рода имеет место при освещении тонких прозрачных пленок, когда необходимое для возникновения двух когерентных пучков расщепление световой волны происходит вследствие отражения света передней и задней поверхностями пленки (рис. 6.1).

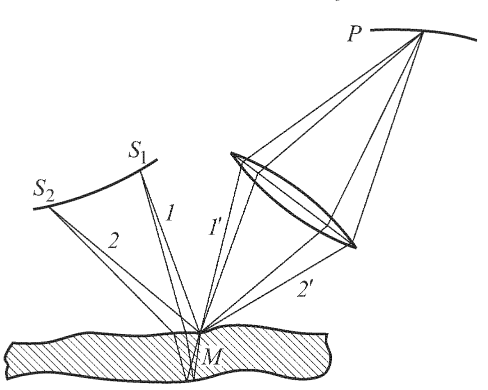


Рис. 6.1. К вопросу об интерференции в тонкой пленке при протяженном источнике света

Явление это, известное под названием *цветов тонких пластинок*, легко наблюдается на мыльных пленках (мыльных пузырях), на тончайших пленках масла (нефти), плавающих на поверхности воды (например, около судов), на пленках прозрачных окислов, нередко присутствующих на поверхности старых стекол ила на металлах (при закалке полированных стальных изделий — так называемые цвета побежалости), и т.д.

Опыт показывает, что в этих случаях видимость интерференционной картины максимальна в определенной и часто весьма ограниченной области пространства вблизи пленок и быстро убывает с увеличением расстояния от их поверхности. В перечисленных выше случаях оказывается, что высокая видимость интерференционной картины, наблюдаемой в отраженном от пленок свете, имеет место лишь в тонком слое, практически совпадающем с поверхностью пленок, хотя отраженные от них световые пучки перекрываются в значительном объеме пространства. Такие интерференционные картины принято называть *локализованными*.

В зависимости от толщины и геометрической формы пленок, а также от условий их освещения область локализации интерференционной картины оказывается более или менее ограниченной и более или менее близкой к поверхности пленок.

На рис. 6.1 была показана принципиальная схема опыта для наблюдения описываемых явлений. Буквой P обозначена фотопластинка или экран, на который проецируется изображение пленки и где наблюдается интерференционная картина. На фотографиях (рисунки 6.2 и 6.3) приведены примеры таких картин. На первой фотографии снята интерференционная картина, полученная в свете, отраженном от двух поверхностей неоднородной по толщине пластины стекла,

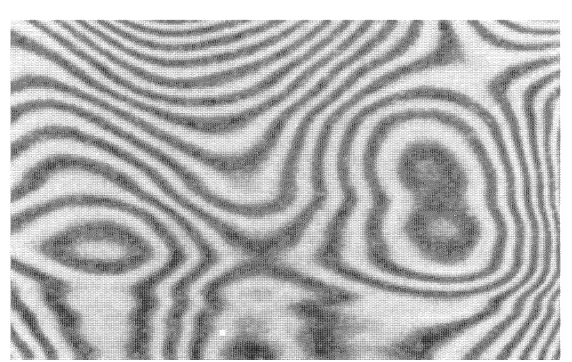


Рис. 6.2. Интерференционная картина, полученная в свете, отраженном от двух поверхностей неоднородной по толщине пластины стекла

освещенной широким источником света. Вторая фотография сделана в свете, отраженном от двух стеклянных плоских поверхностей, ограничивающих тонкий воздушный клин. Клин этот реализован путем наложения друг на друга двух толстых хорошо отполированных

плоскопараллельных стеклянных пластинок. С одной стороны между краями этих пластинок проложена полоска тонкой бумаги. В обоих

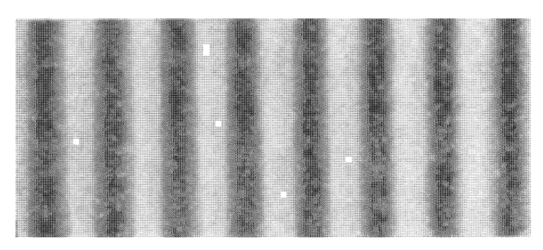


Рис. 6.3. Интерференционные полосы, получающиеся при отражении света от поверхностей клина

случаях освещение пленки и клина ведется световыми пучками от протяженных источников света. Эти световые пучки падают на поверхности освещаемых объектов почти нормально.

При визуальном наблюдении таких интерференционных картин роль линзы исполняет хрусталик глаза, а роль экрана — его сетчатка.

Для того чтобы выяснить условия формирования интерференционной картины вблизи поверхности тонких пленок и причину ее ярко выраженной пространственной локализации, рассмотрим схему подобного опыта в предельно простом варианте.

Пусть на поверхность тонкого прозрачного клина, изготовленного из вещества с показателем преломления n, падают почти нормально световые пучки от протяженного источника света. На рис. 6.4 для наглядности угол падения одного из таких световых пучков увеличен в десятки раз, по сравнению с его действительным значением.

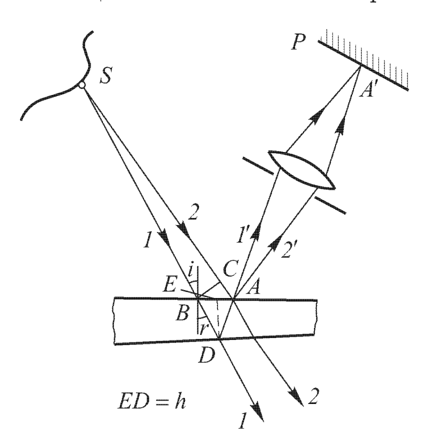


Рис. 6.4. К расчету разности хода при интерференции световых пучков на тонком прозрачном клине

Как было выяснено раньше, когерентными являются световые волны, излучаемые одной точкой источника света. Волны, излучаемые соседними его точками, уже не будут когерентными. Поэтому начнем с расчета интерференции световых пучков, излучаемых одной точкой протяженного источника света. Вычислим в соответствии с установленной на опыте локализацией интерференционной картины разность хода Δ когерентных световых пучков $1'$ и $2'$ в точке A на поверхности клина (см. рис. 6.4). Линза, проецирующая интерференционную картину на экран, этой разности хода уже не изменит, и для световых пучков, сводимых воедино линзой в точке экрана A', она будет

та же, что и в точке A. В ходе расчета, помимо непосредственной геометрической разности хода интерферирующих волн, надо учесть скачок фазы на π, испытываемый волной, характеризуемой лучом *2'*, при отражении от поверхности клина с показателем преломления, бо́льшим показателя преломления окружающего клин воздуха. Имеем

$$\Delta = (BD + DA)\,n - \left(AC - \frac{\lambda}{2}\right), \quad n(BD + DA) = \frac{2hn}{\cos r},$$

$$AC = 2h \operatorname{tg} r \sin i, \quad \frac{\sin i}{\sin r} = n,$$

где $h = ED$ — толщина клина; отсюда

$$\Delta = 2hn\cos r + \frac{\lambda}{2}. \tag{25.1}$$

Полученное значение разности хода Δ является функцией h и r. Относительно угла i, а следовательно и r, уже было сказано при описании постановки опыта, что они малы и изменяются в малых пределах. Здесь следует добавить, что если это не так, то, уменьшая апертуру линзы, проецирующей интерференционную картину на экран, можно уменьшить диапазон вариаций угла r. Если же интерференционная картина наблюдается непосредственно глазом, то такое уменьшение апертуры наблюдения осуществляется, естественно, за счет малых размеров отверстия — зрачка глаза.

Поэтому можно считать, что разность хода Δ оказывается, фактически, функцией только h, т.е. толщины клина в точке A.

Полученный результат заслуживает обсуждения.

Из соотношения (25.1) следует, что при малых вариациях значений углов i (и соответственно r) разность хода Δ световых пучков, излучаемых и другими точками протяженного источника света, будет в точке A приблизительно такой же, как и для рассмотренных пучков *1'* и *2'*. Следовательно, в точке A на поверхности клина (или вблизи нее) интерференционные картины, создаваемые различными парами световых пучков, приходящими от разных точек светящейся поверхности протяженного источника света, будут приблизительно совпадать между собой. Отсюда вытекает высокая видимость интерференционной картины на поверхности клина (или вблизи нее). В других областях пространства над клином будет иметь место беспорядочное наложение различных интерференционных картин и, следовательно, однородная освещенность этих областей пространства. Другими словами, получает объяснение локализация интерференционной картины вблизи поверхности клина.

Если освещать клин точечным источником света, т.е. использовать исключительно когерентное излучение, то легко понять, что схема рассматриваемого опыта будет аналогична схемам интерференционных опытов Френеля и интерференционная картина будет *нелокализованной*.

Таким образом, локализация интерференционной картины в рассматриваемых случаях есть следствие использования протяженных источников света. Можно получить локализованную интерференционную картину от пленок, используя и точечный источник света, но

тогда он должен быть либо отнесен очень далеко от пленки, либо его излучение должно быть коллимировано объективом.

Строгая постановка вопроса о локализации интерференционной картины в этих случаях и ее общее математическое решение принадлежат Майкельсону. Майкельсон показал, что по мере уменьшения клинообразности пленки область локализации интерференционной картины удаляется от пленки.

Из формулы (25.1) для Δ вытекает также разъяснение геометрической конфигурации наблюдаемых интерференционных полос. Именно, из нее следует, что значения Δ одинаковы для всех участков пленки (в нашем случае — клина), где ее толщина h одинакова, если пленка освещена пучком параллельных лучей.

Поскольку разность хода интерферирующих волн определяет амплитуду результирующего колебания и, следовательно, интенсивность в точке пространства, где происходит суперпозиция этих волн, освещенность всех точек интерференционной картины, соответствующих одинаковым толщинам h пленки (клина), будет одинаковой.

Поэтому интерференционные полосы на поверхности пленки (клина) имеют равную освещенность на всех точках поверхности, соответствующих одинаковым толщинам пленки. В случае клина конфигурация интерференционных полос особенно проста. Очевидно, интерференционные полосы параллельны ребру клина, и картина будет периодической (см. рис. 6.3). В общем случае конфигурация интерференционных полос на поверхности пленки будет соответствовать геометрическим местам пленки, в которых она имеет одинаковую толщину.

В случае, изображенном на рис. 6.2, эта конфигурация оказалась весьма прихотливой.

Отсюда происходит название, приписываемое интерференционным полосам подобных картин. Их называют *интерференционными полосами равной толщины* или, короче, *полосами равной толщины*. Нетрудно наблюдать подобную картину, если осуществить тонкую пластинку в виде мыльной пленки, натянутой на вертикально расположенный каркас: под действием силы тяжести пленка принимает вид клина, и полосы равной толщины вырисовываются на поверхности пленки в виде горизонтальных прямых, слегка искаженных местными дефектами пленки.

Изложенное относительно способа наблюдения интерференции в тонкой пластинке при помощи линзы верно и при наблюдении при помощи другой оптической системы, например трубы, или просто невооруженным глазом. Следует только иметь в виду, что при наблюдении глазом мы используем обычно гораздо более узкие пучки, чем при проецировании линзой (диаметр человеческого зрачка — около 3–5 мм). Это означает, что работает небольшой участок источника, поэтому локализация полос на поверхности пластинки не так отчетливо выражена: мы наблюдаем интерференционную картину и при не очень строгой аккомодации глаза на пленку.

В хороших лабораторных условиях при освещении тонких пленок белым светом удается еще наблюдать интерференционные полосы 4–5-го порядка за счет избирательной спектральной чувствительности

человеческого глаза. Следовательно, толщина пленок из веществ с показателем преломления около 1,3 должна составлять приблизительно 1,5–2 длины световой волны.

§ 26. Кольца Ньютона

Особый исторический интерес представляет случай интерференции в тонком воздушном слое, известный под именем *колец Ньютона.* Эта картина наблюдается, когда выпуклая поверхность линзы малой кривизны соприкасается в некоторой точке с плоской поверхностью хорошо отполированной пластинки, так что остающаяся между ними воздушная прослойка постепенно утолщается от точки соприкосновения к краям. Если на систему (приблизительно нормально к поверхности пластинки) падает пучок монохроматического света, то световые волны, отраженные от верхней и нижней границ воздушной прослойки, будут интерферировать между собой. При этом получается следующая картина: в точке соприкосновения наблюдается черное пятно, окруженное рядом концентрических светлых и черных колец убывающей ширины [1]).

Нетрудно рассчитать размеры и положение колец Ньютона, предполагая, что свет падает нормально к поверхности пластинки, так что разность хода, обусловленная толщиной прослойки δ, равна $2\delta n$, где n — показатель преломления вещества прослойки. В случае воздуха n можно считать равным единице. Толщина δ_m, соответствующая m-му кольцу, связана с радиусом этого кольца r_m и радиусом кривизны линзы R соотношением

$$\delta_m = \frac{r_m^2}{2R}$$

(см. упражнение 53).

Принимая во внимание различия в условиях отражения от верхней и нижней поверхностей прослойки (потеря полуволны), найдем

---

[1]) Объяснение образования колец во времена Ньютона представляло большие трудности. Гук видел причину образования колец в наличии двух отраженных пучков разной интенсивности. Ньютон подробно исследовал образование колец и установил зависимость размеров колец от кривизны линзы. Ньютону было ясно, что в указанном эффекте проявляются свойства периодичности света. В связи с этим он ввел понятие «о приступах легкого отражения и легкого прохождения», испытываемых световыми частицами. В этом понятии заключается попытка компромисса между волновыми и корпускулярными представлениями, характерная для воззрений Ньютона. Лишь много позднее (1802 г.) Юнг, введя понятие интерференции, дал объяснение кольцам Ньютона. Юнг объяснил также наличие черного центрального пятна с помощью представления «о потере полуволны» вследствие различия условий отражения (исходя, конечно, из представления об упругих волнах) (1804 г.). Юнг подкрепил свое объяснение опытом, заполнив пространство между пластинкой из флинта (n_3) и линзой из крона (n_1) маслом с показателем преломления n_2, так что $n_3 > n_2 > n_1$, и получив вместо темного пятна светлое.

условие образования m-го темного кольца

$$\Delta_m = 2\delta_m + \frac{\lambda}{2} = (2m+1)\frac{\lambda}{2}, \tag{26.1}$$

или

$$\delta_m = \frac{m\lambda}{2}, \tag{26.2}$$

откуда

$$r_m = \sqrt{m\lambda R}, \tag{26.3}$$

где m — целое число. В частности, $m = 0$ и $r_m = 0$ соответствуют темноте (объяснение центрального темного пятна). Чем больше m, тем меньше различие между радиусами соседних колец, (r_{m+1} и r_m), т.е. тем ближе друг к другу кольца. Измерив r_m и зная m и R, можно из описанного опыта найти длину волны λ. Определения эти довольно точны и легко выполнимы.

Интерференционная картина будет отчетливой при малом δ (тонкая прослойка). Это не препятствует, однако, получению колец заметного радиуса, ибо $r_m = \sqrt{2R\delta}$, а R — радиус кривизны линзы — может быть взят значительным (обычно 100–200 см).

Нетрудно видеть, что условие, облегчающее наблюдение колец Ньютона, состоит в очень малом наклоне поверхности линзы к поверхности пластинки. Подобный прием был много лет спустя применен в опытах Винера. Как уже упоминалось в § 23, в одном из опытов, особенно отчетливо определяющих положение пучностей и узлов по отношению к поверхности пластинки, Винер, пользуясь расположением, данным Ньютоном, получил стоячие волны в пространстве между линзой и пластинкой и наблюдал следы пучностей в виде концентрических колец, подобных кольцам Ньютона.

Если падающий свет — немонохроматический, то разным λ соответствуют разные r_m, т.е. вместо черных и светлых колец мы получим систему цветных колец. Полагая в формуле (26.3) $m = 1$, найдем область, занимаемую кольцами первого порядка, $m = 2$ — кольцами второго порядка и т.д. Нетрудно видеть, что фиолетовый ($\lambda = 400$ нм) максимум второго порядка совпадает с темно-красным ($\lambda = 800$ нм) максимумом первого порядка; на красный максимум второго порядка накладывается фиолетовый максимум четвертого порядка и зеленый ($\lambda = 530$ нм) максимум третьего порядка и т.д. Так как, кроме того, каждое кольцо имеет заметную ширину и в нем осуществляется плавный переход от максимума к минимуму, то даже в пределах первого порядка происходит значительное наложение одних цветов на другие; в еще большей степени это имеет место у высших порядков. В результате такого наложения возникает своеобразное чередование оттенков, совершенно не напоминающее последовательности «радужных цветов».

Понятно, что в проходящем свете наблюдаются оттенки, дополнительные к оттенкам отраженной картины. Однако в проходящем свете видимость интерференционной картины значительно ниже вследствие неравенства амплитуд интерферирующих волн.

Приводим сокращенную таблицу цветов колец Ньютона, наблюдаемых при нормальном падении.

Последовательность цветов в кольцах Ньютона

В отраженном свете	В проходящем свете
1-й порядок	
Черный	Белый
Серо-синий	Коричнево-белый
Зелено-белый	Коричневый
Соломенно-желтый	Темно-фиолетовый
Ярко-желтый	Голубой
Коричнево-желтый	Серовато-голубой
Красновато-оранжевый	Голубовато-зеленый
Темно-красный	Желтовато-зеленый
2-й порядок	
Пурпуровый	Светло-зеленый
Небесно-голубой	Оранжевый
Светло-зеленый	Пурпуровый
Чисто-желтый	Цвета индиго
Темно-фиолетово-красный	Зеленый
3-й порядок	
Светло-синевато-фиолетовый	Желтовато-зеленый
Зеленовато-голубой	Мясного цвета
Блестяще-зеленый	Фиолетовый
Карминово-красный	Чисто-зеленый
Фиолетово-серый	Желтовато-зеленый
и т.д.	

При достаточно больших значениях m наложение цветных картин настолько сложно, что для глаза вся картина становится однообразно белой в соответствии с изложенным в § 21. Рассматривая кольца Ньютона через хороший светофильтр, можно наблюдать картину и для сравнительно больших порядков интерференции, т.е. различать кольца при большом значении m.

§ 27. Интерференция в плоскопараллельных пластинках. Полосы равного наклона

Из соотношения $\Delta = 2hn\cos r$ следует, что для *плоскопараллельной* однородной пластинки (h и n всюду одни и те же) разность хода может меняться только при изменении угла наклона лучей. Если эту пластинку осветить монохроматическим пучком лучей, падающих на нее под *разными* углами (например, сходящимся пучком), то каждому значению r будет соответствовать своя разность хода. Очевидно, что все лучи, соответствующие одному и тому же значению r, т.е. имеющие одинаковый *наклон*, будут давать одну и ту же разность фаз. Таким образом, интерференционные максимумы или минимумы

будут располагаться по *направлениям*, соответствующим одинаковому наклону лучей.

Рисунок 6.5 показывает, что лучи *1* и *2*, отразившиеся от верхней и нижней граней пластинки, будут *параллельны* друг другу, ибо пластинка плоскопараллельна. В соответствии с этим явления интерференции будут наблюдаться только на достаточно большом расстоянии от пластинки (теоретически для идеальной пластинки — в бесконечности). Для их наблюдения *необходимо аккомодировать глаз на бесконечность* или же собрать интерферирующие лучи при помощи линзы.

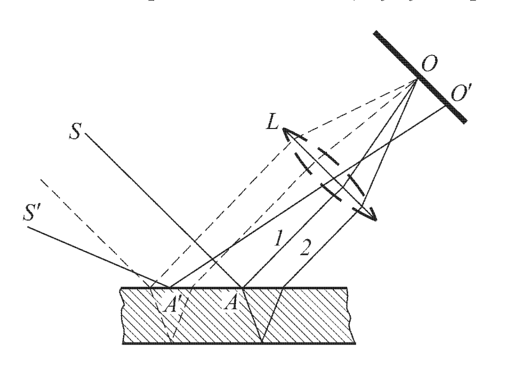


Рис. 6.5. К вопросу о локализации полос интерференции. На экран, расположенный в главной фокальной плоскости линзы L, проецируются полосы равного наклона

Параллельные пучки *1* и *2* соединятся в фокусе O линзы L; в то же место придут и всякие другие лучи, параллельные SA. Поэтому интерференционные полосы будут локализованы в бесконечности. Лучи $S'A'$, наклоненные под иным углом, соберутся в другой точке в фокальной плоскости линзы.

Конфигурация интерференционных полос в фокальной плоскости линзы определяется в этом случае набором углов в световых пучках, падающих на плоскопараллельную пластинку. Если на пластинку падает световой конус с осью, нормальной к пластинке, равномерно заполненный светом (таким будет световой пучок от протяженного источника света), то в фокальной плоскости линзы интерференционные полосы будут иметь форму колец. Каждое кольцо будет соответствовать определенному значению угла преломления r и, следовательно, определенному углу *падения* световых лучей на стеклянную пластину. Кольцеобразная форма интерференционных полос в фокальной плоскости объектива будет определяться тем, что каждому значению угла раствора i светового конуса будет соответствовать набор разных *азимутов* (от 0 до 2π) световых лучей, формирующих боковую поверхность этого светового конуса. Описанные интерференционные полосы получили название *интерференционных полос равного наклона*.

Удобный способ наблюдать кольца равного наклона в отраженном свете изображен на рис. 6.6, где MM — стеклянная пластинка, пропускающая значительную часть лучей источника S на плоскопараллельную пластинку PP и отражающая часть лучей, идущих обратно от PP в направлении к линзе LL, сводящей отраженные пучки на экран EE, расположенный в фокальной плоскости линзы. Каждая полоса равного наклона есть результат интерференции лучей, идущих от источника практически параллельными пучками. Таким образом, апертура интерференции в этом случае близка к нулю, а следователь-

но, размер источника может быть весьма большим (см. § 17). Этот вывод также легко уяснить из рис. 6.6.

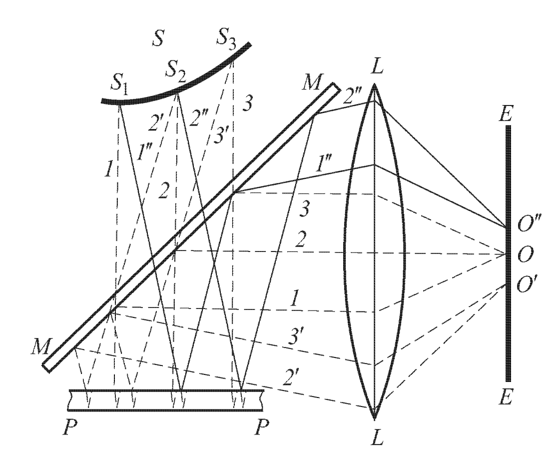


Рис. 6.6. Способ наблюдения колец равного наклона

Лучи, выходящие из разных точек источника S_1, S_2, S_3, ..., не когерентны между собой, и пучок лучей, исходящий из каждой из этих точек, испытав многократные отражения от границ пластинки PP, будет давать на экране свои собственные интерференционные кольца. Однако положение этих колец зависит не от положения светящейся точки на источнике, а только от *наклона лучей*; накладываясь друг на друга, интерференционные картины усиливаются. Так, например, центром всех колец будет точка O, в которой сходятся лучи, упавшие нормально на пластинку PP. Лучи эти, из какой бы точки источника они ни исходили, дают после отражения от пластинки пучок параллельных лучей *1*, *2*, ... и затем собираются линзой в точке O экрана. В фокальной плоскости линзы LL образуется система интерференционных колец с центром O.

Увеличение размеров источника позволяет увеличить общую интенсивность интерференционной картины, сохраняя прежнюю отчетливость и резкость максимумов и минимумов. Конечно, если пластинка PP имеет значительную толщину, то систему колец можно наблюдать только при достаточной морохроматизации света источника, что разъяснено в § 21. При увеличении толщины пластинки расстояние между соседними максимумами, т.е. ширина интерференционных полос, становится меньше. То же будет наблюдаться при переходе к пластинке той же толщины, но с меньшим показателем преломления, например при замене стеклянной пластинки воздушным слоем той же толщины (см. упражнения 26 и 27).

Все эти выводы особенно легко получить, рассматривая точечный источник и определяя расстояние S_1S_2 между изображениями источника в верхней и нижней поверхностях пластинки. Если пластинка не строго плоскопараллельна, и имеет в разных местах не вполне оди-

наковую толщину, то при отражении от разных мест пластинки мы получим несколько различные расстояния S_1S_2. Следовательно, интерференционные полосы, образовавшиеся благодаря отражению от разных мест пластинки, будут иметь несколько различную ширину и, следовательно, вся картина станет менее контрастной, чем при строго плоскопараллельной пластинке.

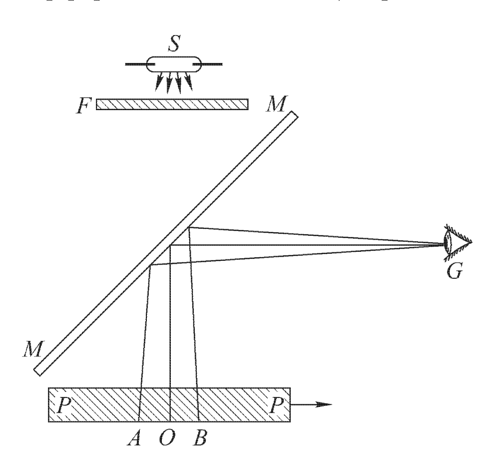


Рис. 6.7. Схема установки для интерференционного метода контроля плоскопараллельности пластины: S — ртутная лампа; F — светофильтр; MM — стеклянная пластинка; PP — испытуемая пластинка; G — глаз наблюдателя

Если полосы равного наклона рассматривать глазом, *аккомодированным на бесконечность*, то благодаря малому размеру зрачка (3–5 мм) в центре поля зрения будет видна система колец, обусловленная действием небольшого участка пластинки AOB (рис. 6.7). При перемещении пластинки будет работать другой ее участок. Если пластинка строго плоскопараллельна, то толщина различных участков одинакова и размеры колец остаются неизменными при перемещении пластинки. В противном случае они меняются, увеличиваясь при переходе к более тонким участкам. Этот прием является одним из наилучших методов контроля плоскопараллельности пластинок. Источником света служит ртутная лампа; выделяя с помощью светофильтра одну из линий спектра этой лампы, обычно зеленую, получаем монохроматический источник ($\Delta\lambda \approx 0{,}01$ нм), позволяющий исследовать пластинки значительной толщины.

Глава VII

ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫЕ ПРИБОРЫ И ПРИМЕНЕНИЯ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ

§ 28. Интерферометр Жамена

Рассмотрим теперь прибор, существенная часть которого состоит из двух идентичных плоскопараллельных пластинок толщины h с показателем преломления n (рис. 7.1).

При падении пучка света на первую пластинку часть лучей отразится от передней грани пластинки, а часть, преломившись, отразится от задней грани; таким образом, из первой пластинки выйдут два пуч-

ка, идущих на некотором расстоянии друг от друга; каждый пучок, попадая на вторую пластинку, опять раздвоится, и из второй пластинки выйдут уже четыре пучка, но так, что второй и третий наложатся друг на друга. Разность хода в них равна (см. § 25)

$$\Delta = 2hn\cos r_1 - 2hn\cos r_2 = 2hn(\cos r_1 - \cos r_2). \quad (28.1)$$

Если пластинки установлены параллельно друг другу, т.е. $r_1 = r_2$, то

$$\Delta = 0. \quad (28.2)$$

Если же пластинки составляют некоторый угол, то $\Delta \neq 0$.

Так как r_1 мало отличается от r_2, то, обозначая $r_1 \approx r_2$ через r и $(r_2 - r_1)$ через δr, получим

$$\Delta = 2hn\sin r\,\delta r. \quad (28.3)$$

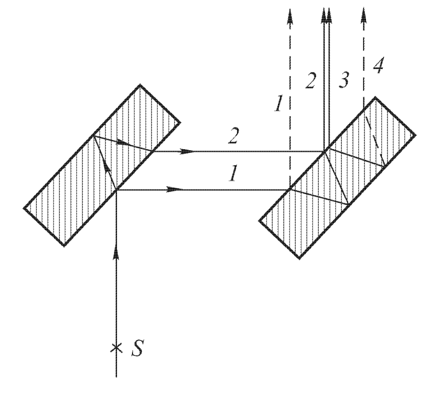


Рис. 7.1. Схема интерферометра Жамена

Вводя вместо угла преломления r и разности $\delta r = r_2 - r_1$ соответствующие величины, выраженные через угол падения i и разность $\delta i = i_2 - i_1 = \varepsilon$, где ε — угол между пластинками, найдем на основании закона преломления $(n\sin r = \sin i)$ $\delta r = \dfrac{\cos i}{n\cos r}\,\delta i$. При обычных условиях, когда $i \approx 45°$ и $n = 1{,}5$, $\delta r \approx \delta i/2 = \varepsilon/2$.

Таким образом, для световых пучков, падающих в плоскости, перпендикулярной к обеим пластинам,

$$\Delta = 2hn\sin r\,\delta r \approx h\varepsilon\sin i, \quad (28.4)$$

где ε — угол между пластинками.

При освещении первой пластинки *параллельным* пучком лучей одной длины волны мы получим более или менее интенсивный свет в зависимости от разности хода Δ выходящих лучей. При освещении белым светом пластинка будет казаться нам равномерно окрашенной. При освещении же *расходящимся* пучком лучей мы увидим в фокальной плоскости объектива, помещенного на пути лучей *2* и *3*, систему интерференционных полос, соответствующих данному r, т.е. полосы равного наклона. Лучи *1* и *4* не попадают в оправу объектива. Мы получим максимум для лучей тех направлений, для которых $\Delta = h\varepsilon\sin i = m\lambda/2$, где m — четные числа. Для направлений, соответствующих нечетным значениям m, будет наблюдаться минимум. Угловое расстояние между полосами определяется изменением угла i на величину Δi, при котором разность хода меняется на λ, т.е.

$$h\varepsilon\cos i\,\Delta i = \lambda \quad \text{или} \quad \Delta i = \frac{\lambda}{h\varepsilon\cos i}\,. \quad (28.5)$$

Отсюда следует, что расстояние между полосами возрастает при увеличении длины волны и при уменьшении угла между пластин-

ками [1]). Разность расстояний между полосами для различных длин волн очень мала для первых порядков интерференции, т.е. для интерференции, соответствующей разности хода в 1, 2, 3, ... полуволны; с увеличением же порядка интерференции эта разница становится уже значительной. Поэтому центральная полоса, соответствующая разности хода 0, кажется нам белой, а соседние места минимумов — черными, т.е. места первых минимумов для всех длин волн (цветов) практически совпадают; полосы же, соответствующие бóльшим разностям хода, представляются цветными, ибо для них минимум для одних длин волн совпадает с максимумом для других. Белую полосу можно наблюдать, когда ребро двугранного угла между пластинками горизонтально.

Прибор, основанный на описанном принципе, носит название интерферометра Жамена и осуществляется в виде двух хороших плоскопараллельных пластинок толстого весьма однородного стекла, смонтированных на массивной плите. Для установки пластинок на параллельность прибор снабжен специальными установочными винтами. Наблюдение интерференционной картины ведется в зрительную трубу, сфокусированную на бесконечность. Пластинки интерферометра Жамена обычно располагают почти параллельно, так что наблюдаются широкие интерференционные полосы. Сами пластинки делаются толстыми (20 мм и более) с тем, чтобы по возможности далеко разделить пучки *1* и *2* и тем обеспечить возможность изменять условия на пути одного из лучей, не задевая другого (см. ниже). Можно заменить каждую из толстых пластинок двумя тонкими пластинками, отражающие поверхности которых металлизированы. Пластинки эти располагаются на местах передней и задней поверхностей толстой пластины. Передняя пластинка покрывается полупрозрачным слоем металла, задняя — плотным, хорошо отражающим слоем. Другими словами, получается «толстая пластина воздуха». Такая схема была применена Д.С. Рождественским с целью раздвинуть интерферирующие световые пучки. Другим преимуществом подобной схемы является уменьшение поглощения ультрафиолетового излучения.

Изготовляя тонкие пластинки из кварца или флюорита, можно получить интерферометр, пригодный для измерений в далекой ультрафиолетовой области.

Для того чтобы иметь возможность скомпенсировать значительную разность хода, которая может получиться вследствие различий в трубках, помещаемых на пути двух лучей, в приборе Жамена применяют компенсатор, состоящий из двух одинаковых стеклянных пластинок, причем наклон одной из них можно плавно изменять. Его изменение позволяет очень тонко и плавно компенсировать разность хода обоих пучков в толще пластинок.

Поместим на пути одного из лучей интерферометра Жамена слой какого-либо вещества с показателем преломления иным, чем у окру-

[1]) Если при вычислении Δi вместо соотношения (28.4) использовать более точное (28.3), то Δi оказывается примерно в 4 раза больше, чем в (28.5), однако зависимость от h и ε остается прежней.

жающего воздуха, например тонкую пластинку стекла или слюды или столб какого-либо газа. Пусть толщина внесенного слоя равна l и показатель преломления n_2, а показатель преломления воздуха равен n_1. Тогда разность хода между интерферирующими лучами в приборе изменится на $n_2 l - n_1 l = l(n_2 - n_1)$.

Если внесенная разность хода, выраженная в длинах волн λ исследуемого монохроматического света, равна $m\lambda$, то вся интерференционная картина сместится на m полос, где m может быть и дробным числом [1]. Измерив это смещение, мы определим значение m. Опыт показывает, что смещение на $1/10$ полосы ($m = 1/10$) наблюдается вполне уверенно и без труда.

Пользуясь соотношением $l\,(n_2 - n_1) = m\lambda$ и определив m, можно вычислить $\Delta n = n_2 - n_1$ — изменение показателя преломления вещества при сделанной замене. Толщину слоя l можно сделать довольно значительной (например, 10 см), так что при $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см $= 5000$ Å наблюдаемое изменение Δn удается довести до одной полумиллионной. В специальных установках наблюдались гораздо меньшие изменения показателя преломления.

Таким образом, интерферометр Жамена можно использовать для определения ничтожного изменения показателя преломления, например при изменении температуры газа или прибавлении посторонних примесей. В соответствии с этим его нередко называют *интерференционным рефрактометром*. Как показано выше, он крайне чувствителен к незначительным изменениям показателя преломления. Однако определение абсолютного значения самого показателя преломления при помощи этого прибора довольно затруднительно. Обычно его применяют таким образом, что сравнивают интересующий нас газ с каким-либо хорошо изученным газом, например, воздухом.

§ 29. Интерферометр Майкельсона

Существуют весьма многочисленные устройства, осуществляющие расположения, необходимые для получения интерференционных картин. Одним из приборов такого рода является интерферометр Майкельсона, сыгравший громадную роль в истории науки.

Основная схема интерферометра Майкельсона изображена на рис. 7.2. Пучок от источника L падает на пластинку P_1, покрытую тонким слоем серебра или алюминия. Луч AB, прошедший через пластинку P_1, отражается от зеркала S_1 и, попадая опять на пластинку P_1, частично проходит через нее, а частично отражается по направлению AO. Луч AC отражается от зеркала S_2 и, попадая на пластинку P_1, частично проходит также по направлению AO. Так как обе волны *1* и *2*, распространяющиеся по направлению AO, представляют собой расчлененную волну, исходящую из источника L, то они когерентны между собой и могут интерферировать друг с другом. Так как луч *2* пересекает пластинку P_1 три раза, а луч *1* — один раз, то на его пу-

[1]) Число m определяют, наблюдая интерференционные картины в белом свете до и после внесения в интерферометр пластинок слюды или стекла.

ти поставлена пластинка P_2, идентичная P_1, чтобы скомпенсировать добавочную разность хода, существенную при работе с белым светом.

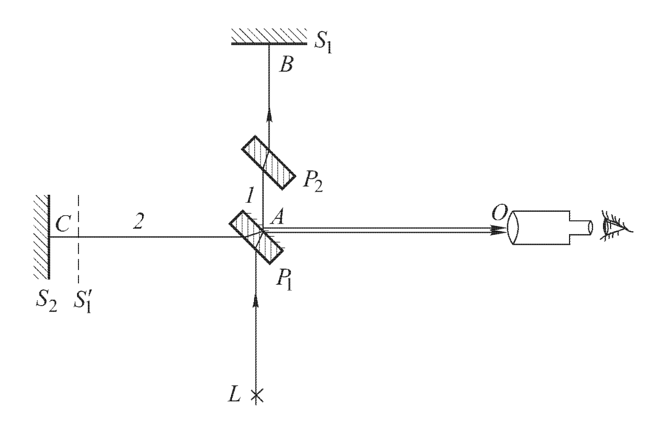


Рис. 7.2. Схема интерферометра Майкельсона: S_1 и S_2 — зеркала; P_1 — разделительная пластинка; P_2 — компенсационная пластинка

Наблюдаемая интерференционная картина будет, очевидно, соответствовать интерференции в воздушном слое, образованном зеркалом S_2 и мнимым изображением S_1' зеркала S_1 в пластинке P_1. Если S_1 и S_2 расположены так, что упомянутый воздушный слой плоскопараллелен, то получающаяся интерференционная картина представится полосами равного наклона (круговыми кольцами), локализованными в бесконечности, и следовательно, наблюдение их возможно глазом, аккомодированным на бесконечность (или трубой, установленной на бесконечность, или на экране, расположенном в фокальной плоскости линзы).

Конечно, можно пользоваться и протяженным источником света (см. § 17). При малой толщине воздушного слоя в поле зрения зрительной трубы наблюдаются редкие интерференционные кольца большого диаметра. При большой толщине воздушного слоя, т.е. большой разности длин плеч интерферометра, наблюдаются частые интерференционные кольца малого диаметра уже около центра картины. Угловой диаметр колец в зависимости от разности длин плеч интерферометра и порядка интерференции определяется из соотношения $2d\cos r = m\lambda$. Очевидно, что перемещение зеркала на четверть длины волны будет соответствовать при малых значениях угла r переходу в поле зрения светлого кольца на место темного, и наоборот, темного на место светлого.

Передвижение зеркала осуществляется при помощи микрометрического винта, перемещающего зеркало на специальных салазках. Так как в больших интерферометрах Майкельсона перемещение зеркала параллельно самому себе должно происходить на несколько десятков сантиметров, то понятно, что механические качества этого прибора должны быть исключительно высоки.

Для придания зеркалам правильного положения они снабжены установочными винтами. Нередко зеркала устанавливают таким образом, что эквивалентный воздушный слой имеет вид клина. В таком случае наблюдаются интерференционные полосы равной толщины, располагающиеся параллельно ребру воздушного клина [1]). При больших расстояниях между зеркалами разность хода между интерферирующими лучами может достигать огромных значений (свыше $10^6\lambda$), так что будут наблюдаться полосы миллионного порядка.

Понятно, что в этом случае необходимы источники света очень высокой степени монохроматичности. В.П. Линник сконструировал «микроинтерферометр», представляющий собой маленький интерферометр Майкельсона, надевающийся на обычный микроскоп. Этот прибор позволяет наблюдать и измерять мельчайшие неровности поверхности и может служить для исследования качества поверхности.

§ 30. Интерференционные приборы с многократно разделенными световыми пучками

До сих пор мы имели дело только с двумя интерферирующими лучами, когда встречались только две волны с некоторой разностью фаз.

Однако в случае плоскопараллельной пластинки следует принять во внимание многократное отражение света от ее поверхности, ибо и все вторичные когерентные пучки окажутся параллельными друг другу и будут интерферировать, давая полосы равного наклона, локализованные в бесконечности.

Разность хода двух соседних вышедших из пластинки пучков равна $2dn\cos r$, где d — толщина пластинки, n — показатель преломления вещества пластинки и r — угол преломления.

Так как d и n — постоянные, то, очевидно, наблюдаемые полосы соответствуют заданному значению r, а следовательно, и i, т.е. являются полосами равного наклона.

Конечно, следует принять во внимание, что интенсивности пучков 1, 2, 3, ... неодинаковы. Действительно, пусть, например, коэффициент отражения равен 0,05, т.е. только 5 % падающего света отражается, а 95 % проходит. В таком случае интенсивность пучка 1 будет составлять 5 % от интенсивности падающего, интенсивность пучка 2 — 4,5 %, а интенсивность пучка 3 — всего лишь около 0,01 %. Другими словами, третий и следующие пучки практически отсутствуют. В зависимости от значения коэффициента отражения число лучей, интенсивность которых еще достаточно велика (число эффективных лучей), возрастает и, следовательно, в образовании интерференционной картины активное участие принимает тем большее число лучей, чем больше коэффициент отражения.

[1]) В этом случае интерференционные полосы локализуются, конечно, не в бесконечности, см. § 25.

Интенсивность результирующего пучка зависит от разности фаз между соседними пучками, равной

$$\psi = \frac{2\pi}{\lambda}\, 2dn\cos r.$$

Если R обозначает коэффициент отражения, т.е. долю интенсивности отраженного пучка от интенсивности падающего, а T — коэффициент пропускания, то распределение интенсивности в полосах выразится в зависимости от ψ формулой

$$I = \frac{T^2}{(1-R)^2}\,\frac{I_0}{1+[4R/(1-R)^2]\sin^2(\psi/2)} \tag{30.1}$$

(см. упражнение 47), причем интенсивность падающего на интерферометр света равна I_0. Так как $\sin^2\psi/2$ меняется от 0 до 1, то интенсивность меняется непрерывно от $I_{\max} = \dfrac{T^2 I_0}{(1-R)^2}$ до $I_{\min} = \dfrac{T^2 I_0}{(1+R)^2}$. Минимум нигде не достигает нуля, и числовое его значение зависит от величины T и R. Если считать отражающий слой непоглощающим, т.е. $T + R = 1$ (в общем случае $T + R + A = 1$, где A — коэффициент поглощения), то $I_{\max} = I_0$, т.е. интенсивность в максимуме равна интенсивности света, падающего на интерферометр, а $I_{\min} = \dfrac{(1-R)^2}{(1+R)^2}\, I_0$,

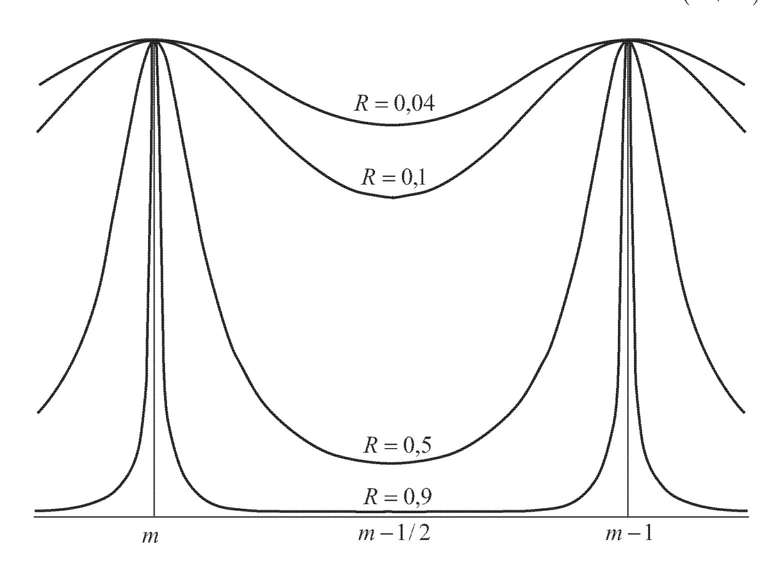


Рис. 7.3. Кривые распределения интенсивности в проходящем свете в зависимости от порядка интерференции m при разных коэффициентах отражения R (коэффициент поглощения A принят равным нулю)

т.е. интенсивность в минимуме тем ближе к нулю, чем коэффициент отражения ближе к 1.

Выразив разность хода в длинах волн ($\Delta = 2dn\cos r = m\lambda$) или разность фаз в долях 2π ($\psi = 2\pi m$, где целая часть от m — порядок интерференционной полосы), найдем, что максимумы интенсивности соответствуют целым значениям m, а минимумы — полуцелым значениям m ($\sin^2\psi/2 = \sin^2\pi m$ обращается в 0 при m целом и в 1 при m полуцелом); промежуточные значения m соответствуют направлениям на участки между максимумами и минимумами. Таким образом, минимум лежит посредине между двумя максимумами.

Рисунок 7.3 показывает графически распределение интенсивности для разных порядков интерференции. Из формулы (30.1) и рис. 7.3 видно, что чем больше R, тем интенсивность в минимумах ближе к нулю и тем резче падение интенсивности вблизи максимумов.

Условия, обеспечивающие интерференцию многих близких по интенсивности пучков, осуществлены в двух приборах.

а. Эталон Фабри–Перо. Этот прибор представляет собой плоскопараллельную пластинку, обычно воздушную. Она образуется между двумя плоскими поверхностями тщательно отшлифованных и отполированных стеклянных или кварцевых пластинок, установленных так, чтобы поверхности, обращенные друг к другу, были строго параллельны (рис. 7.4)[1]. Наружные поверхности обычно составляют небольшой угол с внутренними, с тем чтобы световой блик, отраженный от наружных поверхностей, не мешал наблюдению основной

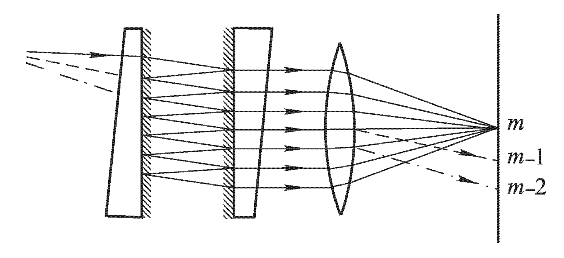


Рис. 7.4. Схематическое представление интерференционного эталона Фабри–Перо

картины. Параллельность установки на определенном расстоянии достигается путем помещения между пластинками инварного[2] кольца. Кольцо это снабжено тремя выступами с каждой стороны, к которым пластинки прижимаются при помощи трех пружин. Выступы подшлифованы так, что зеркала устанавливаются параллельно друг

[1] Подробный расчет показывает, что наличие стеклянных пластинок не влияет на разность хода между соседними лучами, которая оказывается равной $\Delta = 2dn\cos r$ (см. (25.1)), причем обычно можно с достаточным приближением считать показатель преломления воздуха $n = 1$.

[2] Инвар — специальная сталь (содержащая 36,4 % Ni), имеющая при комнатной температуре крайне ничтожный коэффициент термического расширения ($1{,}5 \cdot 10^{-6}$ °C^{-1}). Иногда вместо инвара пользуются кольцами из плавленого кварца с коэффициентом расширения около $5 \cdot 10^{-6}$ °C^{-1}.

другу. Небольшие отступления от параллельности устраняются нажимом соответствующей пружины.

В хороших приборах поверхность пластинок делают плоской с точностью до 1/200 длины волны. Внутренние поверхности пластинок (между которыми заключается слой воздуха) серебрят или покрывают каким-либо другим металлом с целью обеспечить достаточно высокий коэффициент отражения лучей. Интерференционная картина получается в виде колец равного наклона (рис. 7.5), ибо на эталон направляют расходящийся пучок света от широкого источника (на рис. 7.4 представлен ход *одного* из лучей этого пучка). Порядок интерференции определяется расстоянием между пластинками (от 1 до 100 мм, в специальных эталонах — значительно больше, до 1 м). В соответствии с этим наблюдаемые порядки интерференции очень высоки. При $d = 5$ мм $m \approx 20\,000$.

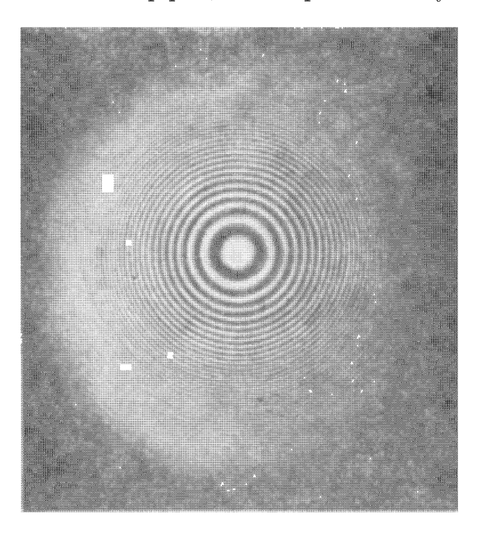


Рис. 7.5. Интерференционная картина (линии равного наклона), наблюдаемая в эталоне Фабри–Перо

Резкость интерференционной картины будет тем значительнее, чем больше коэффициент отражения от металлического слоя (рис. 7.6). Значение $R = 0{,}04$ соответствует поверхности стекла, не покрытой металлом. При современных способах металлического покрытия коэффициент отражения удается довести до $R = 0{,}90 - 0{,}95$. В последнее время осуществляют покрытия, состоящие из нескольких слоев материалов, обеспечивающие коэффициент отражения до 0,99. Обычно значения R несколько зависят от длины волны.

В прежних моделях интерферометр Фабри–Перо снабжался приспособлением, позволяющим менять расстояние между зеркалами. Это осуществляется примерно так же, как и в интерферометре Майкельсона. Само собой разумеется, что в раздвижном интерферометре не удается осуществить той высокой точности, которая возможна с эталонами. Поэтому для точных измерений предпочитают пользоваться набором эталонов с кольцами разной толщины между зеркалами.

Иногда эталон Фабри–Перо осуществляют в виде плоскопараллельной стеклянной пластинки, наружные поверхности которой покрыты отражающим слоем. Такие приборы дешевле и проще в употреблении. Однако они не могут обеспечить такого высокого качества работы, как эталоны с воздушной прослойкой. При использовании эталона предпочитают работать в проходящем свете, где наблюдаются

резкие максимумы на темном фоне; в отраженном свете получаются резкие минимумы, разделенные широкими расплывчатыми максимумами (см. упражнение 48), из-за чего возрастает вредное действие неизбежного рассеянного света [1]).

Важное значение имеет вопрос об интенсивности проходящего через эталон света. По мере роста коэффициента отражения R интенсивность максимумов остается в отсутствие поглощения постоянной и равной интенсивности падающего пучка при любом значении R. Увеличение R крайне важно в том отношении, что оно увеличивает контрастность интерференционной картины, т.е. снижает минимумы при неизменных максимумах. При наличии поглощения интенсивность в максимуме снижается. Формула (30.1) сохраняет свою силу, но при этом $T \neq (1 - R)$ и имеет место равенство $T + R + A = 1$. Выражение для интенсивности в максимуме принимает вид

$$I_{\max} = \frac{T^2 I_0}{(1-R)^2} = \frac{T^2 I_0}{(T+A)^2}\,.$$

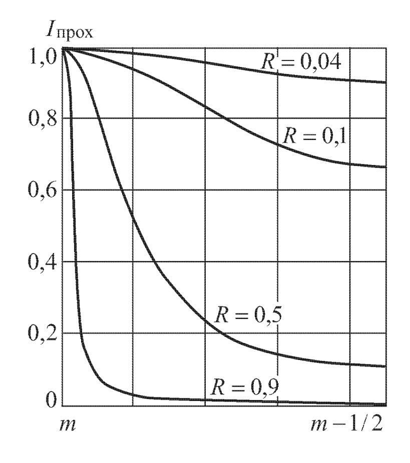


Рис. 7.6. Зависимость интенсивности в полосах интерференции от разности хода при разных значениях R ($I_0 = 1$)

При хорошем и свежем металлическом покрытии можно иметь A не больше 1 %. В таком случае при $R = 90\,\%$, $T = 9\,\%$ $I_{\max}$ составляет 80 % от интенсивности падающего света; при $R = 95\,\%$, $T = 4\,\%$ $I_{\max} \approx 65\,\%$. На практике при металлических покрытиях обычно $I_{\max}$ имеет меньшее значение. При многослойных диэлектрических покрытиях удается получить лучшие значения для $I_{\max}$, чем при металлических покрытиях.

Возможность варьировать в эталоне Фабри–Перо значения R и A, а также толщину воздушной прослойки делает этот прибор крайне гибким инструментом, представляющим большие преимущества по сравнению, например, с пластинкой Люммера–Герке.

б. Пластинка Люммера–Герке представляет собой пластинку из очень однородного стекла, сделанную плоскопараллельной с очень высокой степенью точности. Один конец пластинки срезан или снабжен добавочной призмочкой (рис. 7.7), чтобы обеспечить нормальное падение света на входную грань и, следовательно, уменьшить потери на отражение. Направление падающих лучей подобрано так, чтобы на границе стекло–воздух угол падения был близок

[1]) Специальным подбором отражающих (частично поглощающих) покрытий можно добиться такого положения, когда максимумы в отраженном свете почти столь же резки, как и в обычных приборах в проходящем (Ю.В. Троицкий).

к углу полного внутреннего отражения, но несколько меньше него. При этих условиях свет почти полностью отражается от поверхности

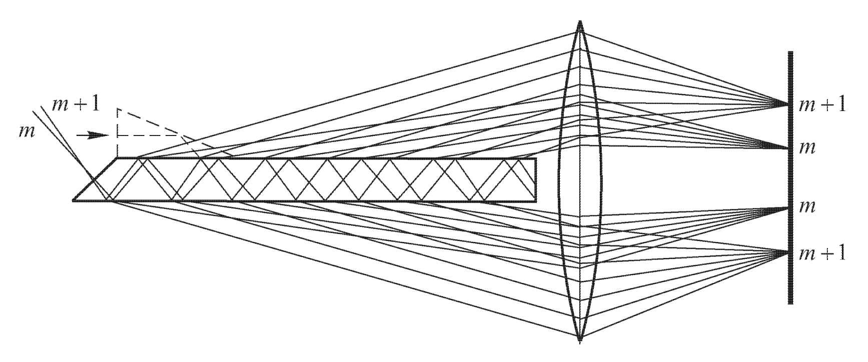


Рис. 7.7. Схема пластинки Люммера–Герке (разница в углах сильно преувеличена)

стекло–воздух и лишь малая часть его выходит из пластинки (через верхнюю или нижнюю стороны ее) по направлению, составляющему очень малый угол с поверхностью пластинки. Благодаря тому, что при каждом отражении свет почти полностью остается внутри пластинки и лишь малые части его выходят из нее, интенсивности последовательных лучей мало отличаются друг от друга. Таким образом, с

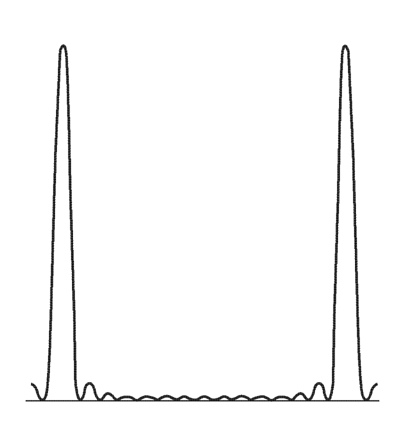


Рис. 7.8. График распределения интенсивности при интерференции многих лучей для пластинки Люммера–Герке

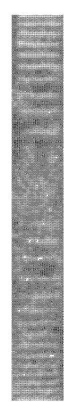


Рис. 7.9. Фотография интерференционной картины, полученной с пластинкой Люммера–Герке

пластинкой Люммера–Герке можно получить до 10–15 близких по интенсивности лучей; при этом, конечно, длина пластинки должна быть довольно значительной (от 10 до 30 см, в зависимости от толщины пластинки).

Если на пластинку Люммера–Герке падает свет от широкого источника, то падающие, а следовательно, и преломленные лучи соответствуют *различным* значениям r. Поэтому мы получим в фокальной плоскости собирающей линзы (или в трубе, установленной на бесконечность) систему полос разного порядка m, $m+1$, $m+2$, ..., соответствующих разным углам r_m, r_{m+1}, r_{m+2}, ..., определенным по формуле $2dn\cos r = m\lambda$. Распределение интенсивности изображается на рис. 7.8. На рис. 7.9 показана фотография интерференционной картины (линии равного наклона), полученной с пластинкой Люммера–Герке и представляющей ряд узких ярких максимумов на темном фоне.

Обычно пластинка Люммера–Герке имеет толщину от 3 до 10 мм, и угол r не очень сильно отличается от $45°$. Таким образом, m есть число, выражаемое десятками тысяч: в пластинке Люммера–Герке наблюдаются интерференционные полосы весьма высокого порядка.

§ 31. Интерференция при большой разности хода

В приборе, подобном интерферометру Майкельсона или эталону Фабри–Перо, мы имеем дело с интерференцией лучей, обладающих огромной разностью хода (около миллиона длин волн). Поэтому для наблюдения интерференции требуется очень большая монохроматичность света. Физическая причина, в силу которой немонохроматический свет не может давать интерференционных картин при большой разности хода, лежит в следующем. Как мы видели в § 4, степень монохроматичности определяется длительностью правильного синусоидального колебания, имеющего место при излучении света. Другими словами, чем больше правильных синусоидальных колебаний с неизменной амплитудой и фазой свершится в атоме раньше, чем прекратится его излучение, тем более монохроматичен испускаемый им свет. Всякий обрыв правильного синусоидального излучения, т.е. обрыв цуга правильных синусоидальных волн, излучаемых атомами, есть уменьшение монохроматичности. Понятно, конечно, что если атом посылает совокупность нескольких десятков тысяч правильных синусоидальных колебаний, а затем излучение его обрывается (другими словами, если излучение это не очень близко к монохроматическому), то интерференция при разности хода в сто тысяч длин волн, очевидно, невозможна: когда подойдет начало (голова) цуга волн, идущих по более длинному оптическому пути, то цуг, следующий по более короткому пути, успеет уже полностью пройти и заменится цугом, посланным другими атомами или при другом акте испускания. Таким образом, когерентность встречающихся цугов не имеет места, и интерференция не происходит.

Очевидно, что чем длиннее цуг, испускаемый атомом, т.е. чем монохроматичнее свет, тем при большей разности хода возможна интерференция. В случае газоразрядных источников света в приборе Майкельсона удавалось наблюдать интерференцию при разности хода около полумиллиона длин волн. Опыты этого рода могут служить для характеристики процессов при излучении атома (см. § 22). Обратно, располагая источником монохроматических волн, можно осуществить

интерференцию при огромной разности хода и таким образом определить длину волны с очень большой точностью. Для некоторых лазерных источников света (гелий-неоновый лазер, например) ширина спектра излучения составляет 10^6-10^4 $с^{-1}$, что позволяет наблюдать интерференцию при разности хода в 10^8-10^{10} длин волн.

Создав источник света, в котором монохроматическое излучение можно весьма хорошо воспроизвести, мы получаем возможность получать воспроизводимый *эталон длины*. Выразив нормальный метр в длинах волн какой-либо линии такого источника, мы можем заменить эталон нормального метра подобным эталонным источником света.

Для того чтобы источник испускал достаточно монохроматическое излучение с хорошо воспроизводимой средней длиной волны, нужно по возможности устранить все причины, возмущающие излучение. Свечение должно вызываться в парах низкого давления во избежание возмущений вследствие соударений атомов и при небольшом разрядном токе для ослабления возмущающего действия электрических полей (эффект Штарка), обусловленных электронами и ионами пара при значительной их концентрации. Наиболее трудно устранить влияние эффекта Доплера (см. § 128), вызванного тепловым движением излучающих атомов, и осложнения, связанные со структурой излучающих атомов. Для ослабления эффекта Доплера желательно иметь в качестве излучателя вещество с атомами возможно большей массы, обладающее необходимой упругостью пара при возможно низкой температуре (см. § 22). Сложность излучаемых линий (так называемая сверхтонкая структура спектральных линий) обусловлена влиянием момента ядра атома на его электронную оболочку. Наличие ядерного момента (спина) связано с четностью или нечетностью атомного веса. Однако природные атомы почти всегда представляют собой смесь изотопов, в связи с чем большинство спектральных линий является совокупностью тесно расположенных компонент.

Успехи ядерной физики сделали возможным искусственное получение отдельных изотопов. Так, при облучении золота нейтронами можно получить стабильный изотоп ртути с четной массой ${}_{80}\mathrm{Hg}^{198}$, который не должен давать сверхтонкой структуры.

Изучение большого числа линий в спектрах излучения ряда веществ привело к выявлению нескольких спектральных линий, имеющих при определенных условиях очень высокую степень монохроматичности и воспроизводимости средней длины волны. В 1960 г. Генеральная конференция по мерам и весам приняла решение о замене метра новым эталоном длины. За основу была выбрана оранжевая линия одного из изотопов криптона (Kr^{86}); после тщательного сравнения длины волны этого излучения с длиной метра по определению принято $1\ \text{м} = 1650763{,}73\lambda_{\text{вак}}\ \mathrm{Kr}^{86}$. Длина волны этого излучения в вакууме $\lambda_{\text{вак}} = 6057{,}8021\cdot10^{-10}$ м. Для так называемого стандартного воздуха (давление 760 мм рт. ст., температура 15 °C, содержание CO_2 0,03 %) длина волны этой линии $\lambda_{\text{возд}} = 6056{,}12525\cdot10^{-10}$ м. Строго определены условия возбуждения эталонного излучения, при которых должен находиться источник света: газоразрядная лампа с

горячим катодом, наполненная изотопом криптона Kr^{86} (чистотой более 99 %) и охлаждаемая до температуры 63 К (тройная точка азота). Оговорены диаметр разрядной трубки, плотность разрядного тока и т.п. Практика показала, что относительная точность воспроизведения эталонной длины волны составляет $1 \cdot 10^{-8}$.

Значения длин волн некоторых особенно хорошо исследованных линий, принятых в качестве вторичных нормалей, даны в табл. 7.1.

Таблица 7.1

Длины волн вторичных нормалей

Элемент	Длина волны, 10^{-10} м (вак.)	Воспроизводимость длины волны
Kr^{86}	6458,0720 6422,8006 5651,1286 4503,6162	$1 \cdot 10^{-8}$
Hg^{198}	5792,2683 5771,1983 5462,2705 4359,5624	$(2–3) \cdot 10^{-8}$
Cd^{114}	6440,2480 5087,2379 4801,2521 4679,4581	$(3–4) \cdot 10^{-8}$

Вторичные нормали получаются путем интерферометрического сравнения с длиной волны эталонной оранжевой линии Kr^{86}. Такое сравнение было выполнено в ряде лабораторий различных стран (СССР, США, Канада и др.), и последняя колонка таблицы дает представление о расхождении результатов проведенных измерений. Монохроматичность излучения некоторых газовых лазеров составляет (в относительной мере) 10^{-10} и даже 10^{-11}, что существенно лучше монохроматичности эталонного излучения (приблизительно 10^{-7}). Однако воспроизводимость длины волны излучения этих лазеров (т.е. степень совпадения длин волн у лазеров, построенных в различных лабораториях) в настоящее время, по-видимому, не превосходит воспроизводимости эталонной длины волны. Можно думать, что усовершенствование лазерной техники и углубленное исследование причин, влияющих на абсолютную величину длины волны их излучения, приведет к переходу на новый, лазерный эталон длины.

§ 32. Некоторые применения интерференционных методов исследования

В настоящее время не только научные, но и технические измерения требуют определения длин с очень большой точностью. В качестве образцов (эталонов) для измерения длин с большой точностью

применяются так называемые *концевые меры*, или *плитки Иогансона*, представляющие собой стальные пластинки различной толщины, противоположные поверхности которых превосходно отполированы и сделаны строго плоскими и параллельными друг другу. Имея набор таких плиток, можно, плотно прижимая (притирая) их друг к другу, составлять комбинации различной длины, определенные с очень большой точностью, о которой дают представление следующие цифры:

Длина концевой меры в мм	1	10	50	100	1000
Допустимые отклонения в мкм	0,1	0,1	0,2	0,3	2

Для достижения такой точности при изготовлении концевых мер и проверки их применяют интерференционные методы. Существует много разновидностей этих методов, сущность которых сводится к осуществлению интерферометра типа Майкельсона или Фабри–Перо, одной из отражающих поверхностей которого является поверхность исследуемой концевой меры, а толщина концевой меры определяет расстояние до второй отражающей поверхности (иногда вводятся еще дополнительные зеркала). Существуют разнообразные интерференционные компараторы этого рода, приспособленные для сравнения длин двух концевых мер или для абсолютного определения их. Компараторы такого рода, применяемые в лучших государственных метрологических лабораториях, позволяют определять меры до 100 мм с ошибкой от 0,010 до 0,005 мкм и меры до 1000 мм с ошибкой от 0,1 до 0,05 мкм.

Интерференционная методика позволяет наряду с точными измерениями расстояний определять также с большей точностью качество полированной поверхности. Чрезвычайно большая точность в изготовлении поверхностей зеркал, линз и призм является необходимым условием создания современных высокосортных оптических инструментов. В лучших оптических системах отклонение этих поверхностей от заданных не должно превышать десятых и даже сотых долей длины волны. Наиболее подходящими методами для испытания качества подобных поверхностей служат интерференционные методы, уже давно получившие широкое распространение в оптико-механической промышленности.

Обычно применение интерференционных методов основано на употреблении образцового эталона, сделанного с большой тщательностью. Накладывая со всеми необходимыми предосторожностями (устранение пылинок, выравнивание температуры) на заданную эталонную поверхность испытуемую (рис. 7.10), мы получаем между этими поверхностями тонкую воздушную прослойку, дающую в отраженном свете отчетливую интерференционную картину. По форме интерференционных полос и их ширине можно судить о недостатках изготовленной поверхности и видеть, какие участки отступают от заданной формы, в какую сторону (выпуклость или вогнутость), и приблизительно оценить величину отступлений. Если несовершенство испытуемой поверхности очень невелико, то интерференционные кольца будут широкими, а в отсутствие отступлений вся поверхность будет иметь равномерную окраску.

При проверке плоских поверхностей очень удобно сложить эталонную и испытуемую поверхности так, чтобы между ними осталась клинообразная воздушная прослойка с очень малым углом (для этого достаточно с одной стороны несколько прижать друг к другу сложенные поверхности). Полосы равной толщины между идеальными плоскостями должны иметь вид прямых, параллельных ребру клина.

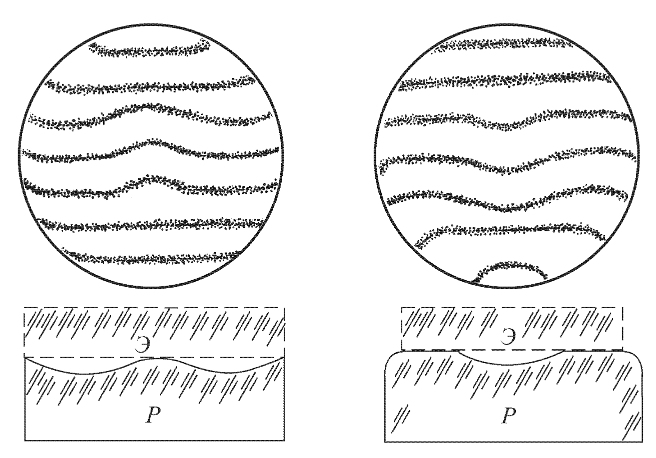


Рис. 7.10. Интерференционный метод контроля поверхности: *P* — испытуемая пластинка; *Э* — эталонная пластинка; вверху — схематическое изображение интерференционной картины (линии равной толщины)

Малейшие отступления от плоскости ведут к искривлению этих прямых, очень заметному и характерному: по его виду легко отличить «впадину» от «бугра» и измерить отступление от плоскости с точностью от 0,01 мкм. Меняя положение ребра клина (нажимая то с одной, то с другой стороны), можно быстро исследовать качество поверхности по всем направлениям.

При очень тщательных исследованиях поверхности следует применять почти нормальные пучки и пользоваться монохроматическим светом, для того чтобы повысить резкость интерференционных картин.

Если посеребрить поверхность испытуемой пластины и пробного стекла, то благодаря многократному отражению будут наблюдаться еще более узкие и резкие полосы, что позволяет повысить точность контроля до 0,003 мкм (М.Ф. Романова, 1932 г.; Толанский, 1944 г.). Проверяемые поверхности отделяются при этом тонкой воздушной прослойкой.

Существуют интерферометры (В.П. Линник, Твайман), предназначенные для контроля качества готовых оптических систем (объективов), причем контролируется не только качество обработки поверхности, но и однородность стекла, из которого изготовлена система.

При испытании поверхностей большого размера (до нескольких метров) пробное стекло, конечно, не применимо. В.П. Линник постро-

ил интерферометр, в котором свет падает очень наклонно на большую поверхность, благодаря чему сильно уменьшается сечение отраженного пучка и становится возможным осуществлять интерференционные наблюдения. Интерферометр Линника позволяет контролировать с точностью до 1 мкм прямолинейность поверхностей длиной до 5 м.

Интерференционные методы широко применяются также для контроля чистоты обработки металлических поверхностей. К приборам такого рода принадлежит микроинтерферометр В.П. Линника, упомянутый в § 29.

Явление интерференции в тонких пленках используется в ряде приборов как чувствительнейший метод, позволяющий судить о ничтожном изменении толщины какой-либо воздушной прослойки. Так, в дилатометре Физо–Аббе незначительное тепловое расширение влечет за собой изменение толщины воздушной прослойки между испытуемым телом и эталонным стеклом.

Дилатометр в наиболее совершенной форме содержит кольцо K из плавленого кварца (его термические свойства хорошо известны), на котором лежит эталонная стеклянная пластинка P (рис. 7.11). Внутри кольца помещается испытуемое вещество R в виде столбика с правильно отполированными плоскостями. Тонкий воздушный зазор M (обычно клинообразный) между поверхностями освещается монохроматическим светом и дает интерференционную картину.

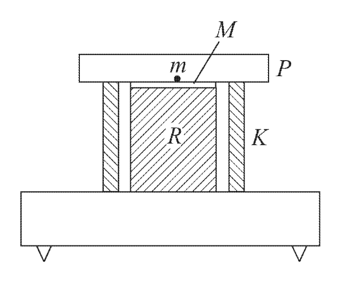


Рис. 7.11. Схема интерференционного дилатометра

При нагревании вследствие различия в коэффициентах расширения K и R толщина зазора M меняется, благодаря чему происходит смещение интерференционных полос, отмечаемое при помощи метки m. Смещение полос на одну означает изменение разности хода на λ, т.е. изменение воздушного зазора на $\lambda/2$. Таким образом, наблюдая за интерференционной картиной, можно точно измерить изменение толщины зазора и отсюда вычислить коэффициент расширения. При точных измерениях этого рода приходится учитывать зависимость показателя преломления воздуха от температуры.

Метод контроля плоскопараллельных пластинок был описан в § 27.

Как уже упоминалось выше (см. § 28), интерференционные методы дают возможность с большой точностью определять ничтожные изменения показателя преломления, влекущие за собой изменение оптической длины пути, и, следовательно, смещение интерференционной картины.

Кроме упомянутого уже рефрактометра Жамена, для этой цели служат многочисленные интерференционные рефрактометры, имеющие технический характер и приспособленные для измерения небольших вариаций показателя преломления газов и жидкостей, вызванных примесями (например, технический интерферометр для определения состава газов в шахтах или анализа ничтожных количеств солей, рас-

творенных в воде). В последнее время интерференционная рефрактометрия начинает находить применение даже в клинических лабораториях для исследования изменений в составе крови, связанных с заболеваниями. Наконец, существует немало интерференционных рефрактометров, применяемых для определения показателей преломления твердых тел. Определение показателей преломления этими методами при введении всех необходимых поправок удалось выполнить в последнее время с точностью до восьмого десятичного знака.

Интерференционные явления используются также для очень точного определения углов. Здесь также оказывается возможным применение весьма разнообразных приемов. Так, для контроля правильности углов в стеклянных призмах используют явления в тонких пластинках (воздушный клин). Изготовив стандартный стеклянный угольник и накладывая его на грани призмы, можно по интерференционным картинам контролировать правильность угла призмы с точностью, соответствующей воздушному клину, катет которого не превышает 0,03 мкм.

Майкельсон применил интерферометрическое наблюдение для оценки малых угловых расстояний между двойными звездами, а также для оценки углового диаметра звезд. Метод Майкельсона, равно как и применение его к определению размеров субмикроскопических частичек, будет изложен ниже (см. § 45). Наконец, понятно, что интерференционные методы, позволяющие с огромной точностью определять длину волны, могут служить для самых тонких спектроскопических исследований (тонкая структура спектральных линий, исследование формы и ширины спектральных линий, ничтожные изменения в строении спектральных линий). Интерференционные спектроскопы, их достоинства и недостатки будут обсуждены вместе с другими спектральными приборами (дифракционная решетка, призма) в § 50.

ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

Глава VIII

ПРИНЦИП ГЮЙГЕНСА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

§ 33. Принцип Гюйгенса–Френеля

Явления интерференции света во всем их многообразии служат убедительнейшим доказательством волновой природы световых процессов. Однако окончательная победа волновых представлений была невозможна без истолкования с волновой точки зрения фундаментального и хорошо подтвержденного опытом закона *прямолинейного распространения света.*

Волновые представления в той первоначальной форме, в которой их развивал Гюйгенс («Трактат о свете», 1690), не могли дать удовлетворительного ответа на поставленный вопрос. В основу учения о распространении света Гюйгенсом положен принцип, носящий его имя. Согласно представлениям Гюйгенса, свет, по аналогии со звуком, представляет собой волны, распространяющиеся в особой среде — эфире, занимающем все пространство, в частности заполняющем собой промежутки между частицами любого вещества, которые как бы погружены в океан эфира. С этой точки зрения естественно было считать, что колебательное движение частиц эфира передается не только той частице, которая лежит на «пути» светового луча, т.е. на прямой, соединяющей источник света L (рис. 8.1) с рассматриваемой точкой A, но всем частицам, примыкающим к A, т.е. световая волна распространяется из A во все стороны, как если бы точка A служила источником света. Поверхность, огибающая эти вторичные волны, и представляет собой поверхность волнового фронта. Для случая, изображенного на рис. 8.1, эта огибающая (жирная дуга) представится частью шаровой поверхности с центром в L, ограниченной конусом, ведущим к краям круглого отверстия в экране MN. Как уже указывалось во Введении, принцип Гюйгенса позволил разъяснить вопросы отражения и преломления света, включая и сложную

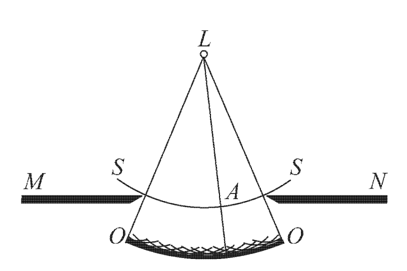


Рис. 8.1. К принципу Гюйгенса: L — источник; SS — вспомогательная поверхность; OO — огибающая вторичных волн, исходящих из SS

проблему о двойном лучепреломлении; но задача о прямолинейном распространении света по существу решена не была, ибо она не была поставлена в связь с явлениями отступления от прямолинейности, т.е. с явлениями дифракции.

Причина лежит в том, что принцип Гюйгенса в его первоначальной форме был принципом, областью применения которого являлась область геометрической оптики. Выражаясь языком волновой оптики, он относился к случаям, когда длину волны можно было считать бесконечно малой по сравнению с размерами волнового фронта. Поэтому он позволял решать лишь задачи о направлении распространения светового фронта и не затрагивал по существу вопроса об интенсивности волн, идущих по разным направлениям. Этот недостаток восполнил Френель, который вложил в принцип Гюйгенса физический смысл, дополнив его идеей *интерференции* волн. Благодаря этому огибающая поверхность элементарных волн, введенная Гюйгенсом чисто формально, приобрела ясное физическое содержание как поверхность, где благодаря взаимной интерференции элементарных волн результирующая волна имеет заметную интенсивность.

Модифицированный таким образом принцип Гюйгенса–Френеля становится основным принципом волновой оптики и позволяет исследовать вопросы, относящиеся к интенсивности результирующей волны в разных направлениях, т.е. решать задачи о *дифракции* света (см. ниже). В соответствии с этим был решен вопрос о границах применимости закона прямолинейного распространения света, и принцип Гюйгенса–Френеля оказался применимым к выяснению закона распространения волн любой длины.

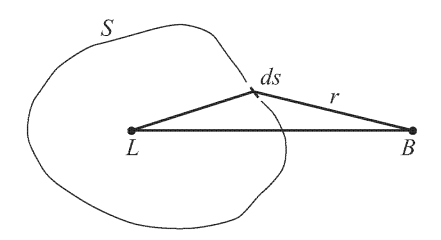


Рис. 8.2. К принципу Гюйгенса–Френеля

Для отыскания интенсивности (амплитуды) результирующей волны нужно, согласно Френелю, следующим образом формулировать принцип Гюйгенса.

Окружим источник L воображаемой замкнутой поверхностью S любой формы (рис. 8.2). Правильное значение интенсивности (амплитуды) возмущения в любой точке B за пределами S может быть получено так: устраним L, а поверхность S будем рассматривать как светящуюся поверхность, излучение отдельных элементов которой, приходя в B, определяет своей совокупностью действие в этой точке. Излучение каждого элемента ds поверхности S надо представлять себе как сферическую волну (вторичная волна), которая приносит в точку B колебание (ср. (6.1))

$$\frac{a_0}{r}\sin(\omega t - kr - \varphi), \tag{33.1}$$

где a_0 определяется амплитудой, а φ — фазой действительного колебания, дошедшего от L до элемента ds, находящегося на расстоянии r от точки B. При этом размеры элемента ds предполагаются настолько малыми, что φ и r для любой части его можно считать имеющими

одни и те же значения. Другими словами, каждый элемент ds рассматривается как некоторый вспомогательный источник, так что амплитуда a_0 пропорциональна площади ds.

Постулат Френеля, позволяющий определить a_0 и φ через амплитуду и фазу дошедшего до ds колебания, представляет собой некую *гипотезу*, пригодность которой может быть установлена сравнением делаемых с ее помощью заключений с результатами опыта. К этому вопросу мы еще вернемся в § 38.

Так как фазы всех вспомогательных источников определяются возмущением, идущим из L, то они строго согласованы между собой, и, следовательно, вспомогательные источники *когерентны*. Поэтому вторичные волны, исходящие из них, будут интерферировать между собой. Их совокупное действие в каждой точке может быть определено как интерференционный эффект, и следовательно, идея Гюйгенса о специальной роли огибающей перестает быть допущением, а должна явиться лишь следствием законов интерференции. Согласно приведенному выше постулату Френеля, вопрос о вспомогательных источниках, заменяющих L, решается однозначно, как только выбрана вспомогательная поверхность S. Выбор же этой поверхности вполне произволен; поэтому для каждой конкретной задачи ее следует выбрать наивыгоднейшим для решения способом. Если вспомогательная поверхность S совпадает с фронтом волны, идущей из L (представляет собой сферу с центром в L), то все вспомогательные источники будут иметь одинаковую фазу. Если же выбор S сделан иначе, то фазы вспомогательных источников не одинаковы, но источники, конечно, остаются когерентными.

В том случае, когда между источниками L и точкой наблюдения имеются непрозрачные экраны с отверстиями, действие этих экранов может быть учтено следующим образом. Мы выбираем поверхность S так, чтобы она всюду совпадала с поверхностью экранов, а отверстия в них затягивала произвольным образом, выбранным в зависимости от разбираемой проблемы. На поверхности непрозрачных экранов амплитуды вспомогательных источников должны считаться равными нулю; на поверхности же, проходящей через отверстия экранов, амплитуды выбираются в согласии с постулатом Френеля, т.е. так, как если бы экран отсутствовал. Таким образом, предполагается, что материал экрана не играет роли, если только экран не прозрачен [1]).

Вычисляя результаты интерференции элементарных волн, посылаемых вспомогательными источниками, мы приходим к значению амплитуды (интенсивности) в любой точке B, т.е. определяем закономерность распространения света. Результаты этих вычислений подтверждаются данными опыта. Таким образом, по методу Гюйгенса–Френеля удается получить правильное решение вопроса о распреде-

---

[1]) Опыты самого Френеля подтвердили независимость результатов наблюдения от вещества непрозрачного экрана. Однако более тщательные опыты и детальная теория показывают, что материал экрана оказывает влияние на характер светового поля в непосредственной близости к краю экрана, т.е. на расстоянии, сравнимом с длиной волны.

лении интенсивности света как в случае свободного распространения световых волн (прямолинейное распространение), так и в случае наличия задерживающих экранов (дифракция).

Первой задачей, которую должен был рассмотреть Френель, выдвинув новую формулировку принципа Гюйгенса, явилась задача о прямолинейном распространении света. Френель решил ее путем рассмотрения взаимной интерференции вторичных волн, применив чрезвычайно наглядный прием, заменяющий сложные вычисления и имеющий общее значение при разборе задач о распространении волн. Метод этот получил название метода *зон Френеля*.

Рассмотрим действие световой волны, испущенной из точки A, в какой-либо точке наблюдения B. Согласно принципу Гюйгенса–Френеля заменим действие источника A действием воображаемых источников, расположенных на вспомогательной поверхности S.

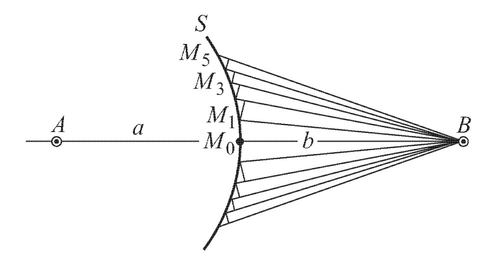


Рис. 8.3. Построение зон Френеля

В качестве такой вспомогательной поверхности S выберем поверхность фронта волны, идущей из A (поверхность сферы с центром A, рис. 8.3). Вычисление результата интерференции вторичных волн очень упрощается, если применить следующий указанный Френелем прием: для вычисления действия в точке B соединяем A с B и разбиваем поверхность S на зоны такого размера, чтобы расстояния от краев зоны до B отличались на $\lambda/2$, т.е.

$$M_1B - M_0B = M_2B - M_1B = M_3B - M_2B = \ldots = \frac{\lambda}{2}$$

(см. рис. 8.3). Нетрудно вычислить размеры полученных таким образом зон. Из рис. 8.4 получаем для первой зоны

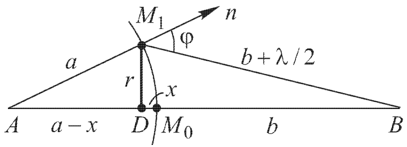


Рис. 8.4. Вычисление площади центральной зоны Френеля

$$r^2 = a^2 - (a-x)^2 = \left(b + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - (b+x)^2.$$

Так как λ очень мало по сравнению с a или b, то

$$x = \frac{b}{a+b}\,\frac{\lambda}{2},$$

и, следовательно, площадь сферического сегмента, представляющего первую, или центральную, зону, есть

$$2\pi ax = 2\pi a\,\frac{b}{a+b}\,\frac{\lambda}{2} = \frac{\pi ab}{a+b}\,\lambda.$$

Для площади сегмента, представляющего две первые зоны, найдем значение $2\,\frac{\pi ab}{a+b}\,\lambda$, т.е. площадь второй зоны также равна $\frac{\pi ab}{a+b}\,\lambda$. Практически ту же площадь будет иметь и каждая из всех последующих зон. Таким образом, построение Френеля разбивает поверхность сферической волны на равновеликие зоны, каждая из которых имеет площадь

$$\pi\frac{ab}{a+b}\,\lambda.$$

Для дальнейшего вычисления надо только принять во внимание, что действие отдельных зон на точку B тем меньше, чем больше угол φ между нормалью к поверхности зоны и направлением на B. Таким образом, действие зон постепенно убывает от центральной зоны (около M_0) к периферическим. Произвольное введение этого вспомогательного ослабляющего множителя есть один из недостатков метода Френеля.

Для получения окончательного результата можно рассуждать следующим образом: пусть действие центральной зоны в точке B выражается возбуждением колебания с амплитудой s_1, действие соседней зоны — колебанием с амплитудой s_2, следующей — с амплитудой s_3 и т.д. Как указано, действие зон постепенно (хотя и медленно) убывает от центра к периферии, так что $s_1 > s_2 > s_3 > s_4$ и т.д.; действие n-й зоны s_n может быть очень малым, если n достаточно велико. Кроме того, благодаря выбранному способу разбивки на зоны легко видеть, что действия соседних зон ослабляют друг друга. Действительно, так как

$$M_1B - M_0B = \frac{\lambda}{2} \quad \text{и} \quad M_2B - M_1B = \frac{\lambda}{2}\,,$$

то воображаемые источники зоны M_0M_1 расположены на $\lambda/2$ ближе к B, чем соответственные источники зоны M_1M_2, так что посылаемые колебания дойдут до B в противоположных фазах. Таким образом, для точки B действие центральной зоны ослабится действием соседней зоны и т.д. Продолжая эти рассуждения, найдем, что окончательное значение *амплитуды* колебания, возбужденного в точке B всей совокупностью зон, т.е. всей световой волной, будет равно

$$s = s_1 - s_2 + s_3 - s_4 + s_5 - s_6 + \ldots = \\ = s_1 - (s_2 - s_3) - (s_4 - s_5) - (s_6 - s_7) - \ldots \quad (33.2)$$

Из условия $s_1 > s_2 > s_3 > s_4 \ldots$ следует, что все выражения в скобках положительны, так что $s < s_1$. Освещенность E в точке наблюдения B пропорциональна квадрату результирующей амплитуды колебаний. Следовательно, $E \propto s^2 < s_1^2$.

Итак, амплитуда s результирующего колебания, получающегося вследствие взаимной интерференции света, идущего к точке B от различных участков нашей сферической волны, меньше амплитуды, создаваемой действием одной центральной зоны. Таким образом, действие всей волны на точку B сводится к действию ее малого участка, меньшего, чем центральная зона с площадью $\frac{\pi ab}{a+b}\,\lambda$. Длина световой

волны λ весьма мала (для зеленого света $\lambda = 5 \cdot 10^{-4}$ мм). Поэтому даже для расстояний a и b порядка 1 м площадь действующей части волны меньше 1 мм^2. Следовательно, распространение света от A к B действительно происходит так, *как если бы* световой поток шел внутри очень узкого канала вдоль AB, т.е. *прямолинейно.*

Это не значит, однако, что если мы поместим на линии AB любой небольшой непрозрачный экран, то до точки B свет не дойдет; ведь внесение такого экрана, который прикроет, например, первую зону, нарушит правильность наших рассуждений. В этом случае выпадет первый член знакопеременного ряда (33.2), и теперь окажется, что $s < |s_2|$ и т.д., т.е. s меньше модуля s_m, где m — номер первой открытой у края экрана зоны. Если m не велико, например, $m < 10$, то освещенность в точке наблюдения B на *оси экрана* останется почти такой же, как и в его отсутствие (см. § 36). Но если маленький экранчик имеет неровные края с зазубринами, сравнимыми с шириной зоны Френеля, по которой проходит этот край, то он существенно уменьшает интенсивность в точке наблюдения B.

§ 34. Зонная пластинка

Хорошей иллюстрацией, подтверждающей приведенный метод рассуждения Френеля, может служить опыт с зонной пластинкой. Как следует из сказанного выше, радиус m-й зоны Френеля равен

$$r_m = \sqrt{m\,\frac{ab}{a+b}\,\lambda}. \tag{34.1}$$

Приготовим экран, состоящий из последовательно чередующихся прозрачных и непрозрачных колец, радиусы которых удовлетворяют написанному соотношению для каких-либо значений a, b и λ. Для этой цели можно, например, вычертить в крупном масштабе соответствующий рисунок и уменьшить его в виде фотографической копии до желаемого размера[1]). Приготовленный таким образом экранчик носит название *зонной пластинки* (Соре, 1875 г.).

Изображения таких пластинок приведены на рис. 8.5. Если поместить пластинку, показанную на рис. 8.5 *а*, в соответствующем месте сферической волны, т.е. расположить на расстоянии a от точечного источника и на расстоянии b от точки наблюдения на линии, соединяющей эти две точки, то для света длины волны λ наша пластинка прикроет все четные зоны и оставит свободными все нечетные, начиная с центральной.

Волновой фронт, профильтрованный через зонную пластинку, расположенную таким образом, должен давать в точке B результирующую *амплитуду*, выражаемую соотношением $s = s_1 + s_3 + s_5 + s_7 + \ldots$,

---

[1]) Последовательность радиусов зонной пластинки подчиняется такому же закону, как и последовательность радиусов колец Ньютона в монохроматическом свете длины волны λ (см. § 26). Поэтому вместо вычерчивания таких колец их можно осуществить при помощи расположения Ньютона и в подходящем масштабе сфотографировать эту интерференционную картину.

т.е. значительно бо́льшую, чем при полностью открытом фронте. До точки B должно дойти *больше* света, чем без зонной пластинки. Опыт

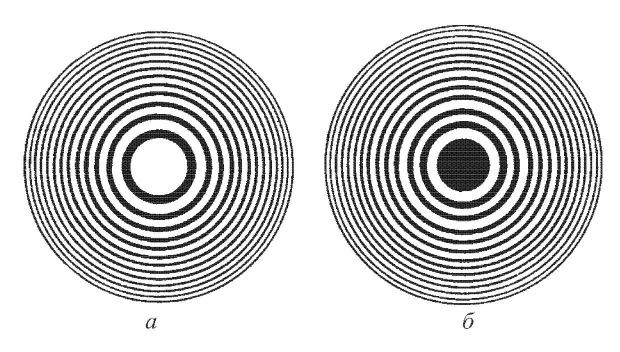


Рис. 8.5. Зонные пластинтки: *а* — открыты нечетные зоны; *б* — открыты четные зоны

полностью подтверждает это заключение: зонная пластинка увеличивает освещенность в точке B, действуя подобно собирательной линзе (см. упражнение 88). Следует иметь в виду, что зонная пластинка имеет и мнимые фокусы, а потому работает одновременно как комбинация собирательных и рассеивающих линз (см. рис. 8.6).

Аналогию между зонной пластинкой и линзой можно проследить более полно, если несколько видоизменить постановку вопроса. Будем считать, что величина $f = r_m^2/m\lambda$, характеризующая зонную пластинку и излучение, является заданной, и найдем значения a и b, для которых волны, проходящие через прозрачные кольца пластинки, оказываются синфазными. С помощью соотношения (34.1) получаем

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}, \tag{34.2}$$

т.е. a и b связаны формулой линзы, а величина f играет роль фокусного расстояния. Следовательно, при заданном положении источника всегда можно найти точку, где находится его изображение. В частности, если на пластинку падает плоская волна ($a = \infty$), то изображение будет находиться в точке, удаленной от зонной пластинки на расстояние $b = f$. Возможны и мнимые изображения, если $a < f$; этот случай отвечает повышенному значению амплитуды расходящейся волны, как бы выходящей из точки, лежащей слева от зонной пластинки.

В отличие от линзы, зонная пластинка дает не одно, а много изображений источника. В самом деле, сместим точку наблюдения в такое положение B_1, чтобы в пределах каждого прозрачного кольца зонной пластинки укладывалась не одна, а три зоны Френеля. Действие двух из них будет взаимно скомпенсировано, и амплитуда колебаний в точке B_1 определяется лишь третьей зоной. Вместе с тем, волны, приходящие в B от нескомпенсированных зон всех колец пластинки, остаются синфазными, т.е. амплитуда колебаний в выбранной точке B_1 также имеет повышенное значение. Разность фаз между волнами от нескомпенсированных зон соседних колец увеличивается в три

раза (в сравнении с точкой B), положение b_1 точки B_1 определится соотношением $\frac{1}{a} + \frac{1}{b_1} = \frac{3}{f}$. Проведенные рассуждения останутся в силе и для других точек наблюдения, если в пределах каждого кольца пластинки укладывается любое нечетное число $2n+1$ зон Френеля. Положение этих точек задается соотношением

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b_n} = \frac{2n+1}{f} = \frac{1}{f_n}, \quad f_n = \frac{f}{2n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{34.3}$$

которое можно толковать, как наличие у зонной пластинки многих фокусных расстояний f_n. Целым числам в (34.3) можно придавать и отрицательные значения $n = -1, -2, \ldots$ Этим значениям соответствуют расходящиеся волны, ибо именно для расходящихся волн разность фаз между возмущением от более удаленных и от менее удаленных зон Френеля отрицательна.

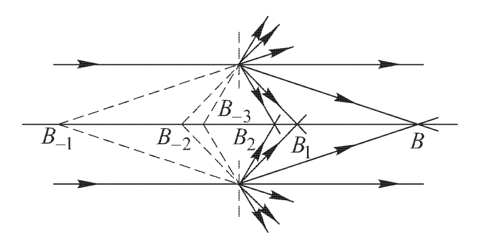


Рис. 8.6. Совокупность фокусов амплитудной зонной пластинки; масштаб в поперечном направлении сильно увеличен

Итак, за зонной пластинкой создается сложное волновое поле со множеством точек B, B_1, B_2, ..., B_{-1}, B_{-2} повышенной освещенности на оси пластинки, показанных на рис. 8.6. Возникновение многих изображений обусловлено дифракцией падающей волны на сложном экране, который представляет собой зонная пластинка (упражнение 88).

Фокусирующие свойства зонных пластинок позволяют применять их в качестве линз. При этом следует иметь в виду значительные хроматические аберрации, так как f обратно пропорционально длине волны.

Можно достичь еще большей яркости изображений, если не задерживать колебания, приходящие в точку B от четных зон, а сообщить им изменение фазы на π. Такую *фазовую зонную пластинку* изготовил впервые Р. Вуд, покрыв стекло тонким слоем лака и выгравировав на нем зонную пластинку так, что оптическая толщина нечетных зон отличалась от толщины четных на величину $\lambda/2$.

Прохождение света сквозь амплитудную зонную пластинку с иным распределением прозрачности рассматривается в § 59 гл. XI.

§ 35. Графическое вычисление результирующей амплитуды

Рассмотрение вопроса о действии световой волны в точке B (см. рис. 8.4), равно как и многих других аналогичных вопросов, чрезвычайно удобно производить, пользуясь графическим методом сложения колебаний, обладающих некоторой разностью фаз. Для того чтобы графически изобразить действие *целой зоны*, следует разбить ее на равные *участки*, столь малые, чтобы фаза колебаний, вызываемых в точке B различными воображаемыми источниками тако-

го участка, практически могла считаться постоянной. Тогда действие всего участка можно выразить вектором, длина которого дает суммарную амплитуду, а направление определяет фазу, обусловливаемую этим участком. Действие соседнего участка можно выразить вторым вектором, несколько повернутым относительно первого, так как фаза, определяемая совокупностью источников второго участка, будет немного отличаться от фазы, задаваемой первым участком. По длине же этот вектор практически не будет отличаться от первого, так как амплитуда колебания, вызываемого равновеликими участками фронта волны, отличается только вследствие изменения наклона фронта волны к линии, проведенной к точке B, а для двух соседних участков это изменение ничтожно мало. Даже при переходе от одной зоны к следующей действие изменения наклона, как мы видели, весьма незначительно. Таким образом, векторная диаграмма, определяющая действие ряда участков, составляющих целую зону, изобразится ломаной, представленной на рис. 8.7.

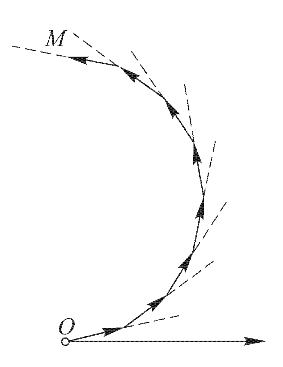


Рис. 8.7. Векторная диаграмма суммирования действия отдельных участков зоны

Здесь для определенности мы предполагали, что зона разбита на 8 элементарных участков. Если разбить зону на бесконечно большое число бесконечно малых участков, то ломаная линия обратится в дугу, которая лишь очень мало будет отличаться от полуокружности. При этом вектор, касательный к дуге в точке M, будет иметь направление, прямо противоположное направлению соответствующего вектора вблизи точки O, так как фаза колебания в B, обусловленного действием последнего участка зоны, очевидно, противоположна фазе колебаний, излучаемых начальным участком зоны; таким образом, векторную диаграмму действия центральной зоны можно представить рис. 8.8, и результирующую, характеризующую колебание в B, вызванное действием одной центральной зоны, — вектором OM_1.

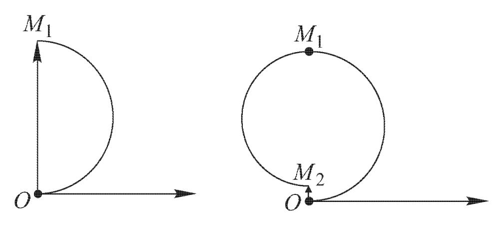


Рис. 8.8. Векторная диаграмма действия центральной (первой) зоны: OM_1 — результирующий вектор

Рис. 8.9. Векторная диаграмма действия первой и второй зон: OM_2 — результирующий вектор

Для того чтобы учесть действие второй зоны, надо продолжить нашу векторную диаграмму. Тогда мы получим рис. 8.9, причем хорда дуги M_1M_2 несколько меньше, чем у дуги OM_1, вследствие возрастающего наклона зоны. Продолжая наше построение, получим диаграмму действия всей волны, изображенную на рис. 8.10.

Результирующая, характеризующая действие всего волнового фронта, выражается вектором $ON = s$. Из рис. 8.10 легко видеть, что этот вектор равен примерно половине вектора $OM_1 = s_1$, представляющего действие центральной зоны, и совпадает с ним по направлению. Другими словами, колебание в точке B, обусловленное всем волновым фронтом, совпадает по фазе с колебанием, которое могла бы создать центральная зона, а по амплитуде составляет примерно половину этого колебания. Приведенные рассуждения показывают, что действие (амплитуда), вызванное всем волновым фронтом, примерно равное *половине* действия центральной зоны, а не действию половины центральной зоны, как нередко утверждают. В самом деле, действие половины центральной зоны выразилось бы вектором OK, отличающимся от правильно найденного вектора ON.

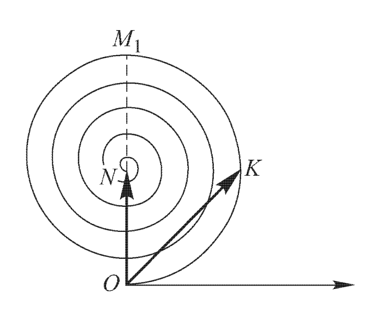


Рис. 8.10. Векторная диаграмма действия всей волны.

§ 36. Простейшие дифракционные проблемы

Применение метода Френеля позволяет предвидеть и объяснить особенности в распространении световых волн, наблюдающиеся тогда, когда часть фронта идущей волны перестает действовать вследствие того, что свет распространяется между препятствиями, прикрывающими часть фронта волны. Эти явления *огибания* препятствий (экранов и краев диафрагм) носят название явлений *дифракции*.

Рассмотрим несколько простых случаев. Мы будем пользоваться гипотезой, положенной Френелем в основу его рассуждений, предполагая, что часть фронта световой волны, прикрытая непрозрачным экраном, не действует совсем, а неприкрытые участки фронта действуют так, как если бы экрана совсем не было. Гипотеза эта не самоочевидна и в непосредственной близости к краям отверстий не вполне верна (см. примечание на с. 140). Однако для большинства практически интересных случаев, когда размеры отверстия значительно больше длины волны λ, метод Френеля достаточно хорошо описывает явления дифракции. Причина успеха метода Френеля лежит в том, что влияние материала экрана сказывается лишь в непосредственной близости к краю его, т.е. на расстояниях порядка длины волны. При достаточно больших отверстиях влияние этой краевой зоны незначительно и практически может не учитываться. В таких условиях методом Френеля можно успешно пользоваться.

а. Дифракция на круглом отверстии. Пусть волна Σ, идущая из A, встречает на пути экран MN с круглым отверстием (рис. 8.11). Исследуем явление в точке B, лежащей на линии, соединяющей A с центром круглого отверстия.

Вспомогательная поверхность Френеля Σ будет касаться экрана MN. Разбивка на зоны Френеля, произведенная, как описано в § 33,

покажет, что в зависимости от размера отверстия в нем уложится большее или меньшее число зон. При небольшом размере отверстия и соответственных расстояниях до точек A и B можно учитывать лишь ограниченное число действующих зон.

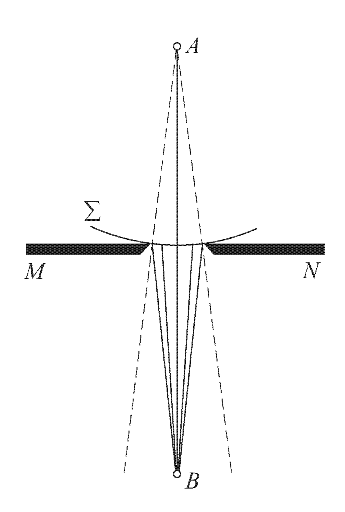
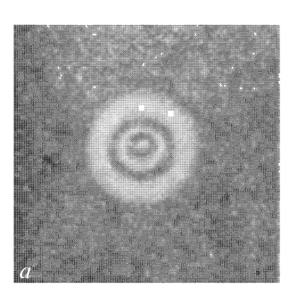


Рис. 8.11. Схема дифракции на круглом отверстии (зоны построены для центральной точки поля B)

Легко видеть, что если отверстие открывает всего лишь *одну* зону или небольшое *нечетное* число зон, то действие в точке B будет больше, чем в отсутствие экрана[1]). Максимум действия соответствует размеру отверстия в одну зону. Если же отверстие открывает *четное* число зон, то световое возбуждение в точке B будет *меньше*, чем при свободной волне. Наименьшая освещенность соответствует *двум* открытым зонам (рис. 8.12).

Применяя графический метод, описанный в § 35, мы получим диаграммы, подобные изображенным на рисунках 8.8–8.10 и определяющие световое возбуждение в точке B в зависимости от числа зон, укладывающихся в отверстии.

Аналогичная картина будет наблюдаться для любой точки, лежащей на линии AB. Расчет картины для точек, лежащих в плоскости, перпендикулярной к AB, в стороне от этой линии, несколько сложнее. Но легко видеть, что вследствие симметрии все-



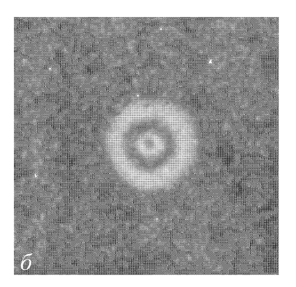


Рис. 8.12. Картины дифракции на круглом отверстии: *а* — отверстие открывает нечетное число зон, в центральной точке поля (B на рис. 8.11) — свет; *б* — отверстие открывает четное число зон, в центральной точке поля — темнота

[1]) При этом, однако, размер отверстия еще гораздо больше λ, так что условия применимости метода Френеля соблюдены. Дайствительно, например, при $a \approx b = 100$ см и $\lambda = 5\cdot 10^{-5}$ см имеем $r = \sqrt{a\lambda/2} = \sqrt{25\cdot 10^{-4}}$ см $= 5\cdot 10^{-2}$ см $= 1000\lambda$.

го расположения вокруг линии AB распределение света в указанной плоскости должно быть симметрично, т.е. области одинаковой освещенности должны располагаться кольцеобразно около точки B. При подходящих условиях опыта можно наблюдать несколько концентрических областей максимумов и минимумов освещенности, плавно переходящих друг в друга (см. рис. 8.12).

б. Дифракция на круглом экране. Для точки B, лежащей на линии, соединяющей источник A с центром экрана (рис. 8.13), построение Френеля дает первую зону от края экрана до линии пересечения поверхности волны с конусом, образующая которого равна $b + \lambda/2$, вторую зону — до конуса с образующей $b+\lambda$, и т.д. Повторяя рассуждения § 33, получим, что амплитуда световых колебаний в B равна половине амплитуды, обусловленной первой *открытой* зоной. Если размер экрана невелик (охватывает малое количество зон), то действие первой открытой зоны практически не отличается от действия центральной зоны волнового фронта.

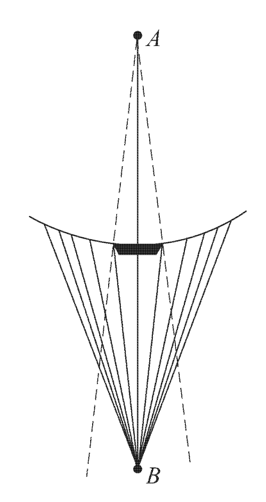
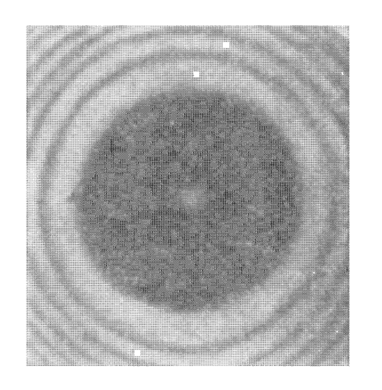


Рис. 8.13. Схема дифракции на круглом диске

Таким образом, освещенность в точке B (равно как и в других точках на линии AB, достаточно удаленных от экрана) будет такой же, как и в отсутствии экрана. Вследствие симметрии всей картины относительно прямой AB светлая точка в B окружена кольцевыми зонами чередующихся тени и света (вне границ геометрической тени). По мере удаления от B в направлении, перпендикулярном линии AB, кольца становятся все менее и менее резкими, пока вдали от B не получится равномерная освещенность. Фотография, приведенная на рис. 8.14, передает результаты соответствующего опыта.


Рис. 8.14. Картина дифракции на круглом диске

Парадоксальное на первый взгляд заключение, в силу которого в самом центре геометрической тени должна находиться светлая точка, было выдвинуто Пуассоном в 1818 г. при рассмотрении мемуара Френеля в Парижской академии, в качестве доказательства несостоятельности рассуждений Френеля. Однако Араго произвел соответствующий опыт и показал, что выводы Пуассона соответствуют действительности и, следовательно, лишь подтвержда-

ют теорию Френеля [1]). Светлое пятно в центре геометрической тени, предсказанное Пуассоном в качестве *мнимого* опровержения волновой природы света, получило наименование *пятна Пуассона*.

Для успеха опыта необходимо, чтобы край экрана хорошо совмещался с границами зоны, т.е. экран должен быть точным кругом. Удобными для этой цели являются, например, стальные шарики от шарикоподшипников. В том случае, когда края экрана имеют неровности, сравнимые с размерами первой открытой френелевой зоны, расчет и опыт показывают, что экранчик нарушит однозначные предсказания теории Френеля о наличии пятна Пуассона.

в. Дифракция на краю экрана, на узкой щели, на узком длинном экране. Мы рассматривали до сих пор препятствия такой формы, для которых построение кольцевых зон Френеля являлось удобным методом решения задачи. Практически большое значение имеют также иные случаи, например прохождение света через узкую щель или мимо экрана с резким прямолинейным краем, прикрывающим часть фронта световой волны (полуплоскость). В этих случаях количественный расчет наблюдаемой картины по методу кольцевых зон Френеля неудобен, так как прямолинейный край экрана не выделяет целых зон, а пересекает их (рис. 8.15). Поэтому учет действия частично открытых или закрытых зон затруднителен.

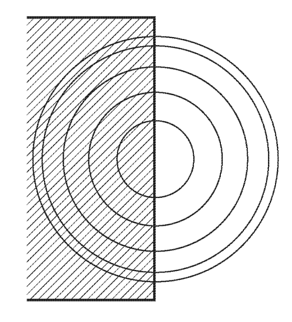


Рис. 8.15. Пересечение зон Френеля экраном с прямолинейным краем

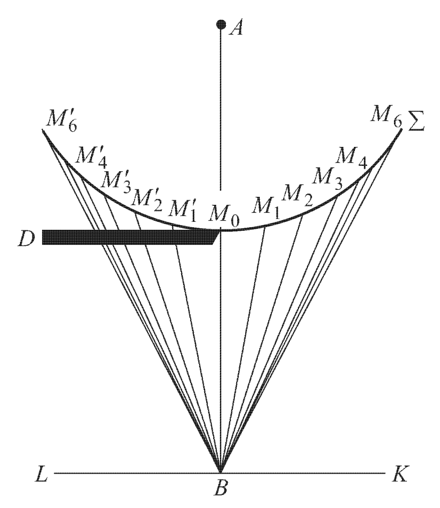


Рис. 8.16. Разбиение фронта волны на лунки, аналогичные зонам Френеля

Решение задачи можно значительно упростить, если разбить поверхность волны на зоны несколько иным образом (рис. 8.16). Пусть

[1]) Светлое пятнышко в центре геометрической тени, отбрасываемой шариками разного размера, наблюдал Маральди (1723 г.) и, по-видимому, еще раньше Делиль (1715 г.), хотя указания Делиля недостаточно ясны; однако этот опыт остался незамеченным и был забыт, ибо явление дифракции не было тогда понято.

A — светящаяся точка, B — точка наблюдения, Σ — поверхность сферической волны и D — бесконечный экран, край которого перпендикулярен к плоскости чертежа. Из точки B проведем в плоскости чертежа линии BM_0, BM_1, BM_2, ... и BM'_1, BM'_2, ..., отличающиеся по длине на $\lambda/2$. Через центр A и точки M_1, M'_1, M_2, M'_2 и т.д. проведем *плоскости, параллельные* ребру экрана D, и разобьем таким образом поверхность волны дугами больших окружностей на лунки, подобно тому как поверхность Земли делится меридианами на пояса. В отличие от меридианной сетки поверхность волны разбивается на лунки дугами, расположенными на *неравном* расстоянии друг от друга, и в соответствии с этим площади лунок не будут одинаковыми (рис. 8.17). Рассуждения, аналогичные приведенным в § 33, покажут, что расстояния M_0M_1, M_1M_2, ..., а следовательно, и площади соответствующих лунок, относятся между собой приблизительно как

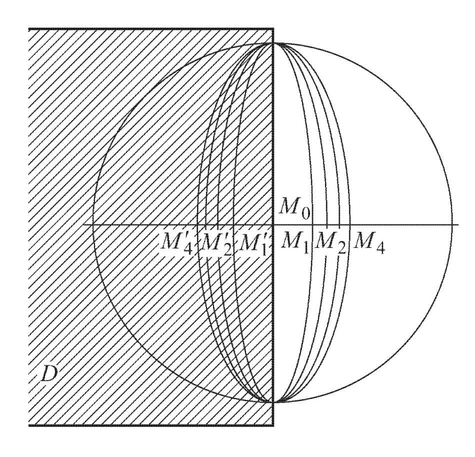


Рис. 8.17. К разбиению волнового фронта: эллиптические кривые — проекции границ лунок на плоскость экрана D

$$1 : 0{,}41 : 0{,}32 : 0{,}27 : 0{,}23 : 0{,}22 : 0{,}20 : 0{,}18 : 0{,}17$$

и т.д. [1]). Как видим, площади лунок по мере удаления от M_0 убывают сначала очень быстро, а затем медленнее. Световое возбуждение из соответственных точек, лежащих в плоскости рис. 8.6 для соседних лунок достигает B в противоположных фазах, как и при зонах, разбитых по обычному построению Френеля; однако амплитуды, обусловленные действием первой, второй и т.д. лунок, убывают значительно быстрее, чем в случае, разобранном в § 33, ибо, кроме увеличения наклона фронта волны к линии MB, площади лунок заметно уменьшаются по мере удаления от полюса M_0.

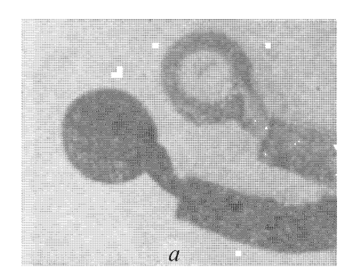
Пользуясь указанным разделением поверхности волны на зоны, мы с большим удобством можем выполнить решение задачи по плану, разобранному в пп. а и б.

г. Принцип подобия при формировании дифракционных картин. Нетрудно сообразить, что две системы объектов (отверстий и экранов) дадут вполне сходные дифракционные картины, если расположение источника света, глаза наблюдателя и размеры отверстий и экранов таково, что обоим объектам соответствует одинаковое число зон Френеля и их частей. Действительно,

[1]) Для простоты расчет выполнен для плоского фронта, что допустимо, ибо во многих случаях кривизна Σ невелика.

характер дифракционной картины определяется именно числом зон Френеля, а не абсолютными размерами экранов и отверстий.

В случае плоской волны (бесконечно удаленный источник) площадь зоны Френеля равняется $\pi f\lambda$, где f — расстояние до глаза наблюдателя, а радиус зоны $r = \sqrt{f\lambda}$. Таким образом, для равенства числа зон Френеля надо выбрать расстояние f таким, чтобы $x/r = x/\sqrt{f\lambda}$, где x — размер отверстия, имело одно и то же значение. Таково условие подобия дифракционных картин. Как видно, при двух подобных объектах размером x_1 и x_2 можно наблюдать подобные дифракционные картины, выбрав расстояние до места наблюдения f_1 и f_2 таким образом, чтобы $f_1/f_2 = x_1^2/x_2^2$. Так, в опытах В.К. Аркадьева на моделях (рис. 8.18) можно было моделировать картину дифракции



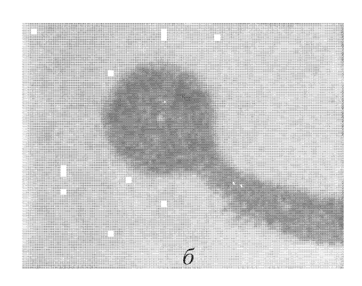


Рис. 8.18. Моделирование картины дифракции на экране: *а* — тень от руки, держащей тарелку, отбрасывается на близко расположенный экран; тень и объект геометрически подобны; *б* — тень от руки, держащей тарелку, отбрасывается на экран, расположенный на большом расстоянии (11 км); тень искажена дифракцией. (Фотография Аркадьева, выполненная на модели, расчитанной по принципу подобия.)

от руки, держащей тарелку, на экране, расположенном на расстоянии 11 км, с легко осуществимого расстояния 40 м, заменив руку и тарелку вырезанной из жести моделью в масштабе, уменьшенном в $\sqrt{11\,000/40} \approx 16{,}5$ раз.

§ 37. Спираль Корню и применение ее для графического решения дифракционных задач

Подобно тому как мы построили векторную диаграмму для учета действия различных кольцевых зон (см. § 35), можно построить графически диаграмму действия различных лунок. Очевидно, получится также кривая в форме спирали, однако вследствие различия в площадях лунок действие их по мере удаления от центральной точки волны (точка M_0) быстро убывает, особенно вблизи M_0. В соответствии с этим векторы, изображающие действия последующих участков каждой лунки, быстрее убывают по длине, чем в случае построения § 35, соответствующего разбиению на зоны Френеля, и спираль получается более пологой. Аналитически задача была решена Френелем с помо-

щью интегралов специального вида, получивших название интегралов Френеля. График, соответствующий этому решению дифракционной задачи, был построен Корню и носит название *спирали Корню*. Она изображена на рис. 8.19, причем точки F_- и F_+ представляют полюсы, к которым спираль приближается асимптотически. Ветвь спирали OB_1B_2, ..., F_-, выражающая действие левой половины волнового фронта, состоит из участков, параллельных соответствующим участкам ветви $OA_1A_2\ldots F_+$, изображающим действие правой половины, ибо соответствующие части фронта волны расположены симметрично относительно точки B (см. рис. 8.16), для которой ведется вычисление. Таким образом, обе ветви кривой симметричны, O является точкой перегиба, и прямая F_-OF_+, соединяющая полюсы спирали, образует угол 45° с касательной в точке O [1]).

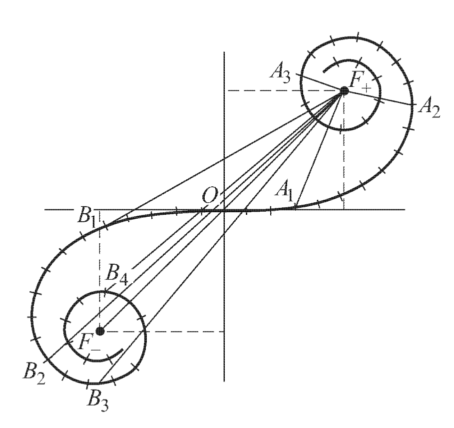


Рис. 8.19. Спираль Корню

Пользуясь спиралью Корню, можно количественно решать задачи, подобные упомянутым выше, т.е. задачи о дифракции на препятствиях, ограниченных прямолинейными краями. Амплитуда колебания, обусловленная какой-либо частью фронта световой волны, выражается вектором, замыкающим участок спирали, соответствующий данной части фронта волны. Действие всего фронта волны, т.е. фронта, не закрытого никакими препятствиями, изобразится вектором F_+F_-, соединяющим концы спирали.

Рассмотрим в качестве примера применение спирали Корню к разбору вопроса о дифракции на краю экрана. Освещенность в точке B (рис. 8.20), лежащей на границе геометрической тени, определяется действием половины поверхности фронта волны, ибо вторая его половина прикрыта экраном; этому соответствует на нашей диаграмме вектор OF_+, соединяющий центр спирали с ее полюсом F_+ (см. рис. 8.19). Так как $OF_+ = F_+F_-/2$, то амплитуда в точке B равна половине, а интенсивность — четверти интенсивности, наблюдаемой в отсутствие экрана D. При переходе к области BK полюс [2]) волны смещается вправо, так что для точки B_2 открыта вся правая половина

[1]) Описание геометрических свойств спирали Корню, метода ее построения и связи с интегралами Френеля можно найти в любом курсе теоретической оптики; см., например: Друде П. Оптика.– М.: ОНТИ, 1935; Дитчберн Р. Физическая оптика.– М.: Наука, 1965.

[2]) Полюсом волны называется точка пересечения волнового фронта с прямой, соединяющей источник A и точку наблюдения (B, B_2, ...).

фронта волны и какая-то часть левой половины. Поэтому амплитуда будет определяться вектором, соединяющим F_+ со все более и более отдаленными точками спирали, т.е. вектором F_+B_1, F_+B_2, F_+B_3 и т.д. Рисунок 8.19 показывает, что векторы эти проходят через ряд максимумов бо́льших, чем F_+F_-, и ряд минимумов меньших, чем F_+F_-, что соответствует смене максимумов и минимумов в освещенной части экрана. Наибольшая интенсивность, равная 1,37, достигается в первом максимуме, который возникает при смещении полюса волны примерно на ширину первой зоны Френеля (точка B_2 на рисунках 8.19 и 8.20). Падение интенсивности в области геометрической тени BL, где экран D закрывает все бо́льшую и бо́льшую часть волны, происходит плавно, как видно из рис. 8.19, где изображены последовательные значения амплитуды: F_+A_1, F_+A_2, F_+A_3 и т.д.

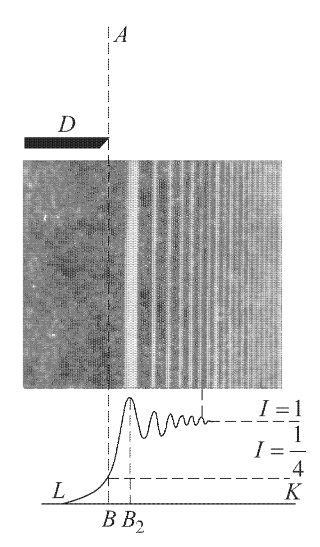


Рис. 8.20. Дифракция на краю экрана

Имея в своем распоряжении правильно вычерченную спираль Корню в достаточно большом масштабе, можно найти количественное распределение интенсивности с достаточной точностью.

Схема и фотография рис. 8.20 передают наблюдаемую дифракционную картину, под которой вычерчено теоретическое распределение интенсивности. Аналогично можно исследовать действие узкой бесконечной щели или узкого экрана и т.д.

§ 38. Замечания относительно принципа Гюйгенса–Френеля

Рассмотренные выше примеры показывают с достаточной убедительностью, что вычисления (аналитические и графические), выполненные на основе постулата Френеля, дают правильное значение распределения интенсивности при явлениях дифракции, т.е. позволяют правильно отыскать *амплитуду* результирующей волны, если размеры препятствий или отверстий значительно больше длины волны.

При этом, однако, необходимо сделать следующие замечания. Во-первых, при вычислении результатов интерференции элементарных волн приходится предполагать, что амплитуда, обусловливаемая вспомогательными источниками, зависит от угла наклона φ между нормалью к соответствующему участку вспомогательной поверхности и направлением на точку B, для которой ведется вычисление.

Поверхность S подобна светящейся поверхности, так что амплитуда излучаемых волн тем меньше, чем больше угол между нормалью к поверхности и направлением на точку наблюдения B. Она имеет наибольшее значение на радиусе, совпадающем с нормалью ($\varphi = 0$), и обращается в нуль при $\varphi = \pi/2$ (рис. 8.21).

Во-вторых, следует отметить, что во всех предшествующих рассуждениях мы стремились определить амплитуду результирующей волны, не затрагивая вопроса о ее фазе. Для большинства задач вопрос о фазе не имеет значения, ибо нас интересует интенсивность результирующей волны, которая пропорциональна *квадрату амплитуды.* Если же произвести и вычисление результирующей фазы, то оказывается, что она отличается на $\pi/2$ от наблюдаемой. Это легко видеть, например, из рис. 8.10. Направление касательной к кривой в начальной точке O, выбранной за начало отсчета, дает в точке наблюдения фазу колебания, создаваемого действием центрального элемента первой зоны, т.е. значение фазы, которое обусловливается распространением света по прямой LB (см. рис. 8.2). Это и есть то значение фазы, которое соответствует действительности. График же наш показывает, что результирующий вектор ON повернут на 90°, т.е. результирующая фаза отстает на $\pi/2$. Таким образом, постулат Френеля, правильно задавая амплитуды вспомогательных источников, неудачно определяет фазы их колебаний. Для того чтобы получить верный результат и для фазы, мы должны были бы в этой части изменить постулат Френеля и приписать вспомогательным источникам фазы, увеличенные на $\pi/2$.

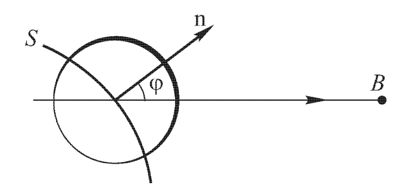


Рис. 8.21. Иллюстрация зависимости амплитуды вторичных волн от угла φ

Наконец, формулировка Френеля не устраняет трудности, характерной для принципа Гюйгенса в его первоначальной форме и состоящей в том, что из него следует наличие двух волн: одной, идущей вперед, от источника света, другой, построенной так же, как огибающая элементарных волн, но направленной обратно, к источнику.

Отрицание наличия обратной волны заключается до известной степени в допущении Френеля о зависимости амплитуды вторичных волн от угла φ между нормалью к вспомогательной поверхности и направлением на точку наблюдения. Согласно этому допущению амплитуда убывает по мере возрастания угла φ и становится равной нулю, когда абсолютная величина φ равна или больше 90°. Рисунок 8.21 поясняет это допущение, причем убывание амплитуды представлено убыванием толщины кривой. Так как при $\varphi > 90°$ амплитуда излучения вспомогательных источников обращается в нуль, то обратная волна невозможна. Однако, как уже указывалось, допущение относительно распределения амплитуд есть дополнительная гипотеза принципа Френеля. Можно сделать понятным отсутствие обратной волны следующими рассуждениями. Действительно, из каждой точки поверхности S возмущение распространяется и вперед и назад. Но *перед* поверхностью S возмущения еще нет, и действие сводится к образованию такого возмущения, которое мы и наблюдаем. *Сзади* же S возмущение уже пришло, и действие от S сводится к тому, чтобы это пришедшее возмущение компенсировать. В результате обоих действий — прямого и обратного — возмущение *проходит* через S и распространяется дальше в направлении B.

Аналогией, поясняющей это рассуждение, может служить распространение импульса по ряду соприкасающихся шаров. Шар, на который налетел с одной стороны другой шар, деформируется и затем, стремясь расправиться, сам становится источником импульса, направленного как *вперед*, так и *назад*. Но «импульс назад» расходуется на то, чтобы остановить налетевший сзади шар, а «импульс вперед» сдвигает передний шар в направлении первоначального импульса. В результате импульс передается от шара к шару в одну сторону — вперед.

В § 33 мы уже упоминали, что постулат Френеля, служащий для характеристики вторичных волн, интерференция которых объясняет все процессы распространения волн, являлся некоторой гипотезой, догадкой Френеля. Проведение расчетов по методу Френеля и сравнение их с опытом показывают, что гипотезу эту надо несколько изменить: ввести дополнительный фактор, учитывающий наклон вспомогательной поверхности к направлению действия, обосновать добавочными рассуждениями отсутствие обратной волны и изменить начальную фазу вторичных волн на $\pi/2$. Если первые два дополнения привлекаются из соображений более или менее наглядных, то опережение фазы «считается иногда чем-то таинственным», как выразился Рэлей в своей «Волновой теории света». Конечно, поскольку постулат Френеля является не чем иным, как некоторым рецептом, дающим общий метод решения задач волновой оптики, то очевидно, что и видоизменение этого постулата не представляет ничего особенного; просто более тщательный анализ показывает, что надо пользоваться несколько иным рецептом решения волновых задач, обеспечивающим лучшее согласие с опытом.

По существу работами Френеля была поставлена на твердую почву волновая оптика, разъяснены в основных чертах все существеннейшие трудности, представляемые явлениями дифракции, и выяснено значение длины световой волны для этих явлений.

Впоследствии (1882 г.) Кирхгоф показал, что принцип Гюйгенса–Френеля может быть получен из дифференциальных уравнений оптики (из волновых уравнений); при этом все отмеченные нами поправки входят автоматически.

В теории Кирхгофа фактор, определяющий зависимость амплитуды от угла φ, вычисляется из общих положений теории, причем он оказывается равным $(1+\cos\varphi)/2\lambda$, т.е. обращается в нуль лишь при $\varphi = 180°$, а не при $\varphi = 90°$, как предполагал Френель. То обстоятельство, что Френель получил правильный результат при неправильном допущении, объясняется неточностью его метода вычисления. Однако и теория Кирхгофа не свободна от некоторых математических и физических допущений. В частности, и в методе Кирхгофа не принимается во внимание влияние вещества экрана на световое поле вблизи него, что, как мы уже упоминали, не соответствует действительности, хотя и ведет лишь к незначительным ошибкам в тех случаях, когда размеры отверстий велики по сравнению с длиной волны. Однако, несмотря на это ограничение, метод Френеля–Кирхгофа имеет огромное значение для большого круга задач, являясь практическим путем их решения.

Строгое решение дифракционных задач как задач о распространении электромагнитных волн вблизи препятствий удалось получить лишь для сравнительно немногочисленных (4–5) случаев. Так, Зоммерфельд (1894 г.) решил задачу о дифракции на краю идеально проводящего прямого экрана. Расхождения между результатами теории Зоммерфельда и точными измерениями можно, по-видимому, отнести за счет невозможности точно осуществить на опыте условия теории (реальный экран нельзя сделать идеально проводящим и бесконечно тонким, а его края нельзя сделать идеально острыми, как предполагается при теоретическом рассмотрении). Сопоставление этого и некоторых других случаев, разобранных по методу, аналогичному методу Зоммерфельда, показывает, что приближенная трактовка на основе принципа Гюйгенса–Френеля и метода Юнга дает достаточно хорошее приближение для не очень больших углов дифракции. В соответствии с этим мы и в дальнейшем будем широко пользоваться методом Френеля, помня, конечно, об указанном ограничении.

Исторически первая волновая трактовка дифракции была дана Т. Юнгом (1800 г.), который исходил из представлений, внешне сильно отличающихся от френелевских. Помимо закона распространения волнового фронта в направлении лучей, выводимого из построения огибающей вторичных волн Гюйгенса, Юнг ввел принцип передачи или диффузии амплитуды колебаний вдоль волнового фронта (поперек лучей). Скорость такой передачи пропорциональна, по Юнгу, длине волны и растет с увеличением различия амплитуд в соседних точках волнового фронта. Кроме того, диффузия амплитуды сопровождается изменением фазы колебаний. Таким образом, по мере распространения волнового фронта происходит сглаживание, «расплывание» неоднородного распределения амплитуды на волновом фронте. Полосы, наблюдающиеся при дифракции на экране с отверстиями (см. рисунки 9.13, 9.14 и 9.18), возникают, по Юнгу, в результате сдвига фазы между колебаниями в падающей волне и колебаниями, диффундирующими в данную точку из соседних областей волнового фронта. В области геометрической тени падающая волна отсутствует, наблюдается чистый эффект диффузии, и полосы появиться не могут, что находится в соответствии с наблюдениями.

Поскольку Юнг избегал пользоваться анализом бесконечно малых, то принятая им форма изложения закона поперечной диффузии амплитуды (по существу своему дифференциального) представляла трудности для понимания и практического применения. По-видимому, по этой причине представления Юнга со времен Френеля считались неверными. Дальнейшее развитие теории показало, однако, что результаты, получаемые методом Френеля, приводятся с помощью математических преобразований к форме, отвечающей идеям Юнга [1]).

Юнговская трактовка дифракционных явлений особенно плодотворна в тех случаях, когда заранее не ясно распределение амплитуд вторичных источников Гюйгенса–Френеля на граничных поверх-

[1]) Подробнее о методе Т. Юнга см.: Г. Д. Малюжинец. Физический энциклопедический словарь.– М.: Советская энциклопедия, 1960, т. I, с. 606.

ностях. Это относится, например, к распространению волны вдоль поглощающей поверхности или к огибанию волной выпуклого препятствия. Такова, в частности, постановка вопроса при изучении распространения радиоволн над поверхностью Земли. Эта практически важная задача обстоятельно разобрана с помощью метода Юнга (М.А. Леонтович, В.А. Фок), который именуется в современной литературе *диффузионной теорией дифракции.* Метод Юнга широко применяется при исследовании распространения волн в неоднородных средах, в нелинейной оптике и в других областях.

Глава IX

ДИФРАКЦИЯ В ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЛУЧАХ (ДИФРАКЦИЯ ФРАУНГОФЕРА)

§ 39. Дифракция Фраунгофера от щели

До сих пор мы рассматривали дифракцию сферических или плоских волн, изучая дифракционную картину в точке наблюдения, лежащей на конечном расстоянии от препятствия. Именно этот круг вопросов был исследован Френелем, и поэтому дифракционные явления такого рода называют обычно *дифракцией Френеля.*

Фраунгофер (1821–1822 гг.) рассмотрел несколько иной тип явлений. В расположении Фраунгофера труба наводилась на отдаленный источник света (например, на освещенную щель) и наблюдалось изображение его вблизи фокальной плоскости трубы через ее окуляр.

Перед объективом трубы помещался экран с отверстиями, в большей или меньшей степени прикрывающими объектив. Оказалось, что вид изображения наблюдаемого объекта зависит от размеров и формы этих отверстий. Только тогда, когда открыта достаточная часть объектива, изображение имеет вид, точно воспроизводящий форму объекта. При уменьшении же работающей части объектива наблюдаемая картина в большей или меньшей степени искажается и может даже совсем не напоминать формы источника.

Так, например, при рассматривании удаленной светящейся нити через объектив, прикрытый экраном с узкой щелью, в фокальной плоскости объектива видна светлая размытая полоса с несколькими максимумами и минимумами.

Таким образом, изображение, даваемое объективом, есть всегда дифракционная картина, возникающая вследствие ограничения сечения светового пучка.

Это ограничение осуществляется так называемой апертурной диафрагмой объектива (см. § 88), роль которой в простейшем случае играет оправа какой-либо линзы объектива или специальная диафрагма. При значительной работающей части объектива (широкая апертурная диафрагма) наблюдаемая дифракционная картина хорошо воспроизводит вид объекта; при малых ее размерах изображение может сильно (до неузнаваемости) отличаться от объекта.

Так как наблюдение по описанному методу ведется в плоскости, сопряженной с плоскостью источника, т.е. в том месте, где свет собирается линзой трубы, то дифракционная картина значительно выигрывает в яркости, и ее наблюдение облегчается. Тип дифракции, при котором рассматривается дифракционная картина, образованная параллельными лучами, получил название *дифракции Фраунгофера.*

Хотя принципиально фраунгоферова дифракция не отличается от рассмотренной выше дифракции Френеля, тем не менее подробное рассмотрение этого случая весьма существенно. Математический разбор многих важных примеров дифракции Фраунгофера не труден и позволяет до конца рассмотреть поставленную задачу. Практически же этот случай весьма важен, ибо он находит применение при рассмотрении многих вопросов, касающихся действия оптических приборов (дифракционной решетки, оптических инструментов и т.д.).

Условия, близкие к условиям Фраунгофера, можно осуществить, поместив малый источник света в фокусе линзы и собрав свет при помощи второй линзы в некоторой точке экрана, расположенного в ее фокальной плоскости. Эта точка служит изображением источника. Помещая между линзами экраны с отверстиями различной величины и формы, мы меняем характер дифракционной картины, являющейся изображением источника; в зависимости от размеров и формы отверстий часть света пойдет по тем или иным направлениям и будет собираться в различных точках приемного экрана. В результате изображение будет иметь вид пятна, освещенность которого меняется от места к месту. Решить задачу дифракции — значит найти это распределение освещенности на экране в зависимости от размеров и формы препятствий, вызывающих дифракцию света. Мы ограничимся разбором наиболее простых и в то же время наиболее важных случаев, когда отверстие имеет форму прямоугольника или круга в непрозрачных экранах.

Наибольшее значение имеет случай, когда прямоугольное отверстие имеет незначительную ширину и бесконечную длину, т.е. является щелью. Практически, конечно, достаточно, чтобы ее длина была значительно больше ширины. Так, при ширине в 0,01–0,02 мм длина щели в несколько миллиметров может считаться бесконечной. В этом случае изображение точки растянется в полоску с максимумами и минимумами в направлении, перпендикулярном к щели, ибо свет дифрагирует вправо и влево от щели. При повороте щели около оси трубы вся картина также повернется. Если в качестве источника взять светящуюся нить, параллельную щели, то различные точки нити будут некогерентными между собой источниками и общая картина будет простым наложением картин от точечных источников. Мы будем наблюдать изображение нити, растянутое в направлении, перпендикулярном к направлению щели, т.е. опять-таки можем ограничиться рассмотрением картины в одном измерении.

Пусть волна падает *нормально* к плоскости щели. Разобьем площадь щели на ряд узких параллельных полосок равной ширины. Каждая из этих полосок может рассматриваться как источник волн, причем фазы всех этих волн одинаковы, ибо при нормальном падении плоскость щели совпадает с фронтом волны; кроме того, и амплитуды

наших элементарных волн будут одинаковы, ибо выбранные элементы имеют равные площади и одинаково наклонены к направлению наблюдения.

Эти два обстоятельства — равенство фаз[1]) и равенство амплитуд — чрезвычайно упрощают как графическое, так и аналитическое решение рассматриваемой задачи.

Графически результат сложения амплитуд для любой точки экрана можно представить векторными диаграммами рис. 9.1.

Диаграмма рис. 9.1 *а* соответствует совпадению направления наблюдения и первоначального направления волны ($\varphi = 0$), при котором элементарные волны не приобретают никакой разности фаз. Результирующая амплитуда $s = A_0$. Диаграмма рис. 9.1 *б* соответствует направлению, при котором крайние элементы волнового фронта в пределах щели дают разность фаз, равную π, т.е. разность хода, равную $\lambda/2$. Из рис. 9.2 видно, что это направление соответствует условию

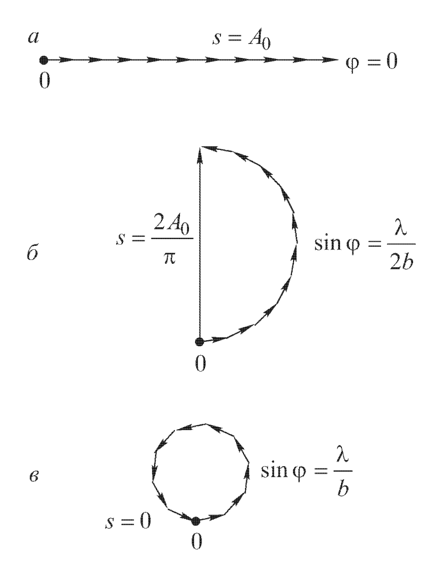


Рис. 9.1. Дифракция на щели: графическое вычисление результирующей амплитуды для разных направлений

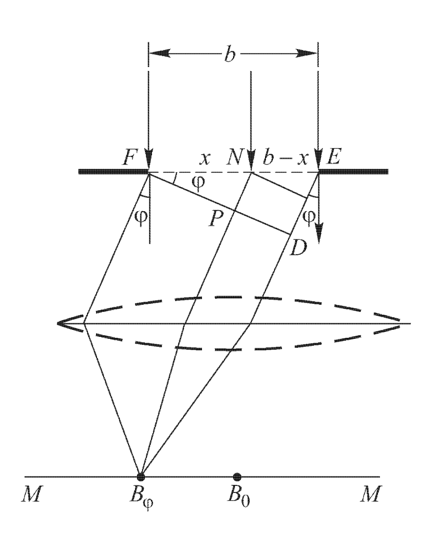


Рис. 9.2. Дифракция на щели: к аналитическому вычислению результирующей амплитуды

$ED = b\sin\varphi = \lambda/2$, где b — ширина щели FE. Результирующая амплитуда выражается вектором $s = 2A_0/\pi$, ибо s равно диаметру полуокружности, длина которой равна A_0. Диаграмма рис. 9.1 *в* соответствует разности хода лучей от крайних элементов волнового фронта,

[1]) При косом падении фазы в разных точках поверхности щели не были бы одинаковыми, а изменялись бы по простому закону. Вычисление в этом случае не представит большого труда.

равной λ, т.е. соответствует направлению, определяемому условием $b\sin\varphi = \lambda$. Результирующая амплитуда равна нулю, т.е. в указанном направлении света не будет. Нетрудно видеть, что нулевая амплитуда будет соответствовать также направлению, при котором разность хода от крайних элементов будет равна 2λ; следующий минимум соответствует разности хода 3λ и т.д., т.е. минимумы соответствуют направлениям

$$\sin\varphi = \frac{\lambda}{b}, \quad \frac{2\lambda}{b}, \quad \ldots, \quad \frac{n\lambda}{b},$$

где n — целое число.

Для аналитического расчета интенсивности света, распространяющегося по разным направлениям за щелью, напишем выражение для волны, посылаемой каждым элементом волнового фронта, и просуммируем действие всех элементов. Амплитуда волны, обусловленной одним таким элементом, пропорциональна его ширине dx, т.е. равна $C\,dx$. Множитель C определится из условия, что по направлению $\varphi = 0$ амплитуда волны, посылаемой всей щелью, равна A_0, т.е. $Cb = A_0$ или $C = A_0/b$. Таким образом, световое возмущение в соответствующем участке щели выразится соотношением

$$ds = \frac{A_0}{b}\,dx\cos\omega t.$$

Для отыскания действия всей щели в направлении, определяемом углом φ с первоначальным направлением, необходимо учесть разность фаз, характеризующую волны, доходящие от различных элементов волнового фронта до пункта наблюдения B_φ (см. рис. 9.2).

Проведем плоскость FD, перпендикулярную к направлению нормалей дифрагировавших волн. Распределение фаз, которое будет иметь место на этой плоскости, определяет соотношение фаз элементарных волн, собирающихся в точке B_φ, ибо линза не вносит дополнительной разности фаз (таутохронизм, см. § 20). Таким образом, достаточно определить разность хода, возникающую на пути от плоскости FE до плоскости FD. Из рис. 9.2 видно, что разность хода между волнами, идущими от элементарной зоны при точке F (край щели) и от какой-либо точки N (лежащей на расстоянии x от края щели), есть $NP = x\sin\varphi$. Световое возмущение в точке P плоскости FD запишется следующим образом:

$$ds = \frac{A_0}{b}\,dx\cos(\omega t - kx\sin\varphi), \tag{39.1}$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число. Результирующее возмущение в точке B_φ определится как сумма этих выражений, т.е. выразится интегралом по всей ширине щели (по всем значениям x от нуля до b). Итак,

$$s = \int ds = \int\limits_0^b \frac{A_0}{b}\,\cos(\omega t - kx\sin\varphi)\,dx =$$

$$= A_0\,\frac{\sin[(bk\sin\varphi)/2]}{(bk\sin\varphi)/2}\,\cos\left(\omega t - \frac{bk}{2}\sin\varphi\right). \tag{39.2}$$

Таким образом, результирующая волна, идущая в *направлении* φ, имеет амплитуду

$$A_\varphi = A_0 \frac{\sin[(bk\sin\varphi)/2]}{(bk\sin\varphi)/2} = A_0 \frac{\sin[(b\pi/\lambda)\sin\varphi]}{(b\pi/\lambda)\sin\varphi}, \tag{39.3}$$

так как $k = 2\pi/\lambda$. Во многих практических случаях, в частности при наблюдении в трубу, угол φ настолько мал, что можно положить $\sin\varphi \approx \varphi$, и тогда получим

$$A_\varphi = \frac{A_0 \sin(b\pi\varphi/\lambda)}{b\pi\varphi/\lambda}. \tag{39.3$'$}$$

Выражение (39.3′) показывает, что вдоль экрана (с изменением φ) освещенность меняется, проходя через максимумы и минимумы.

Исследуем выражение (39.3). A_φ обращается в нуль для углов φ, удовлетворяющих условию $(b\pi/\lambda)\sin\varphi = n\pi$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$ (целые числа), т.е. для

$$\sin\varphi = \frac{n\lambda}{b}. \tag{39.4}$$

Условие (39.4) определяет направления на точки экрана (и соответственно их положения), в которых амплитуда равна нулю и, следовательно, интенсивность минимальна. Оно совпадает с условием, выведенным выше графическим путем.

При определенных промежуточных значениях угла φ амплитуда достигает максимальных и минимальных значений. Наибольший максимум имеет место, когда

$$\frac{b\pi}{\lambda}\sin\varphi = 0, \text{ т. е. } \varphi = 0, \quad \text{при этом } A_\varphi = A_0.$$

Следующие максимумы, значительно уступающие по абсолютной величине главному, соответствуют значениям φ, определенным из условий

$$\frac{b\pi}{\lambda}\sin\varphi = 1{,}43\pi, \quad \frac{b\pi}{\lambda}\sin\varphi = 2{,}46\pi, \quad \frac{b\pi}{\lambda}\sin\varphi = 3{,}47\pi,$$
$$\frac{b\pi}{\lambda}\sin\varphi = 4{,}47\pi \text{ и т.д.} \tag{39.5}$$

(см. упражнение 68). На рис. 9.3 показана кривая распределения интенсивности (сплошная кривая)

$$I_\varphi = I_0 \frac{\sin^2[(b\pi/\lambda)\sin\varphi]}{[(b\pi/\lambda)\sin\varphi]^2}, \tag{39.6}$$

где $I_0 = A_0^2$ есть интенсивность света, идущего от щели шириной b в направлении первичного пучка.

Как видно из рис. 9.3, величина вторичных максимумов быстро убывает. Числовые значения интенсивностей главного и следующего максимумов относятся как

$$1 : 0{,}045 : 0{,}016 \text{ и т.д.};$$

приближенно эти отношения можно выразить в виде

$$1 : \frac{4}{9\pi^2} : \frac{4}{25\pi^2} : \ldots$$

Из установленных в настоящем параграфе формул ясно, что положение минимумов и максимумов зависит от длины волны λ. Поэтому дифракционная картина имеет описанный вид лишь для вполне монохроматического света. В случае белого света мы имеем совокупность соответствующих картин для разных цветов (сдвинутых одна относительно другой в соответствии с различием в λ).

Центральный максимум ($\varphi = 0$) будет, конечно, общим для всех длин волн, так что центр дифракционной картины представится в виде белой полоски, переходящей в цветную каемку. Вторичные максимумы для разных длин волн уже не совпадают между собой: ближе к центру располагаются максимумы, соответствующие более коротким

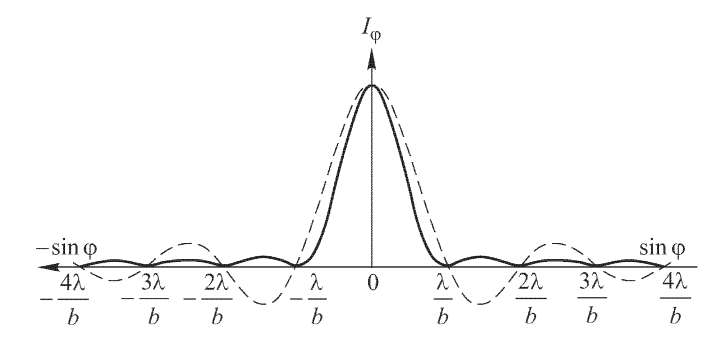


Рис. 9.3. Зависимость интенсивности (сплошная кривая) и амплитуды (штриховая кривая) от направления дифракции на щели

волнам. Длинноволновые максимумы отстоят друг от друга дальше, чем коротковолновые. Однако максимумы эти настолько расплывчаты, что никакого сколько-нибудь отчетливого разделения различных длин волн (спектрального разложения) при помощи дифракции на *одной* щели получить нельзя. Все подробности картины можно выяснить, пользуясь формулой (39.6) или рис. 9.3.

При разборе задачи о дифракции на щели мы допускали, что по *всей ширине* щели амплитуда и фаза вторичных волн одинаковы. Другими словами, мы пренебрегали искажающим влиянием краев щели, что допустимо, если ширина щели b значительно больше длины волны ($b \gg \lambda$). Таким образом, мы оставались в области применимости принципа Френеля–Кирхгофа, и наше решение имеет силу именно при этих условиях. Однако на практике нередко приходится иметь дело с дифракцией на щелях, ширина которых сравнима с длиной волны. В частности, современные дифракционные решетки (см. § 45) представляют совокупность щелей шириной в 1–2 мкм, т.е. сравнимых с длиной волны. Возникает вопрос, в какой мере метод Френеля–Кирхгофа пригоден в этих случаях? Для предельного случая ширины щели, малой по сравнению с длиной волны ($b \ll \lambda$), удалось дать строгое решение задачи, не пользуясь гипотезой Френеля–Кирхгофа (Рэлей, 1897 г.). В этом случае для амплитуды вместо фактора $\dfrac{\sin(b\pi\varphi/\lambda)}{b\pi\varphi/\lambda}$

получается иное выражение (через функции Бесселя), имеющее в общем ход, подобный изображенному на рис. 9.3, но несколько круче спадающий по мере роста φ и отличающийся в максимуме в $b\pi^2/4\lambda$ раз от значения, даваемого формулой (39.3). Так, при $b = \lambda/10$ максимальная амплитуда оказывается в 4 раза меньше, чем по теории Кирхгофа. Для промежуточных случаев, когда ширина щели сравнима с длиной волны, общий ход решения, очевидно, будет еще больше приближаться к решению по теории Кирхгофа. Действительно, выполненный Морзе и Рубинштейном (1938 г.) расчет показывает, что при щелях шириной около λ и больше приближение Кирхгофа может считаться достаточно удовлетворительным. Таким образом, даже для наиболее тонких современных дифракционных решеток пользование методом Кирхгофа не ведет к заметным ошибкам.

§ 40. Влияние ширины щели на дифракционную картину

Как показывает формула (39.4), расстояние минимумов от центра картины возрастает с уменьшением b. Таким образом, с *уменьшением* ширины щели центральная светлая полоса *расширяется*, захватывая все бо́льшую и бо́льшую область экрана.

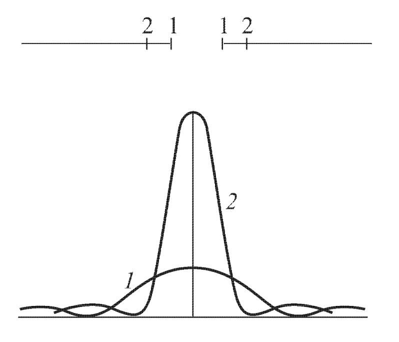


Рис. 9.4. Дифракция на щели; влияние ширины щели на распределение интенсивности: кривая *1* — узкая щель; кривая *2* — широкая щель

Если $b = \lambda$, то $\varphi_1 = 90°$, т.е. первый минимум соответствует углу $90°$; следовательно, он сдвинут на бесконечно удаленный край экрана. Освещенность экрана падает от центра к краям постепенно, асимптотически приближаясь к нулю; ширина центральной светлой полосы возрастает беспредельно. Таким образом, с уменьшением b освещенность стремится стать равномерной по всему экрану (рис. 9.4).

Наоборот, при увеличении ширины щели положение первых минимумов придвигается все ближе и ближе к центру картины, так что центральный максимум становится все резче и резче. При этом, как следует из (39.6), *относительная* интенсивность максимума остается неизменной; *абсолютная* же величина его возрастает, ибо возрастает энергия, проходящая через уширенную щель. При очень широкой щели (по сравнению с λ) мы получаем в центре резкое изображение линейного источника.

§ 41. Влияние размеров источника света

Во всяком реальном опыте источник имеет конечные размеры. Допустим, что угловой размер источника равен 2α. Это значит, что если мы производим опыт с удаленным источником (звезда, Солнце), то

2α есть угловой размер его, наблюдаемый из точки, расположенной в центре щели S (рис. 9.5 *а*); если наблюдение ведется с помощью коллиматора, то 2α есть угловой размер источника, наблюдаемого из центра коллиматорной линзы L (рис. 9.5 *б*). И в том, и в другом случае источник можно рассматривать как совокупность некогерентных и практически точечных источников, посылающих плоские волны, фронты которых наклонены в пределах угла 2α. Эти источники дадут ряд одинаковых дифракционных картин, смещенных друг относительно друга *в пределах* угла 2α (для простоты считаем отдельные источники одинаково яркими).

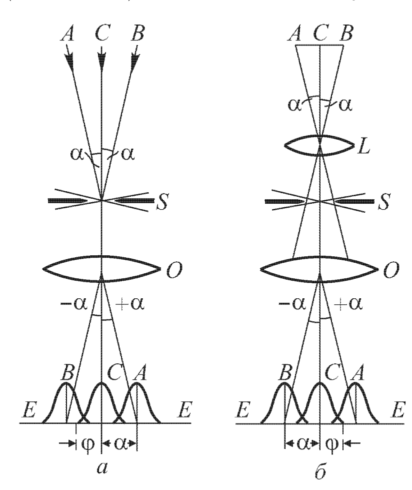


Рис. 9.5. Дифракция на щели; влияние размеров источника: 2α — угловая ширина источника; $2\varphi \approx \approx 2\lambda/b$ — ширина центрального дифракционного макимума; *а* — источник AB расположен в бесконечности; *б* — источник расположен в главной фокальной плоскости коллиматорной линзы L

На рис. 9.5 показаны положения главных максимумов от краев источника, которые располагаются по обе стороны главного максимума от центральной C точки нашего источника на угловых расстояниях $\pm\alpha$. Промежуточные точки источника дают максимумы, располагающиеся между A и B. Если щель широкая, так что $\varphi = \lambda/b$ значительно меньше α, то изображение источника геометрически почти подобно источнику и лишь по краям окаймлено слабыми дифракционными полосами (вторичные максимумы). По мере уменьшения ширины щели φ увеличивается, приближаясь к α. Изображение источника становится более расплывчатым, и дифракционное уширение составляет все бóльшую и бóльшую часть геометрической ширины изображения. При очень узкой щели, т.е. при φ, значительно большем α, дифракционное уширение становится значительно больше, чем геометрическая ширина изображения, так что наблюдаемая картина мало отличается от картины, даваемой точечным источником.

Дифракционные картины, наблюдаемые в этих случаях, показаны на рис. 9.6. При $\varphi \gg \alpha$ штриховая кривая, представляющая картину точечного источника, будет практически сливаться со сплошной кривой, дающей картину от источника шириной 2α.

Влияние размеров источника света на дифракционную картину можно выяснить иным способом, основанным на представлении о частичной пространственной когерентности излучения (см. § 22). Рассмотрим когерентность света в плоскости щели S (см. рис. 9.5), обусловленную действием всего протяженного источника. Согласно сказанному в § 22 область когерентности в указанной плоскости име-

ет размер $2l_{\text{ког}} = \lambda/2\alpha$, где 2α — угловые размеры источника. Если $2l_{\text{ког}} \gg b$, то все точки щели почти полностью когерентны, и картина в плоскости экрана EE будет практически совпадать с картиной, наблюдаемой при дифракции света от точечного источника (рис. 9.6 *в*).

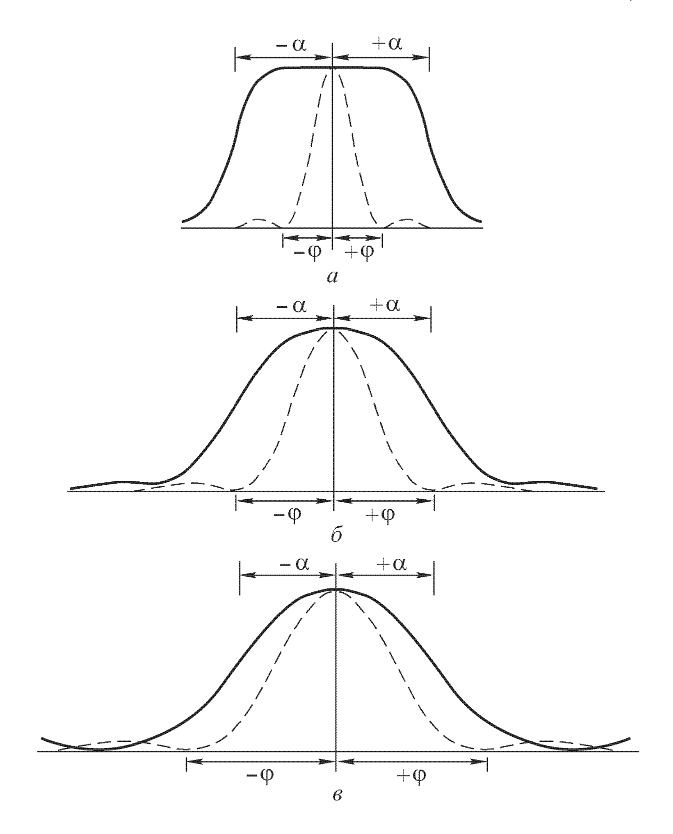
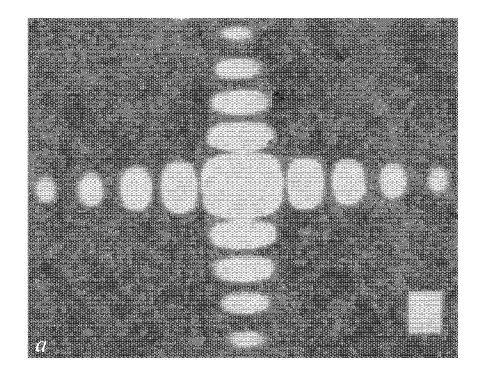


Рис. 9.6. Дифракция при угловой ширине источника 2α на щели шириной b: сплошная кривая — изображение источника, штриховая — изображение точки, расположенной в центре источника; *а* — широкая щель, $\varphi = \lambda/b < \alpha$; *б* — более узкая щель, $\varphi = \lambda/b = \alpha$; *в* — узкая щель, $\varphi = \lambda/b > \alpha$

В противоположном предельном случае $2l_{\text{ког}} \ll b$ когерентными оказываются точки щели, удаленные друг от друга на расстояние, малое в сравнении с ее шириной b. Поэтому ширина изображения будет определяться дифракцией света как бы на щели с шириной $2l_{\text{ког}}$ и в угловой мере окажется равной $\lambda/2l_{\text{ког}} = 2\alpha$, т.е. будет совпадать с угловыми размерами источника (рис. 9.6 *а*). Таким образом, применение понятия частичной пространственной когерентности света приводит нас к уже полученным выводам, что было, разумеется, заранее очевидно.

§ 42. Дифракция от прямоугольного и круглого отверстий

Если щель имеет ограниченную длину l, т.е. представляет собой прямоугольник со сторонами b и l, то, очевидно, и в направлении длины щели будет наблюдаться дифракционная картина. Общий вид, получаемый в этом случае, изображен на рис. 9.7 *а*. Форма отверстия показана маленьким белым прямоугольником в правом углу фотографии; источником света служит маленькая ярко освещенная дырочка (точечный источник), расположенная в фокусе большой линзы. Согласно изложенному в § 40 дифракционная картина шире в том направлении, которое соответствует более короткой стороне прямоугольника. В случае квадратного отверстия картина в обоих направлениях будет симметричной.



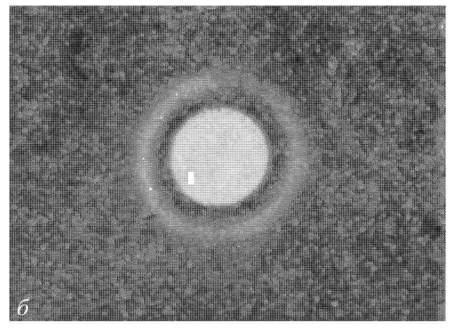


Рис. 9.7. Картина дифракции от прямоугольного (*а*) и круглого (*б*) отверстий; стороны прямоугольника относятся как 4 к 5

При графическом решении этой задачи волновой фронт разделяется на элементы в виде маленьких прямоугольников, получающихся от разбивки поверхности отверстия рядом линий, параллельных той и другой стороне прямоугольника. Направление дифрагировавшего луча определяется следующим образом. Через направление первоначального распространения луча проведем две плоскости, параллельные сторонам прямоугольника l и b соответственно. Тогда направление дифрагировавшего луча будет характеризоваться углами ψ и φ между его проекциями на указанные плоскости и направлением первоначального распространения. Направления, удовлетворяющие условиям $l \sin\psi = n\lambda$ или $b \sin\varphi = m\lambda$, где m и n — целые числа, соответствуют, очевидно, минимумам интенсивности, т.е. черным полосам на фотографии. Аналитическое рассмотрение задачи о прямоугольном отверстии не представляет трудностей и может быть выполнено по схеме § 39.

Результаты вычисления интенсивности выразятся формулой

$$I_{\varphi,\psi} = I_0 \, \frac{\sin^2(\pi b \sin\varphi/\lambda)}{(\pi b \sin\varphi/\lambda)^2} \, \frac{\sin^2(\pi l \sin\psi/\lambda)}{(\pi l \sin\psi/\lambda)^2}\,, \tag{42.1}$$

где I_0 — интенсивность света, идущего по первоначальному направлению $\varphi = 0$, $\psi = 0$. Так как обычно φ и ψ невелики, то можно положить $\sin\varphi = \varphi$ и $\sin\psi = \psi$, и тогда получим

$$I_{\varphi,\psi} = I_0 \frac{\sin^2(\pi b\varphi/\lambda)}{(\pi b\varphi/\lambda)^2} \frac{\sin^2(\pi l\psi/\lambda)}{(\pi l\psi/\lambda)^2}. \qquad (42.2)$$

Случай круглого отверстия представляет бо́льшие трудности для вычисления. При графическом решении задачи, разбив круглое отверстие на полоски параллельными линиями, заметим, что крайние полоски играют меньшую роль, чем в случае прямоугольного отверстия, где длина их такая же, как и центральной полоски. Поэтому в отличие от случая прямоугольника диаграмма будет составлена при помощи векторов неодинаковой длины.

В соответствии с этим и численные результаты расчета амплитуды получаются несколько иными[1]. Общий ход распределения интенсивности в дифракционной картине подобен случаю прямоугольного отверстия, но максимумы и минимумы располагаются в фокальной плоскости объектива, конечно, в виде концентрических колец (см. рис. 9.7 *б*), и угловой радиус темных колец определяется *приближенно* соотношением

$$\sin\varphi_m = \frac{0{,}61 + (m-1)/2}{R}\,\lambda,$$

где R — радиус отверстия и $m = 1, 2, \ldots$ Таким образом, чем больше радиус отверстия, тем мельче дифракционная картина. Более точные значения угловых радиусов темных и светлых (максимумов) колец даны в табл. 9.1.

Таблица 9.1

Угловые радиусы темных и светлых колец

Минимумы	Максимумы	Интенсивность
$\sin\varphi_1 = \frac{0{,}61}{R}\lambda$	$\sin\varphi'_1 = 0$	1
$\sin\varphi_2 = \frac{1{,}12}{R}\lambda$	$\sin\varphi'_2 = \frac{0{,}81}{R}\lambda$	0,0175
$\sin\varphi_3 = \frac{1{,}62}{R}\lambda$	$\sin\varphi'_3 = \frac{1{,}33}{R}\lambda$	0,0042
$\sin\varphi_4 = \frac{2{,}12}{R}\lambda$	$\sin\varphi'_4 = \frac{1{,}85}{R}\lambda$	0,0016

Последний столбец показывает относительную интенсивность в максимумах разного порядка. Из него видно, что уже в ближайшем максимуме интенсивность составляет менее 2 % от интенсивности центрального.

[1]) При выполнении расчета задача приводится к бесселевым функциям.

Случай дифракции на круглом отверстии очень важен практически, ибо все оправы линз и объективов имеют обычно круглую форму, так что при рассмотрении явлений в оптических инструментах всегда приходится считаться с дифракцией на круглом отверстии (см. гл. XV).

§ 43. Гауссовы пучки

В предыдущих § 40–42 и гл. VIII распределение освещенности, возникающее в результате дифракционных явлений, вычислялось для таких условий, когда амплитуда волнового фронта остается постоянной на протяжении всего отверстия, ограничивающего размеры волнового фронта. Во многих случаях это условие не выполняется. Например, можно получить изменение амплитуды вдоль волнового фронта, если на пути волны поместить пластинку с переменным коэффициентом пропускания. Разумеется, общие свойства дифракционных явлений (такие, как порядок величины угла дифракции) останутся прежними. Однако целый ряд важных деталей испытывает существенные изменения.

Пусть плоскость EE (рис. 9.8 a) представляет собой поверхность волнового фронта, и амплитуда колебаний в точке x', y' определяется функцией $a_0(x', y')$. Согласно постулату Френеля, возмущение в точке наблюдения $M(x, y, z)$ с координатами x, y, z выразится в виде интеграла по волновому фронту (см. § 33 и формулу (33.1))

$$s = \iint \frac{a_0(x', y')}{r} \cos\left(\omega t - kr + \frac{\pi}{2}\right) dx'\, dy', \qquad r = \sqrt{z^2 + (x - x')^2 + (y - y')^2}, \tag{43.1}$$

где r — расстояние от точки $(x', y', 0)$ до точки $M(x, y, z)$. Подынтегральное выражение в (43.1) описывает колебание в точке M, обусловленное вторичной волной Гюйгенса–Френеля, испущенной элементом $dx'\, dy'$ волнового фронта в плоскости EE. Если $a_0(x', y')$ отлично от нуля в области $0 \leqslant x' \leqslant b$, $0 \leqslant y' \leqslant l$ и сохраняет в ней постоянное значение, то соотношение (43.1) будет, очевидно, описывать дифракцию на прямоугольном отверстии со сторонами b, l, разобранную в § 42.

Часто приходится иметь дело с распределением амплитуды в плоскости волнового фронта, описываемым функцией Гаусса, т.е.

$$a(x', y') = a_0 \exp\left(-\frac{x'^2 + y'^2}{2w_0^2}\right). \tag{43.2}$$

Величина w_0 определяет, очевидно, область изменения x', y', где интенсивность колебаний, пропорциональная $a^2(x', y')$, уменьшается в e раз по сравнению с максимальным значением a_0^2, достигаемым при $x' = 0$, $y' = 0$. Таким образом, величина w_0 характеризует размеры области, в которой сосредоточена энергия волны в плоскости EE, и в дальнейшем будет называться *шириной распределения интенсивности*. Дифракционные явления в случае изменения амплитуды по

закону (43.2) обладают рядом замечательных особенностей, позволяющих сравнительно просто анализировать многие дифракционные задачи. Реально распределения амплитуд вида (43.2) возникают при излучении электромагнитных волн лазерами.

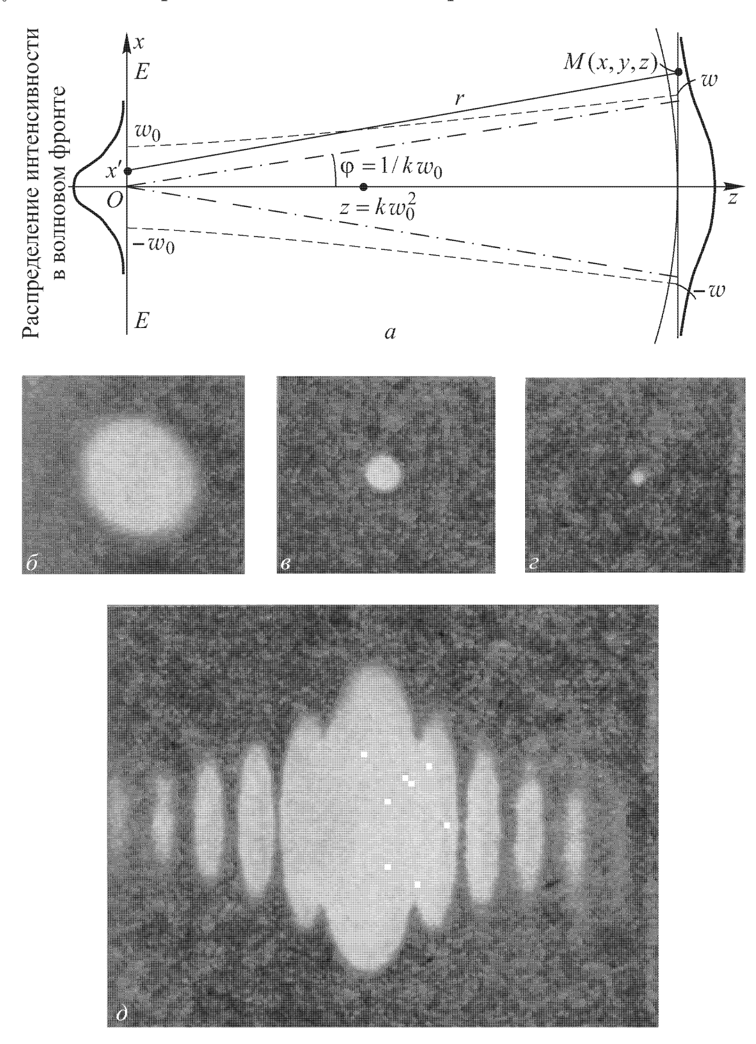


Рис. 9.8. К расчету дифракции волны с амплитудой колебаний, изменяющейся по волновому фронту (*а*), фотографии поперечного сечения лазерного пучка с гауссовым распределением интенсивности при разных расстояниях между плоскостью наблюдения и лазером (*б*, *в*, *г*) и фотография, полученная при ограничении лазерного пучка щелью (*д*)

Рассмотрим сначала дифракционные явления Фраунгофера. В этом случае множитель $1/r$ в (43.1) можно считать постоянным, равным $1/z$, и вынести его из-под знака интеграла, полагая $r \approx z$. Величину r в аргументе косинуса можно заменить приближенным выражением

$$r \approx r_0 - \frac{xx' + yy'}{z}, \quad z \gg \frac{w_0^2}{\lambda},$$

где $r_0 = OM$. Тогда интегрирование в (43.1) приводит к результату

$$s = 2\pi \frac{a_0 w_0^2}{z} \exp\left[-\frac{(kw_0)^2}{2z^2}\left(x^2 + y^2\right)\right\} \cos(\omega t - kr_0). \tag{43.3}$$

Соотношение (43.3) гласит, что дифрагировавшая волна является сферической волной (фаза постоянна на поверхности $r_0 = \text{const}$), а распределение амплитуды по волновому фронту обладает осевой симметрией и также определяется гауссовой функцией

$$\exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2w^2}\right), \tag{43.4}$$

причем ее ширина w оказывается равной

$$w = \frac{z}{kw_0} = \frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{2w_0} z,$$

или в угловой мере

$$\varphi \approx \frac{w}{z} = \frac{1}{kw_0} = \frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{2w_0}. \tag{43.5}$$

Таким образом, главная часть энергии дифрагировавшей волны сосредоточена в интервале углов, определяемом отношением длины волны λ к ширине распределения w_0 в плоскости EE. Следовательно, основной закон дифракционных явлений Фраунгофера, установленный в § 41, 42 на примере дифракции на щели и прямоугольном отверстии, выполняется и в данном случае. При количественном сопоставлении соотношения (43.5) с его аналогом в случае дифракции на квадратном отверстии

$$\varphi = \frac{\lambda}{2b}$$

ширину щели b следует сопоставлять с $2w_0$, т.е. угловая ширина дифракционного максимума при гауссовом распределении амплитуд оказывается в $\pi/2$ раз меньше, чем в случае прямоугольного распределения.

Дифракционная картина, описываемая формулой (43.4), характеризуется монотонным уменьшением интенсивности при увеличении угла дифракции от нулевого значения, т.е. отсутствием осцилляций и линий нулевой интенсивности (окружности при круглом отверстии и прямых линий при квадратном), а также быстрым спаданием интенсивности в «крыльях». Все эти качества очень полезны в оптических приборах, и иногда специально вводят на периферийных участках плоскости EE искусственное ослабление волны (так называемая *аподизация*).

Замечательная особенность рассматриваемого случая состоит в том, что гауссово распределение амплитуды имеет место не только в плоскости EE ($z = 0$) и в зоне Фраунгофера ($z \gg w_0^2/\lambda$), но и при всех промежуточных расстояниях между EE и точкой наблюдения M. Именно, расчет показывает, что при произвольных z выполняется соотношение (см. упражнение 72)

$$s = \frac{2\pi}{k}\, a_0 \frac{w_0^2}{\sqrt{w_0^4 + (z/k)^2}}\; \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2w^2}\right)\cos\left[\omega t - k\left(z + \frac{x^2+y^2}{2R}\right) - \alpha\right], \tag{43.6}$$

$$w^2 = w_0^2 + \left(\frac{z}{kw_0}\right)^2, \quad R = z + \frac{\left(kw_0^2\right)^2}{z}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{z}{kw_0^2}.$$

Величина w есть, очевидно, ширина гауссова распределения интенсивности поля на расстоянии z от экрана EE. Согласно соотношению (43.6) квадрат ширины распределения на расстоянии z равен сумме квадрата исходной ширины (w_0^2) и квадрата ширины z/kw_0, подсчитываемой по формуле для дифракции Фраунгофера (ср. (43.5)). При $z \to \infty$ (практически при $z \gg kw_0^2 = 2\pi w_0^2/\lambda$) величина w стремится к значению z/kw_0, характерному для фраунгоферовой дифракции. При малых z (т.е. $z \ll kw_0^2$) ширина w переходит в w_0. Изменение ширины распределения интенсивности при удалении от плоскости EE показано на рис. 9.8 *а*, где штриховые линии (гиперболы) иллюстрируют увеличение ширины и ее асимптотическое приближение к фраунгоферовскому значению z/kw_0 (штрихпунктирные линии); расстояние $z = kw_0^2 = 2\pi w_0^2/\lambda$ условно можно принять за границу между областями френелевой и фраунгоферовой дифракционных картин. При $z = kw_0^2$ ширина w отличается от w_0 в $\sqrt{2}$ раз.

Фаза волны, определяемая соотношением (43.6), сохраняет постоянное значение на поверхности, которая описывается уравнением

$$z + \frac{x^2+y^2}{2R} = \text{const}.$$

При малых значениях $x^2 + y^2$ это уравнение задает сферу, и величина R, следовательно, играет роль радиуса кривизны сферического волнового фронта. Если $z \gg kw_0^2$, то $R \approx z$, что соответствует дифракции Фраунгофера. Если $z \ll kw_0^2$ (дифракция Френеля), то $R \approx (kw_0^2)^2/z$ и при $z \to 0$ волновой фронт переходит в плоский. Минимальное значение радиуса кривизны $R_{\min} = 2kw_0^2$ достигается при $z = kw_0^2$, т.е. на границе между областями френелевой и фраунгоферовой картин.

Зафиксируем расстояние z и в соответствии с правилами, изложенными в § 33, 34, построим зоны Френеля в плоскости EE. Радиус m-й зоны Френеля дается выражением

$$r_m = \sqrt{2\pi z \frac{m}{k}} = \sqrt{\lambda z m}, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

Если положить здесь $z = kw_0^2$, то для этого расстояния

$$r_m = \sqrt{\pi m}\,\sqrt{2}\, w_0,$$

т.е. первая зона Френеля имеет радиус, в $\sqrt{\pi}$ раз бо́льший ширины распределения амплитуды в плоскости EE, равной $\sqrt{2}\,w_0$. При еще большем удалении от плоскости EE область концентрации поля также будет иметь размеры, значительно меньшие радиуса первой зоны Френеля. Указанное соотношение между r_1 и w_0 и составляет основной признак дифракции Фраунгофера. Наоборот, приближение точки z к плоскости EE приводит к уменьшению радиусов зоны Френеля заданного порядка m, т.е. при $z \ll kw_0^2$ на ширине распределения амплитуд $\sqrt{2}\,w_0$ укладывается много зон Френеля (примерно $kw_0^2/\pi z$), и распространение волны вправо от плоскости EE можно рассматривать по методу Френеля (см. § 33).

Как и в предельном случае дифракции Фраунгофера, в области малых значений z, отвечающих дифракции Френеля, при гауссовом распределении амплитуд не наблюдается осцилляций интенсивности, характерных для дифракции на отверстиях, выделяющих из волнового фронта участок с приблизительно равными амплитудами (см. § 36, 37). Это различие связано, конечно, с постепенностью уменьшения амплитуды поля при удалении от точки O, а отнюдь не с конкретным (гауссовым) законом этого уменьшения, который использовался в вычислениях. Действительно, рассмотрим случай очень малых z, когда радиус отверстия в экране значительно больше радиуса первой зоны Френеля, и расположим точку M вблизи границы геометрической тени. Тогда можно, очевидно, рассчитывать возмущение в точке M, не учитывая вторичных волн, приходящих от противоположного края отверстия, т.е. пользоваться результатами анализа дифракции на экране с прямолинейным краем (см. § 36, 37). Колебания интенсивности в дифракционной картине, изображенной на рис. 8.20, возникали в результате того, что по мере удаления точки наблюдения от края экрана в игру последовательно вступали четные и нечетные зоны (точнее, лунки) Френеля; приходящие от них волны отличаются по фазе на величину $(m-1)\pi$ от фазы волны первой зоны Френеля, т.е. четные зоны приводят к уменьшению освещенности в точке наблюдения, а нечетные — к ее увеличению (минимумы и максимумы на рис. 8.20). При этом существенно, что амплитуды волн от последовательных зон, хотя и изменяются с возрастанием номера m, но очень медленно. Если же экран с отверстием отсутствует, а поле в плоскости EE (см. рис. 9.8 a) изменяется вдоль оси Ox, то смещение точки M, например, к оси Oz, сопровождается не только приходом в нее волны от новой зоны Френеля, но и увеличением амплитуд волн от зон Френеля меньших номеров и прежде всего от первой зоны Френеля, расположенной против точки M. В результате влияние второго фактора оказывается сильнее влияния первого, и освещенность в точке M изменяется монотонно.

Таким образом, возникновение дифракционных полос вблизи границы геометрической тени характерно только в случае ограничения сечения волнового фронта непрозрачным экраном с отверстием. В случае же постепенного уменьшения амплитуды колебаний, что тоже эквивалентно некоторому эффективному ограничению волнового фронта, дифракционные явления приводят только к расширению по-

перечного сечения пучка, а чередования областей с бо́льшими и меньшими значениями освещенности не наблюдается. Это хорошо видно на фотографиях (рис. 9.8 *б*, *в*, *г*), полученных с помощью гелий-неонного лазера при последовательном смещении плоскости наблюдения. Фотография рис. 9.8 *д* получена после ограничения пучка в плоскости EE щелью из лезвий бритв, в результате чего появились характерные дифракционные полосы (ср. рис. 9.7 *а*).

Пример гауссова пучка служит прекрасной иллюстрацией к диффузионной интерпретации дифракционных явлений, изложенной в § 38. Согласно этой интерпретации, дифракцию можно рассматривать как результат диффузии амплитуды поля вдоль волнового фронта по мере его распространения в среде. Картина дифракционного расширения гауссова пучка, изображенная на рис. 9.8, действительно копирует пространственное распределение плотности диффундирующих частиц, если последовательным положениям волнового фронта сопоставить последовательные моменты времени после начала диффузии.

Точное решение дифракционной задачи, изложенное выше, можно использовать для уточнения постулата Френеля (см. § 38). Положим в формуле (43.6) $z = 0$; тогда будем иметь

$$s = \frac{2\pi}{k}\, a_0 \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2w_0^2}\right)\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right). \tag{43.7}$$

Вместе с тем, при $z = 0$ возмущение s должно принимать значение, отвечающее волне, приходящей слева на плоскость EE, т.е.

$$s = s_0 \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2w_0^2}\right)\cos \omega t. \tag{43.8}$$

Из сопоставления последних двух выражений видно, что амплитуда a_0 вторичных волн, испускаемых элементом $dx'\,dy'$ плоскости EE, связана с амплитудой s_0 световых колебаний в этой плоскости соотношением

$$a_0 = \frac{k}{2\pi}\, s_0 = \frac{1}{\lambda}\, s_0. \tag{43.9}$$

Кроме того, наличие фазового сдвига, равного $\pi/2$, указывает на сдвиг фазы между колебаниями в реальной световой волне и во вторичных волнах Френеля. Поэтому в соответствии с выводом, полученным в § 38 с помощью рассмотрения векторной диаграммы, источникам вторичных волн следует приписывать фазу, увеличенную на $\pi/2$ по сравнению с фазой световых колебаний, т.е. ввести член $\pi/2$ в аргумент косинуса в выражении (43.1).

При расчете дифракционной картины в качестве исходного распределения поля использовалось распределение в плоскости EE, где волновой фронт плоский, а ширина распределения минимальная. Разумеется, за исходное или заданное можно принять распределение поля в любой плоскости, и вычисления световых колебаний во всем пространстве должны привести к прежним результатам. Из сказанного вытекает важный вывод: если в каком-либо месте волновой фронт сферический и распределение амплитуды поля имеет вид гауссовой кривой, то эти свойства сохраняются во всем пространстве, а изме-

няются лишь радиус кривизны волнового фронта и ширина распределения амплитуды. Волна этого типа называется *гауссовой волной* или *гауссовым пучком*. В частности, поле в плоскости EE, принятое ранее за исходное, может быть реально образовано за счет гауссовой волны, приходящей на EE слева.

Для пояснения высказанного соображения рассмотрим преобразование гауссова пучка, осуществляемое идеальной тонкой линзой. Если поперечные размеры линзы достаточно велики, так что можно пренебречь диафрагмированием гауссова пучка на ней, то действие линзы сводится к изменению кривизны волнового фронта на величину $1/f$,

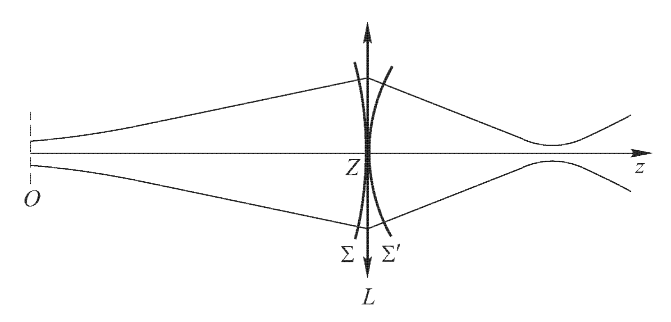


Рис. 9.9. Преобразование гауссова пучка идеальной тонкой линзой L: Σ, Σ' — волновые фронты до и после прохождения линзы

где f — фокусное расстояние линзы (рис. 9.9). Пусть линза находится в плоскости $z = Z$. Тогда, до прохождения через линзу, фаза гауссова пучка в плоскости линзы будет равна

$$\omega t - k\left(Z + \frac{x^2 + y^2}{2R}\right) - \alpha,$$

а после прохождения

$$\omega t - k\left[Z + \frac{x^2 + y^2}{2}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{f}\right)\right] - \alpha.$$

При этом распределение амплитуды не изменяется. Следовательно, после линзы пучок останется гауссовым, но радиус кривизны R' его волнового фронта будет определяться соотношением

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} - \frac{1}{f}.$$

Если линза достаточно короткофокусная и $f < R$, то $R' < 0$, т.е. кривизна волнового фронта после линзы имеет иной знак, чем до нее, и гауссов пучок будет иметь вид сходящейся волны (см. рис. 9.9).

§ 44. Дифракция на двух щелях

Рассмотрим опять явление дифракции на щели по схеме, изображенной на рис. 9.2. Положение дифракционных максимумов и мини-

мумов не будет зависеть от положения щели, ибо положение максимумов определяется *направлением*, по которому идет бо́льшая часть испытавшего дифракцию света. Поэтому при перемещении щели параллельно самой себе никаких изменений дифракционной картины не должно наблюдаться. Если в непрозрачной перегородке проделаны две идентичные параллельные щели, то они дадут одинаковые накладывающиеся друг на друга дифракционные картины, вследствие чего максимумы соответственным образом усилятся. Однако в действительности картина окажется сложнее, ибо надо принять в расчет взаимную интерференцию волн, идущих от первой и второй щелей.

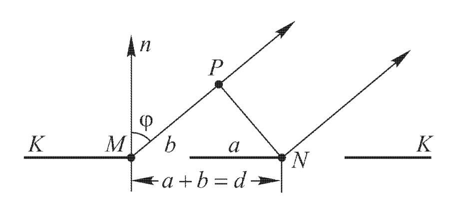


Рис. 9.10. К определению положения главных максимумов и добавочных минимумов при дифракции на двух параллельных щелях

Предположим, что мы прорезали в перегородке KK (рис. 9.10) две щели шириной b, разделенные непрозрачным промежутком a, так что $a + b = d$. Очевидно, что минимумы будут на прежних местах, ибо те направления, по которым *ни одна* из щелей не посылает света, не получат его и при двух щелях. Кроме того, однако, возможны направления, в которых колебания, посылаемые двумя щелями, взаимно уничтожаются. Это будут, очевидно, направления, которым соответствует разность хода $\lambda/2$, $3\lambda/2$, ... для волн, идущих от *соответственных* точек обеих щелей. Такие направления определяются, как легко видеть из рис. 9.10, условием

$$MP = MN\sin\varphi = \frac{1}{2}\,\lambda,\ \frac{3}{2}\,\lambda, \ldots,$$

т.е.

$$d\sin\varphi = \frac{1}{2}\,\lambda,\ \frac{3}{2}\,\lambda,\ \frac{5}{2}\,\lambda, \ldots \qquad (44.1)$$

Наоборот, в направлениях, определяемых из условий

$$d\sin\varphi = \lambda,\ 2\lambda, \ldots, \qquad (44.2)$$

действие одной щели усиливает действие другой, так что этим направлениям соответствуют *главные максимумы*. Таким образом, полная картина определяется из условий:

прежние минимумы	$b\sin\varphi =$	$\lambda,$	$2\lambda,$	$3\lambda,$	$\ldots;$
добавочные минимумы	$d\sin\varphi =$	$\frac{1}{2}\,\lambda,$	$\frac{3}{2}\,\lambda,$	$\frac{5}{2}\,\lambda,$	$\ldots;$
главные максимумы	$d\sin\varphi = 0,$	$\lambda,$	$2\lambda,$	$3\lambda,$	$\ldots,$

т.е. между двумя главными максимумами располагается один добавочный минимум. Расстояние между первичными минимумами (от одной щели) зависит от ширины щели b. Если b значительно меньше d (далекие и узкие щели), то между двумя первоначальными минимумами может расположиться значительное число новых минимумов и максимумов.

Кривая рис. 9.11 показывает распределение интенсивностей. Штриховая кривая соответствовала бы сложению интенсивностей обеих щелей, например, в том случае, если бы обе щели освещались

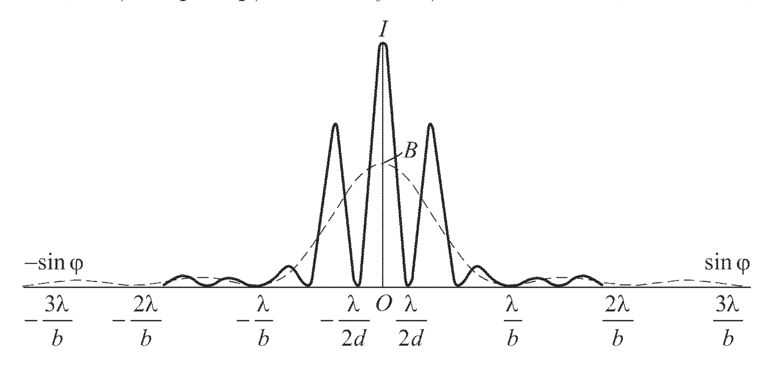


Рис. 9.11. Распределение интенсивности при дифракции на двух параллельных щелях шириной b, расположенных на расстоянии d: штриховая кривая относится к случаю освещения щелей некогерентным светом, сплошная — к освещению когерентным светом, $OI = 2OB$

некогерентными между собой световыми пучками. Сплошная кривая дает действительное распределение интенсивностей. Общие световые потоки сквозь щели, определяемые площадями, заключающимися между этими кривыми и осью абсцисс, должны, конечно, оставаться одинаковыми в обоих случаях.

При увеличении расстояния между щелями отдельные максимумы станут у́же и чаще, но указанная площадь останется неизменной. Так как для одной щели центральный максимум гораздо интенсивнее боковых, то и при наличии двух одинаковых щелей почти весь свет сосредоточен в области центрального максимума, т.е. в пределах, определяемых условием $\sin\varphi = \pm\lambda/b$ (см. рис. 9.11). Таким образом, угловая ширина основной дифракционной картины равна $2\lambda/b$.

§ 45. Интерферометр Рэлея. Измерение углового диаметра звезд

Дифракция от двух щелей, облегчающая переход к рассмотрению дифракционной решетки, имеет и непосредственный интерес по тем применениям, которые она получила в разных физических измерениях.

Известный интерференционный опыт Юнга, имеющий большое историческое значение (см. § 16), соответствует случаю дифракции на двух щелях. Рэлей использовал этот случай для построения простого интерференционного (или дифракционного) рефрактометра, в котором два интерферирующих луча получаются в результате дифракции плоской волны на двух щелях. Схема расположения Рэлея изображена на рис. 9.12. Ярко освещенная щель S служит источником света, расположенным в фокальной плоскости объектива L_1, прикры-

того экраном AB с двумя щелями, за которым располагаются трубки рефрактометра R_1 и R_2. В фокальной плоскости второго объектива

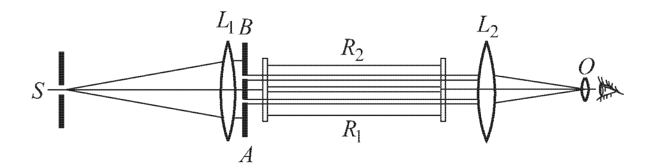
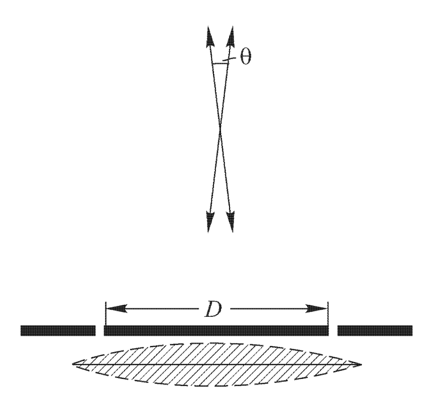


Рис. 9.12. Схема интерферометра Рэлея

L_2 получается дифракционная картина, рассматриваемая в сильную лупу. При изменении показателя преломления вещества в одной из трубок картина смещается.



Главный недостаток прибора состоит в том, что при довольно значительном расстоянии между щелями в экране AB, необходимом для помещения двух трубок R_1, R_2, дифракционная картина получается в виде очень тесно расположенных полос, для наблюдения которых требуются сильное увеличение и специальные приспособления для точного измерения смещения полос. Впрочем, в современном выполнении рефрактометр Рэлея является удобным техническим прибором.

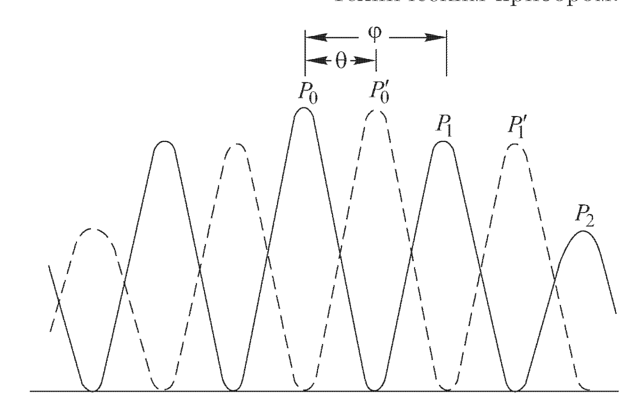


Рис. 9.13. Схема метода Физо–Майкельсона для определения углового расстояния между звездами или углового диаметра звезд

Особенный интерес представляет применение дифракции на двух щелях к решению важнейшей астрономической задачи об определе-

нии углового расстояния двойных звезд или углового диаметра отдаленных звезд. Принцип такого измерения был выдвинут еще Физо в 1868 г. Майкельсон в 1890 г. указал на возможные принципиальные усовершенствования предложенного приема, но только в 1920 г. тому же Майкельсону удалось осуществить предполагаемое расположение и измерить диаметры некоторых звезд. Рисунок 9.13 поясняет идею метода.

Пусть имеются две звезды на угловом расстоянии θ друг от друга, столь малом, что в фокальной плоскости телескопа изображения этих звезд различить невозможно. Если объектив телескопа прикрыт щитом с двумя щелями на расстоянии D друг от друга, то от каждой звезды будет получена дифракционная картина в виде мелких ярких полосок.

Система полос от каждого из двух источников сдвинута друг относительно друга на угловое расстояние θ. Центральная полоса P_0 сдвинута относительно ближайшей полосы своей системы P_1 на угловое расстояние φ, определяемое из условий $D \sin\varphi = \lambda$ или $\varphi = \lambda/D$. Меняя расстояние между щелями D, можно изменять угол φ. Легко видеть, что когда $\varphi = 2\theta$, т.е. когда максимумы одной системы интерференционных полос приходятся на минимумы другой, видимость этих полос наихудшая: полосы исчезают. При дальнейшем изменении расстояния видимость вновь улучшается. Таким образом, измерение сводится к определению расстояния D_0, которому соответствует первое ухудшение видимости. Для данной длины волны λ искомое угловое расстояние $\theta = \lambda/2D_0$.

Если вместо двух источников (двойная звезда) мы имеем источник с угловым диаметром θ, то он дает интерференционную картину, изображенную на рис. 9.14, где заштрихована наблюдающаяся полоса,

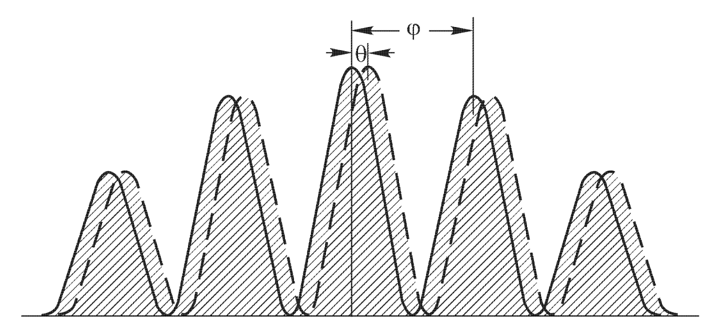


Рис. 9.14. К методу определения диаметров звезд. Схематическое изображение интерференционной картины для источника с угловым диаметром θ. Угол $\varphi = \lambda/D$ определяется расстоянием между щелями

а штриховыми и сплошными линиями намечены полосы, обусловленные краями источника в отдельности; заштрихованная область дает ориентировочное представление о виде полос. Полосы будут иметь тот же период, но видимость их будет уменьшаться по мере увеличения углового размера источника. Исчезновение видимости должно иметь

место при таком расстоянии D, при котором $\varphi = \theta$, т.е. $\theta = \lambda/D$. Итак, метод позволяет определить также и угловой диаметр источника света (ср. также § 41).

Последнее заключение непосредственно вытекает и из расчетов степени пространственной когерентности, выполненных в § 22. Видимость интерференционных полос в опыте Юнга, модификацией которого является метод Майкельсона, равна степени когерентности колебаний в плоскости щелей, расположенных на расстоянии D. Согласно соотношению (22.24) степень когерентности обращается в нуль, если $\theta = \lambda/D$ (принято во внимание изменение обозначений), что совпадает с предыдущим выводом.

Указанным методом Майкельсон в начале 1920 г. измерил угловое расстояние между компонентами двойной звезды Капеллы, оказавшееся равным $0{,}042''$. При помощи этого прибора можно было даже проследить орбитальное движение звезд друг относительно друга, ибо в зависимости от положения звезд должны быть соответствующим образом ориентированы и щели на объективе.

В декабре 1920 г. Майкельсон впервые измерил диаметр Бетельгейзе — звезды, принадлежащей к типу так называемых гигантов. Угловой диаметр Бетельгейзе оказался равным $0{,}047''$. Зная расстояние до звезды (звездный параллакс ее не превосходит 0,03), можно было вычислить линейный диаметр Бетельгейзе; он оказался равным $3{,}9 \cdot 10^8$ км, т.е. превосходящим диаметр орбиты Земли ($3 \cdot 10^8$ км). Для сравнения напомним, что диаметр Солнца равен $1{,}4 \cdot 10^6$ км. Как видно из теории метода Майкельсона, чувствительность метода тем больше, чем больше расстояние между щелями на объективе. Самый большой из существовавших тогда рефлекторов имел диаметр всего около 5 м, и поэтому Майкельсон придумал способ увеличить расстояние между двумя пучками, заменив щели системой зеркал $S_1S_3S_4S_2$, действие которых понятно из рис. 9.15 *а*.

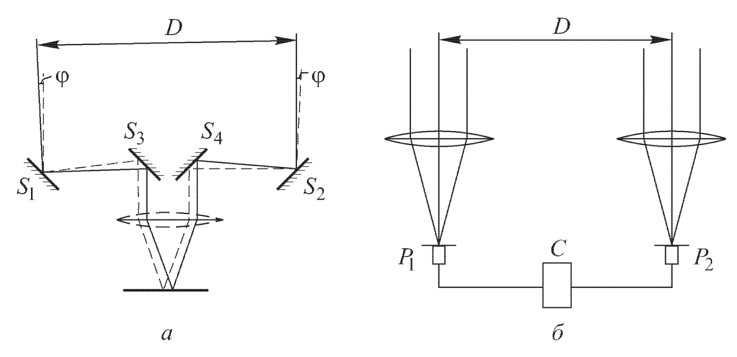


Рис. 9.15. Схема опытов по измерению диаметра звезд, предложенных Майкельсоном (*а*) и Брауном и Твиссом (*б*)

Вполне очевидно, что видимость полос определяется степенью когерентности колебаний на зеркалах S_1 и S_2, хотя период интерференционной картины зависит от расстояния между зеркалами S_3 и S_4.

Расстояние S_1S_2, играющее роль расстояния D в аппарате Майкельсона, можно было довести до 6 м. Несмотря на крайнюю простоту идеи такого увеличения D, техническое выполнение ее крайне трудно, ибо расстояние между зеркалами S_1S_2 должно быть переменным, а во время измерения положение их должно быть строго неизменным с точностью до длины волны. В настоящее время построен прибор Майкельсона, позволяющий доводить расстояние до 18 м и, следовательно, измерять углы до тысячной доли секунды. Интерференционная картина, даваемая одиночной звездой в приборе Майкельсона, изображена на рис. 9.16. Параллельные черные линии представляют собой результат интерференции световых пучков, отраженных от двух зеркал; они пересекают дифракционное изображение звезды в объективе телескопа, прикрытом экраном D (см. рис. 9.13). При соответствующем раздвижении зеркал S_1 и S_2 интерференционные полосы исчезают, и остается дифракционное изображение звезды.

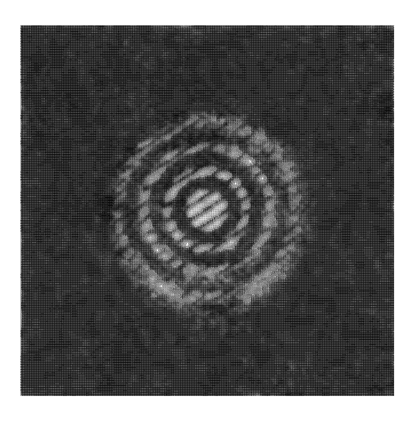


Рис. 9.16. Изображение одиночной звезды в приборе Майкельсона.

Указанные обстоятельства, затрудняющие получение стабильной интерференционной картины, оказываются несущественными в близком по схеме методе Брауна и Твисса (1958 г.).

Идея метода поясняется схемой рис. 9.15 *б*. Два фотоумножителя P_1 и P_2 регистрируют излучение в двух изображениях одной и той же звезды, разнесенных на расстояние D. Усиленные фототоки перемножаются и усредняются за большой промежуток времени в устройстве C (коррелятор). Поскольку фототоки пропорциональны интенсивностям, измеряемая величина, обозначаемая G_{12}, характеризует степень корреляции флуктуаций интенсивности в двух изображениях звезды (ср. § 22). Более детальный анализ показывает, что $G_{12} \propto 1 + \gamma_{12}^2$, т.е. величина G_{12}, как и степень когерентности γ_{12}, зависит от комбинации $D\theta/\lambda$ и уменьшается с увеличением расстояния D. Таким образом, измерения G_{12} при различных расстояниях D между изображениями звезды позволяют определять их угловые размеры θ.

Важной чертой метода Брауна и Твисса является значительно меньшая чувствительность измерений к небольшим неточностям в перемещении приемников света, равно как и к нестабильности атмосферы, чем в интерференционном методе Майкельсона. Это обстоятельство позволило создать прибор, в котором расстояние D может доходить до 180 м и который позволяет измерять угловые диаметры звезд вплоть до $0{,}0005'$.

Принцип измерения диаметра звезд был применен (Зигмонди) также для измерения субмикроскопических частиц, размер которых не позволяет непосредственно различать их в микроскоп. И в этом

случае диафрагма с двумя щелями, вырезающая пучки лучей, поступающие от наблюдаемой частицы в объектив микроскопа, создает в поле зрения дифракционную картину, так что частицы представляются в виде светлых полосок, параллельных линии, соединяющей щели, и испещренных максимумами. Раздвигая щели, добиваемся исчезновения дифракционных максимумов и таким образом определяем поперечник частицы, параллельный линии D. Поворачивая диафрагму, можно найти размеры частицы во всех направлениях.

§ 46. Дифракционная решетка

Рассмотрение дифракции на двух щелях показывает, что в этом случае дифракционные максимумы становятся более узкими, чем в случае одной щели. Увеличение числа щелей делает это явление еще более отчетливым.

Повторяя рассуждение § 44, найдем, что между каждыми двумя главными максимумами ($d\sin\varphi = 0, \lambda, 2\lambda, \ldots$) при трех щелях располагаются *два* добавочных минимума ($d\sin\varphi = \lambda/3$ и $2\lambda/3$, $4\lambda/3$ и $5\lambda/3$ и т.д.), при четырех щелях — *три* добавочных минимума и т.д.

В общем случае N щелей ширины b с промежутками a (период решетки $d = a + b$) имеем

прежние минимумы	$b\sin\varphi =$	λ,	2λ,	$\ldots$;
главные максимумы	$d\sin\varphi = 0$,	λ,	2λ,	$\ldots$;
добавочные минимумы	$d\sin\varphi = \lambda/N,\ 2\lambda/N,\ \ldots,$	$(N-1)\lambda/N$,	$(N+1)\lambda/N$,	$\ldots$,

т.е. между двумя главными максимумами располагается $(N-1)$ добавочных минимумов, разделенных вторичными максимумами.

Конечно, с увеличением числа щелей растет интенсивность главных максимумов, ибо возрастает количество пропускаемого решеткой света. Однако самое существенное изменение, вносимое большим числом щелей, состоит в превращении расплывчатых максимумов в резкие *узкие* максимумы, разделенные практически темными промежутками, ибо вторичные максимумы очень слабы: самый сильный из наблюденных вторичных максимумов составляет не более 5 % от главного (см. упражнение 75). Резкость максимумов обеспечивает возможность надежно отличать близкие длины волн, для которых главные максимумы не будут перекрывать друг друга, что имеет место при расплывчатых максимумах, получающихся с одной щелью или малым числом их.

То обстоятельство, что в результате интерференции большого числа лучей мы получаем резкий переход (малое изменение направления φ) от максимума к соседнему минимуму, наглядно объясняется диаграммами рис. 9.1. Когда все складывающиеся N лучей находятся в одной фазе, мы получаем максимум, соответствующий амплитуде $s = Na$ результирующего колебания, где N — число интерферирующих лучей и a — амплитуда каждого из них. Для получения минимума (см. рис. 9.1 *в*) необходимо, чтобы фаза последнего луча отличалась от фазы первого на 2π. Следовательно, при наличии N лучей разли-

чие в фазе двух соседних лучей должно равняться $2\pi/N$ (различие в разности хода λ/N), т.е. быть тем меньше, чем больше N.

Таким образом, между каждыми двумя главными максимумами, соответствующими разности хода $d\sin\varphi = m\lambda$, где $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, лежат по $(N-1)$ добавочных минимумов, определяемых разностью хода $d\sin\varphi = m\lambda + p\lambda/N$, где p пробегает целые значения от 1 до $(N-1)$ (см. также упражнение 75). Угловое расстояние между главным максимумом и соседним минимумом определяется требованием, чтобы разность хода возросла на λ/N, т.е. $\Delta(d\sin\varphi) = \lambda/N$, или $d\cos\varphi\Delta\varphi =$ $= \lambda/N$, откуда $\Delta\varphi = \lambda/Nd\cos\varphi$. При не очень больших углах дифракции ($\cos\varphi \approx 1$), что соответствует обычно не очень большим порядкам дифракции (небольшим m), резкость главных максимумов не зависит от порядка спектра и равна $\Delta\varphi = \lambda/Nd$. Из этой формулы следует, что резкость главных максимумов тем больше, чем больше Nd, т.е. чем больше *общая ширина* решетки. При *заданном* периоде решетки d резкость главных максимумов возрастает ($\Delta\varphi$ уменьшается) с ростом числа штрихов N.

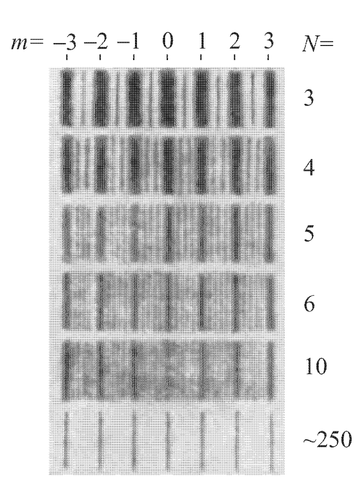


Рис. 9.17. Изменение характера дифракционного спектра в зависимости от числа щелей N (негатив)

Рисунок 9.17 наглядно показывает уменьшение ширины главных максимумов (увеличение их резкости) по мере роста N. В хороших решетках N достигает 10^5, благодаря чему спектр, изображаемый такой решеткой, состоит из очень резких линий, если источник испускает достаточно монохроматическое излучение.

Расстояние между главными максимумами для определенной длины волны λ определяется периодом решетки d, а распределение интенсивности между отдельными максимумами зависит от соотношения между b и d. В том случае, когда b и d соизмеримы, некоторые главные максимумы будут отсутствовать. Так, при $d = 2b$ пропадают все четные максимумы, причем, конечно, соответствующим образом усиливаются нечетные. При $d = 3b$ исчезает каждый третий максимум и т.д.

Общая формула, передающая распределение амплитуд дифрагировавших волн в зависимости от угла φ, гласит [1]):

$$A = A_0\,\frac{\sin\alpha\,\sin N\beta}{\alpha\sin\beta}, \qquad (46.1)$$

где $\alpha = (\pi b/\lambda)\sin\varphi$, $\beta = (\pi d/\lambda)\sin\varphi$, N — число щелей и A_0 — амплитуда, задаваемая одной щелью в направлении первичного пучка $\varphi = 0$.

[1]) В предположении, что a, $b \gg \lambda$, т.е. соблюдены условия применимости метода Френеля–Кирхгофа (см. § 39).

Формула (46.1) получается без труда, если суммировать действия отдельных щелей, принимая во внимание возникающую разность фаз (см. упражнение 74). Множитель $A_0\,\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$ выражает действие одной щели, а множитель $\dfrac{\sin N\beta}{\sin\beta}$ — интерференцию волн, распространяющихся через N щелей. Положение главных максимумов, определяемое из условия $d\sin\varphi = m\lambda$, соответствует максимальным значениям множителя $\dfrac{\sin N\beta}{\sin\beta}$, который при этом обращается в N (см. упражнение 75).

Таким образом, в главных максимумах амплитуда в N раз, а интенсивность в N^2 раз больше, чем дает в соответствующем направлении *одна* щель. Если бы интерферировали волны, прошедшие через N *некогерентно* освещенных щелей, то интенсивность возросла бы только в N раз, т.е. была бы в N раз меньше, чем при интерференции когерентных пучков, обусловленных решеткой. Кроме того, в случае решетки отдельные яркие главные максимумы разделены темными областями, а при N некогерентно освещенных щелях мы имели бы

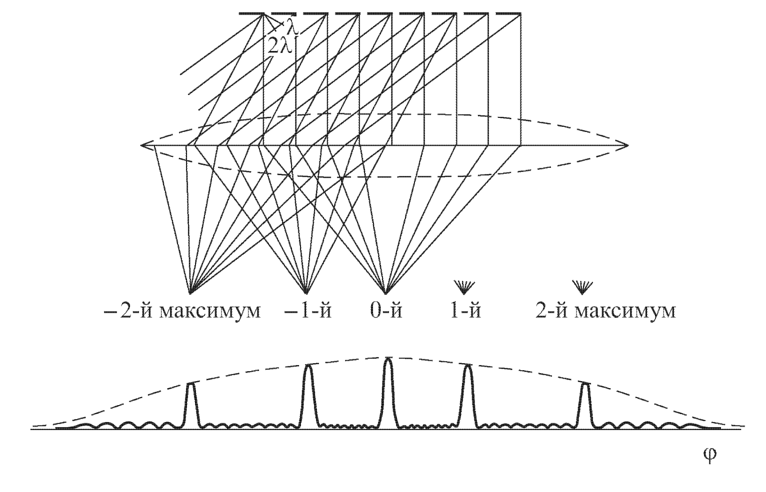


Рис. 9.18. К теории дифракционной решетки. Положение главных максимумов и распределение энергии по различным порядкам в щелевой решетке. Штриховая кривая передает ход множителя $f(\alpha)$, выражающего распределение, обусловленное дифракцией на отдельной щели. Если $b \gg \lambda$, то $f(\alpha) = \sin\alpha/\alpha$. В противном случае $f(\alpha)$ оказывается несколько иной функцией (см. конец § 39). При большом числе щелей N высоты главных максимумов значительно больше, чем указывает штриховая кривая

N-кратное наложение сравнительно широкой дифракционной картины от одной щели (ср. со штриховой кривой рис. 9.11, где $N = 2$). Формула (46.1) показывает, что в выражение для распределения амплитуды входит множитель $A_0 \sin\alpha/\alpha$, дающий распределение, обусловленное одной щелью. Следовательно, при дифракции на решетке,

так же как и при дифракции от двух щелей, почти весь свет сосредоточен в области центрального максимума, обусловленного одной щелью. Так как ширина щели b обычно очень мала, то этот центральный максимум с угловой шириной, равной $2\lambda/b$, довольно широк, и на его протяжении укладывается несколько главных максимумов решетки, соответствующих нескольким порядкам (рис. 9.18).

На рис. 9.18 по оси абсцисс отложен угол дифракции φ, и отчетливо видна неэквидистантность главных максимумов. Иногда, например, при теоретическом анализе удобнее в качестве независимой переменной выбрать $\sin\varphi$. При этом главные максимумы оказываются эквидистантными. Приведем графики функций $[(\sin N\beta)/N\sin\beta]^2$ (рис. 9.19 *а*), $[(\sin\alpha)/\alpha]^2$ (рис. 9.19 *б*) и их произведения (рис. 9.19 *в*).

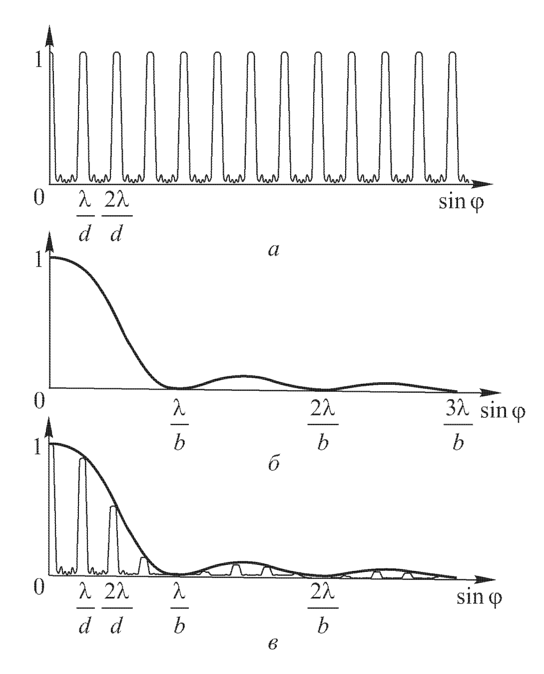


Рис. 9.19. К теории дифракционной решетки: *а* — график функции $[(\sin N\beta/N\sin\beta)]^2$, описывающей интерференцию света от N щелей, $\beta = (\pi d/\lambda)\sin\varphi$; *б* — график функции $f^2(\alpha) = [(\sin\alpha)/\alpha]^2$, $\alpha = (\pi b/\lambda)\sin\varphi$; *в* — произведение графиков *а* и *б*

Из формулы (46.1) нетрудно определить распределение интенсивности по главным максимумам. Действительно, находя из соотношения $d\sin\varphi = m\lambda$ значение $\sin\varphi$, соответствующее направлению на m-й (главный) максимум, подставляем эту величину в формулу (46.1) и возводим в квадрат; тогда

$$I_m \approx A^2 = \frac{A_0^2 N^2 d^2 \sin^2(\pi bm/d)}{\pi^2 m^2 b^2} = \frac{A_0^2 N^2 d^2}{\pi^2 m^2 b^2}\,\sin^2\frac{\pi bm}{d}\,, \qquad (46.2)$$

причем $b < d$. При соизмеримых b и d величина $\sin(\pi bm/d)$ проходит через нуль при некоторых значениях m. Спектры соответствующих порядков отсутствуют.

Ниже приводятся данные о распределении интенсивности по максимумам разных порядков для разных соотношений между b и d, причем интенсивность нулевого порядка принята за 100.

	Нулевой порядок	Первый порядок	Второй порядок	Третий порядок	Четвертый порядок
$d = 2b$	100	40	0	4,5	0
$d = 3b$	100	67,5	17	0	4,2

Положение главных максимумов можно определить путем элементарного рассмотрения явлений на дифракционной решетке, аналогично тому, как это сделано для одной щели (см. § 39). Условие для положения главных максимумов $d\sin\varphi = m\lambda$, где $m = 0, 1, 2, \ldots$, можно вывести из рис. 9.18.

Это элементарное рассмотрение не дает, однако, необходимых сведений относительно распределения энергии в дифракционной картине, в частности, оставляет без ответа важный вопрос о роли числа штрихов решетки. Для некоторых вопросов, впрочем, такое рассмотрение вполне достаточно. Так, например, из условия $d\sin\varphi = m\lambda$ следует, что спектры порядка, большего, чем d/λ, не могут иметь места (о физическом смысле этого см. в упражнении 77).

Рассмотрение действия дифракционной решетки показывает, что при большом числе щелей свет, прошедший через решетку, собирается в отдельных, резко очерченных участках экрана. Положение максимумов на этих участках, определяемое формулой $d\sin\varphi = m\lambda$, зависит от длины волны λ. Другими словами, дифракционная решетка представляет собой спектральный прибор.

Чем меньше длина волны λ, тем меньшему значению угла φ соответствует положение максимума. Таким образом, белый свет растягивается в спектр так, что внутренний край его окрашен в фиолетовый цвет, а наружный — в красный (рис. 9.20). Значение $m = 0$ определяет максимум по направлению $\varphi = 0$ для всех значений λ. Следовательно, в этом направлении (направление первичного пучка) собирается излучение всех длин волн, т.е. нулевой спектр представляет собой белое изображение источника.

Спектры первого, второго и т.д. порядков располагаются симметрично по обе стороны нулевого. Расстояние между соответствующими линиями спектров возрастает по мере увеличения порядка спектров. В зависимости от спектральной однородности анализируемого света, т.е. различия крайних длин волн, его составляющих, спектры высших порядков начинают накладываться друг на друга. Так, для солнечного света, даже если ограничиться лишь видимой частью его излучения, спектры второго и третьего порядков частично перекрывают друг друга (см. упражнение 82). Применяя решетки с малым периодом и пользуясь спектрами высших порядков, мы можем получить значительные углы дифракции и таким образом очень точно изме-

рить длины волн. Измерения Ангстрема (1868 г.) и, особенно, Роулэнда (1888 г.) привели к составлению превосходных атласов солнечного спектра, положения фраунгоферовых линий которого измерены с точностью до шестого десятичного знака.

Несмотря на высокое совершенство изготовления современных решеток, в них нередко наблюдаются некоторые незначительные искажения единого строго выраженного на всем протяжении решетки

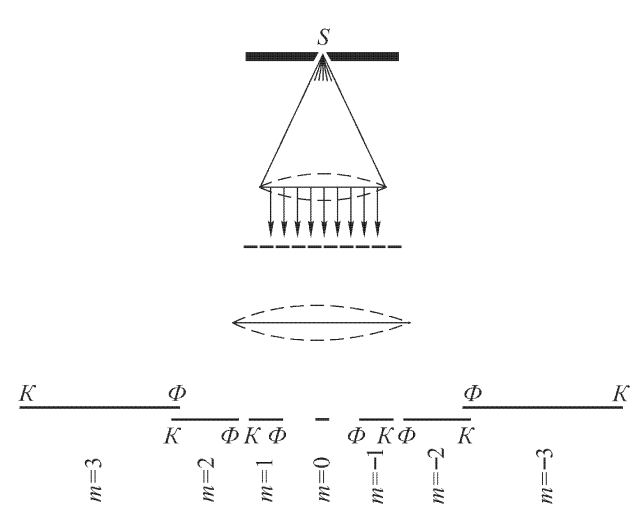


Рис. 9.20. Разложение белого света дифракционной решеткой. Красный конец спектра второго порядка перекрывается фиолетовым концом спектра третьего порядка

периода, существование которого мы предполагали при нашем рассмотрении. Это влечет за собой отступление от того распределения интенсивности по главным максимумам, которое приведено в формуле (46.2).

Сверх того, указанные нарушения влекут за собой появление добавочных максимумов, обычно не сильных (так называемых «ду́хов»). Появление «ду́хов» нередко приводит к ошибкам при анализе спектра дифракционной решеткой, ибо максимум, соответствующий «ду́ху», можно принять за присутствие какой-то добавочной спектральной линии, в анализируемом спектре в действительности не имеющейся.

§ 47. Наклонное падение лучей на решетку

Если плоская волна падает на решетку под углом θ (рис. 9.21), то для вычисления направления на главные максимумы можно поступать так же, как и выше.

Полная разность хода для двух соответственных волн равна

$$AC - DB = d\sin\theta - d\sin\varphi.$$

Условия образования главных максимумов имеют вид

$$d(\sin\theta - \sin\varphi_m) = m\lambda, \tag{47.1}$$

где φ_m — направления на главный максимум порядка m, а $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ Преобразовывая, имеем

$$2d\cos\frac{\varphi_m + \theta}{2}\,\sin\frac{\theta - \varphi_m}{2} = m\lambda.$$

Если решетка довольно груба, т.е. период ее d значительно больше λ, то углы дифракции малы и угол φ_m мало отличается от θ. В таком случае можем положить

$$\frac{\varphi_m + \theta}{2} \approx \theta \quad \text{и} \quad \sin\frac{\theta - \varphi_m}{2} \approx \frac{\theta - \varphi_m}{2}\,.$$

Итак, имеем

$$d\cos\theta(\theta - \varphi_m) = m\lambda. \tag{47.2}$$

Сравним эту формулу с формулой для нормального падения волнового фронта на решетку $d\sin\varphi_m = m\lambda$ или $d\varphi_m = m\lambda$ (если угол φ_m мал). Это сравнение показывает, что угол между направлениями на нулевой максимум и на ненулевые максимумы $(\theta - \varphi_m)$ вычисляется так же, как если бы падение было нормальным, но решетка *имела бы уменьшенный период*, а именно $d\cos\theta$.

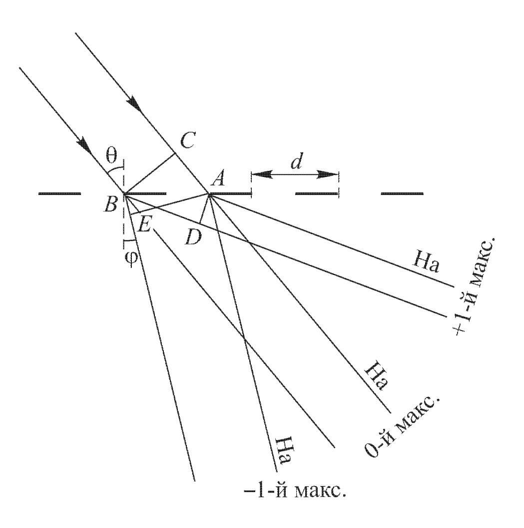


Рис. 9.21. Наклонное падение параллельного пучка на дифракционную решетку

Если θ близко к $\pi/2$, то мы имеем весьма заметное уменьшение периода. Таким образом, направляя на грубую решетку свет под углом, близким к 90°, мы можем наблюдать отчетливую дифракционную картину. Например, гравированная миллиметровая линейка при очень косом падении света на нее позволяет наблюдать дифракционные спектры для видимого света.

Указанное обстоятельство нашло важное применение при исследовании дифракции рентгеновских лучей. Так как длины волн рентгеновских лучей обычно в тысячи раз меньше, чем волны видимого света, то все искусственно построенные решетки оказываются для рентгеновских лучей слишком грубыми, а именно $d/\lambda \sim 1000$.

Используя очень косое падение излучения, удалось получить ясно выраженную дифракцию рентгеновских лучей со сравнительно грубой решеткой ($d \approx 0{,}02$ мм, Комптон и Дьюэн, 1925 г.). Впоследствии

по этому методу были получены превосходные дифракционные спектры и с большой точностью были измерены длины волн рентгеновского излучения. Этот метод измерения является в настоящее время наиболее совершенным (ср. § 118).

§ 48. Фазовые решетки

Распределение энергии по спектрам разных порядков, приводимое в § 46, показывает, что значительная часть энергии сосредоточена в спектре нулевого порядка; по мере перехода к высшим порядкам энергия быстро убывает. Спектральные приборы, снабженные такими дифракционными решетками, были бы мало светосильны. Важным практическим усовершенствованием решеток явилось указанное Рэлеем и осуществленное Вудом изменение распределения по спектрам, основанное на введении дополнительной разности хода в пределах каждого штриха решетки. С этой целью решетку гравируют так, что каждая борозда имеет определенный профиль, благодаря чему при отражении (или прохождении) возникает добавочная разность хода от одного края борозды до другого (рис. 9.22). Подбирая профиль борозды, удается сконцентрировать энергию в спектре того

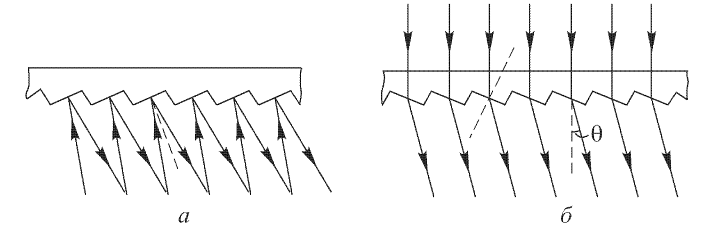


Рис. 9.22. Фазовые решетки со специальным профилем для концентрации энергии в отдельных спектрах различных порядков: *а* — отражательная решетка; *б* — пропускающая решетка

или иного порядка, ослабляя остальные, в том числе и самый яркий спектр нулевого порядка. Решетки подобного типа позволили сделать дифракционные спектрографы инструментом, превосходящим по светосиле обычные призматические спектрографы.

Решетки, изображенные на рис. 9.22, представляют собой, по существу, *фазовые* решетки, отдельные элементы которых отличаются не различием в отражающей или пропускающей способности, влияющей на амплитуду волны, а своей способностью изменять *фазу* волны. В данном случае изменение фазы происходит вследствие геометрической формы пластинки, отражающей или пропускающей волну. Можно воздействовать на фазу волны, осуществляя различие в показателе преломления пропускающего слоя при его неизменной толщине; такого рода фазовые решетки удается создавать, вызывая в прозрачном теле ультраакустическую волну. Была осуществлена и фазовая решетка, основанная на различном изменении фазы волны при отражении

от стекла и металла (С.М. Рытов и И.Л. Фабелинский). Для этой цели на гипотенузную грань стеклянной 90-градусной поворотной призмы были нанесены полоски серебра, разделенные полосками несеребреного стекла. При падении света со стороны стекла (рис. 9.23) интенсивность света, отраженного от тех или иных полосок, практически одинакова (полное внутреннее отражение), но возникает различие в фазах, приводящее к образованию дифракционной картины.

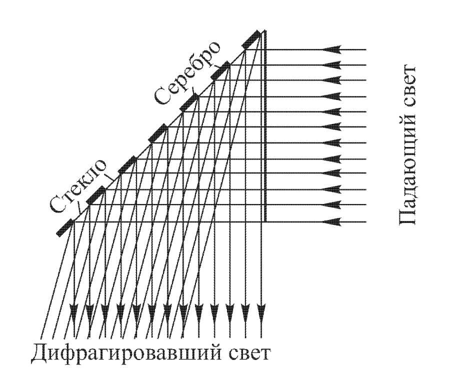


Рис. 9.23. Фазовая отражательная решетка, использующая различие в изменении фазы при полном внутреннем отражении от стекла и серебра

Возможны, конечно, решетки амплитудно-фазовые, т.е. воздействующие одновременно и на амплитуду, и на фазу. Общая теория таких решеток представляет повторение теории, рассмотренной в § 45. Только вместо множителя $\dfrac{\sin[(\pi b/\lambda)\sin\varphi]}{(\pi b/\lambda)\sin\varphi} = \dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$, представляющего распределение амплитуды при дифракции на *одной* достаточно широкой щели, войдет множитель более общего вида $F(b, \lambda, \varphi)$, также зависящий от ширины штриха b, длины волны λ и угла дифракции φ, но передающий и особенности штриха (его профиль, отражающую или пропускающую способность и т.д.).

Таким образом, формула (46.1) заменится на

$$A_\varphi = A_0 F(b, \lambda, \varphi)\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\,.$$

Специальный выбор особенностей штриха, определяющий вид функции F, и дает возможность концентрации энергии в спектрах отдельных порядков. Например, для решеток, изображенных на рис. 9.22 *б*, расчет по схеме § 39 приводит к выражению

$$F(b, \lambda, \varphi) = \frac{\sin(\alpha - \alpha_0)}{\alpha - \alpha_0}\,, \quad \alpha - \alpha_0 = \frac{\pi b}{\lambda}\,(\sin\varphi - \sin\theta).$$

Поскольку функция $F(b, \lambda, \varphi)$ максимальна при $\alpha = \alpha_0$, наибольшую интенсивность будут иметь те главные максимумы, для которых углы φ близки к углу θ геометрического преломления лучей на грани штриха.

Техника изготовления дифракционных решеток совершенствовалась довольно медленно. Первая дифракционная решетка была построена, по-видимому, в 1785 г. американским астрономом Риттенгаузом, но не была использована ни им самим, ни кем-либо другим. Решетка была вновь открыта в 1821 г. Фраунгофером, который дал основы теории дифракции в параллельных лучах и осуществил при помощи дифракционного спектроскопа важнейшие открытия (в частности, открыл темные линии в сплошном спектре Солнца — фраунгоферовы линии).

Первые решетки Фраунгофер изготовлял из проволоки, намотанной на два параллельно расположенных винта. Таким образом он мог получить решетки с числом штрихов от 40 до 340 на дюйм [1]). Для изготовления более совершенных решеток Фраунгофер перешел к нанесению штрихов на тонком золотом слое, покрывавшем стекло, а затем непосредственно на стекле (алмазом). Лучшая решетка Фраунгофера была шириной в 1/2 дюйма и имела период около 3 мкм (8000 штрихов на дюйм).

Фраунгофер указал на принципиальную возможность изготовления отражательных решеток, хотя все его решетки работали как пропускающие.

Переход от примитивных решеток Фраунгофера к современным дифракционным решеткам явился сложной технической задачей, в решении которой принимали участие многие исследователи.

Важнейший шаг был сделан Роулэндом, построившим специальные машины для изготовления тончайших решеток большого протяжения. Кроме того, Роулэнд первый стал делать вогнутые отражательные решетки, выполняющие одновременно роль решетки и собирающей линзы. Решетки Роулэнда имели до 20 000 штрихов на дюйм при большой ширине (до 10 см) и превосходном качестве.

Дальнейшие улучшения в машинах Роулэнда ввели Андерсон, Вуд и др. В настоящее время высококачественные решетки изготовляются во многих странах, в том числе и в СССР. Как правило, это отражательные решетки с почти треугольным профилем штриха (см. рис. 9.22 *а*, так называемые *эшеллеты*), концентрирующие до 70–80 % падающего на решетку света в спектр какого-либо одного, ненулевого порядка. Изготавливаются гравированные решетки для различных областей спектра, от далекой инфракрасной ($\lambda \approx 1$ мм) до ультрафиолетовой ($\lambda \approx 100$ нм) и ближней рентгеновской ($\lambda \approx 1$ нм), с размерами до 400×400 мм^2 и с числом штрихов (в зависимости от области спектра) от 4 до 3600 на 1 мм. Широкое распространение нашли копии с гравированных решеток (*реплики*), которые получаются путем изготовления отпечатков на специальных пластмассах с последующим нанесением на них металлического отражающего слоя. По качеству реплики почти не отличаются от оригиналов.

В 70-х гг. разработана новая технология изготовления решеток, основанная на создании периодического распределения интенсивности на специальных фоточувствительных материалах в результате интерференции лазерного излучения. Такого рода решетки, называемые *голографическими*, имеют высокое качество и изготавливаются для видимой и ультрафиолетовой областей спектра с числом штрихов от 600 до 6000 на 1 мм и с размерами вплоть до 600×400 мм^2.

---

[1]) Уже с этими решетками Фраунгофер определил длину волны D-линии Na (5886 Å). Общая ширина решеток Фраунгофера была невелика, так что разрешающая сила их не превосходила 500. Естественно, что с такой решеткой нельзя было разделить дублет натрия, состоящий из линий 5890 и 5896 Å.

§ 49. Эшелон Майкельсона

Важной разновидностью фазовой решетки является ступенчатый эшелон Майкельсона, представляющий собой решетку со сравнительно небольшим числом отдельных «щелей» (число интерферирующих пучков не превосходит 30). Так как при этом разность хода между отдельными пучками весьма велика ($10\,000\,\lambda$ и более), то в таком приборе мы получаем спектры весьма высоких порядков.

Эшелон представляет собой «лестницу», сложенную из плоскопараллельных толстых (от 1 до 2 см) стеклянных пластинок, совершенно

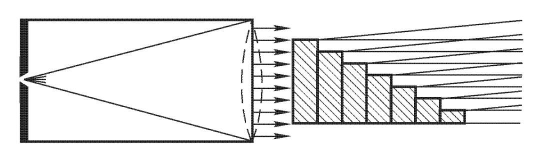


Рис. 9.24. Схема эшелона Майкельсона

однородных, строго одинаковой толщины и с выступами одинаковой ширины (рис. 9.24).

Для обеспечения хорошего качества эшелона существенно необходима чрезвычайная тщательность обработки пластинок, которые должны быть строго плоскопараллельными и однородными, так что, наложив их одну на другую и сжав, мы получим как бы «лестницу» с одинаковыми ступеньками из сплошного куска однородного стекла.

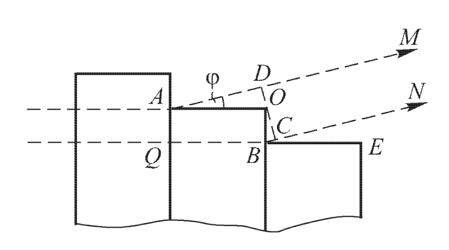


Рис. 9.25. Ход лучей в эшелоне Майкельсона: $AO = QB = h$; $OB = s$; $AD = h\cos\varphi$, $BC = s\sin\varphi$

Параллельный пучок, пронизывая всю толщину эшелона, испытывает на краях ступеней дифракцию. Разность хода, возникающая между отдельными волнами, зависит от толщины h и ширины s ступенек, от показателя преломления стекла n и угла дифракции φ. Как нетрудно видеть из рис. 9.25, разность хода между лучами AM и BN, исходящими из соответственных точек ступенек, равна

$$\Delta = QB + BC - AD = nh + s\sin\varphi - h\cos\varphi = s\sin\varphi + h(n - \cos\varphi),$$

где φ — угол дифракции. Ввиду малости φ можно считать $\sin\varphi = \varphi$ и $\cos\varphi = 1$. Следовательно,

$$\Delta = s\varphi + h(n-1).$$

Так же как и для решетки, условия нахождения главных максимумов имеют вид $\Delta = m\lambda$, где m — целые числа. Итак,

$$s\varphi + h(n-1) = m\lambda,$$

т.е.

$$\varphi = \frac{m\lambda - h(n-1)}{s}. \tag{49.1}$$

Резкость максимумов, так же как и в решетке, определяется числом интерферирующих световых пучков, т.е. числом ступенек

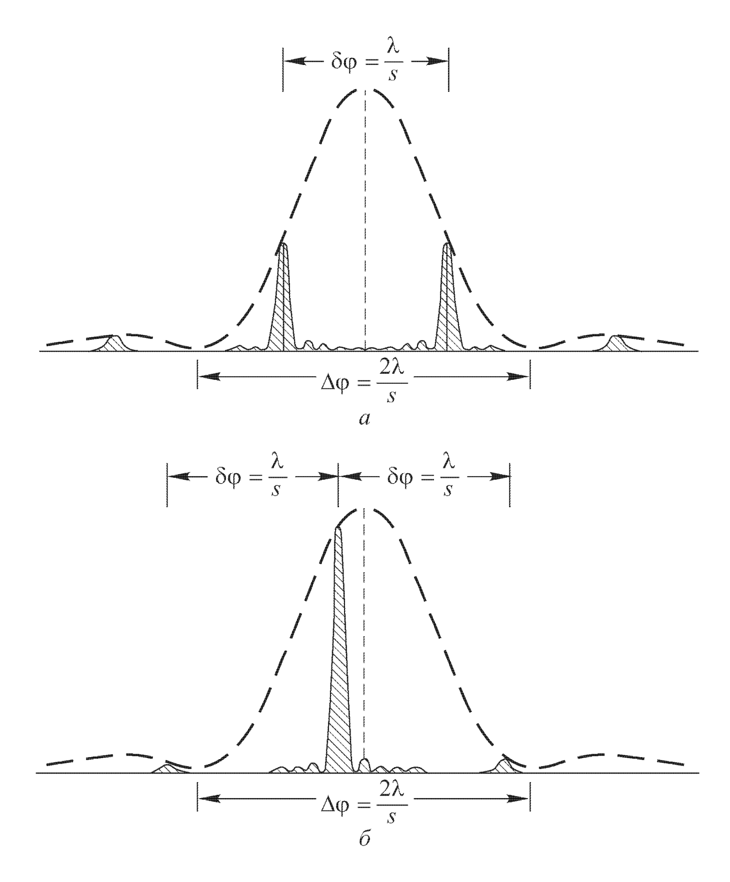


Рис. 9.26. Два возможных положения главных максимумов в эшелоне Майкельсона: a — в пределах угла $\Delta\varphi = 2\lambda/s$ укладываются два дифракционных максимума заметной интенсивности (m-го и $m+1$-го порядка), разделенные расстоянием $\delta\varphi = \lambda/s$; *б* — в пределах угла $\Delta\varphi$ укладывается один дифракционный максимум заметной интенсивности. (Расчет дан для эшелона из 10 пластинок.)

эшелона, которое не превосходит 30. Зато разность хода (порядок интерференции) между двумя соседними лучами весьма велика; пренебрегая членом $s\varphi$ ввиду его малости, найдем для $h = 1$ см и $n = 1{,}5$

$$m = \frac{h(n-1)}{\lambda} \sim 10\,000.$$

Таким образом, эшелон может работать только при очень монохроматическом излучении. Расстояние между главными дифракционны-

ми максимумами соседних порядков, т.е. изменение φ при изменении m на единицу, очень невелико. Из формулы (49.1) имеем $\delta\varphi = \lambda/s$. Все эти дифракционные максимумы имеют заметную интенсивность только в пределах центрального максимума, обусловленного одной щелью (ср. § 44 и 46). Угловая ширина этого максимума есть $\Delta\varphi = 2\lambda/s$, ибо ширина «щели» равна s. Таким образом, в пределах поля заметной яркости шириной $\Delta\varphi$ может укладываться только *один* или *два* максимума соседних порядков, ибо расстояние между ними $\delta\varphi = \Delta\varphi/2$ (рис. 9.26).

§ 50. Характеристики спектральных аппаратов и сравнение их между собой

В настоящей главе рассмотрено действие некоторых спектральных аппаратов (дифракционная решетка, эшелон Майкельсона), позволяющих определять с очень большой точностью длины волн или разницу в длинах волн двух близких спектральных линий. Аналогичную задачу можно решить и при помощи интерференционных спектроскопов (пластинка Люммера–Герке, интерферометр Майкельсона, интерферометр или эталон Фабри–Перо), описанных в гл. VII.

Для того чтобы иметь возможность сравнить между собой действие этих различных аппаратов и выбрать, какой из них наиболее пригоден при решении той или иной физической задачи, необходимо установить определенные характеристики спектральной аппаратуры.

а. Дисперсия спектрального аппарата D. Основное назначение спектральных аппаратов состоит в установлении длины волны исследуемого света — задача, которая в большинстве случаев сводится к измерению различия в длинах волн двух близких спектральных линий. Обычно положение спектральной линии в аппарате задается углом, определяемым направлением нормали к волновому фронту после дисперсионного элемента. Поэтому дисперсию определяют как угловое расстояние между направлениями для двух спектральных линий, отличающихся по длине волны на 1 Å. Если двум линиям, отличающимся по длине волны на $\delta\lambda$, соответствует разница в углах, равная $\delta\varphi$, то мерой дисперсии служит величина

$$D = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda},$$

выражаемая, например, в угловых единицах на ангстрем (*угловая дисперсия*).

Так как мы часто наблюдаем положение линии на экране или фотопластинке, то удобно заменить угловое расстояние между линиями линейным расстоянием δs, выраженным, например, в миллиметрах. Если фокусное расстояние линзы, проецирующей спектр на экран, равно f, то, очевидно, $\delta s = f\,\delta\varphi$, так что *линейная дисперсия* равна

$$D^* = \frac{\delta s}{\delta\lambda} = fD$$

и выражается обычно в миллиметрах на ангстрем. На практике нередко указывают обратную величину, характеризуя дисперсию аппарата числом ангстремов, укладывающимся на 1 мм фотопластинки.

Пусть мы имеем две близкие длины волны λ_1 и λ_2, точнее, два спектральных участка, настолько узких, что их можно охарактеризовать значениями λ_1 и λ_2; таковы, например, две линии, испускаемые ртутной лампой. Расстояние между максимумами $\delta\varphi$ для λ_1 и λ_2 найдется из условия, определяющего положение максимумов: $d\sin\varphi = m\lambda$. Действительно, дифференцируя, получаем

$$d\cos\varphi\,\delta\varphi = m\,\delta\lambda,$$

т.е.

$$D = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{m}{d\cos\varphi}\,. \tag{50.1}$$

Таким образом, дисперсия тем больше, чем меньше период решетки d и чем выше порядок m наблюдаемого спектра.

Нетрудно также определить угловую дисперсию интерференционных приборов, которая, как показывает вычисление, обычно очень велика (см. упражнение 81).

б. Разрешающая способность спектрального аппарата. Наличие значительной дисперсии еще не обеспечивает возможности раздельного наблюдения двух близких спектральных линий λ_1 и λ_2, как бы близки к монохроматическим они ни были. Действительно, дисперсия определяет угловое или линейное расстояние между максимумами интенсивности для двух длин волн λ_1 и λ_2, но в любом аппарате переход от максимума данной длины волны к минимуму происходит более или менее постепенно, в зависимости от устройства аппарата. Поэтому распределение освещенности на экране или фотопластинке имеет вид, изображенный на рис. 9.27.

Рис. 9.27. Распределение освещенности при наложении двух близких спектральных линий одинаковой интенсивности

Наблюдаемое распределение освещенности есть сумма освещенностей, создаваемых близкими спектральными линиями λ_1 и λ_2 одинаковой интенсивности; оно и изображено кривой C. Таким образом, даже при большой дисперсии (большое расстояние AB) нет возможности обнаружить наличие двух длин волн λ_1 и λ_2, если спадание освещенности происходит так полого, как изображено на рис. 9.27.

Для того чтобы аппарат позволил установить наличие спектральных линий двух длин волн (*разрешить* две длины волны), необходимо, чтобы при заданном расстоянии между максимумами очертания обеих линий были достаточно резкими (рис. 9.28). В этом случае наличие двух максимумов (двух длин волн) выступает достаточно отчетливо, несмотря на то, что горбы от каждой из них в значительной степени перекрываются. Само собой разумеется, что возможность

различения двух максимумов в этом случае зависит до известной степени от чувствительности к контрасту того метода (визуального или фотометрического), которым исследуется распределение интенсивности вдоль спектра, от возможности надежно установить небольшое различие в интенсивности.

Таким образом, возможность разрешения двух линий является несколько неопределенной. Согласно предложению Рэлея, условно принято считать разрешение полным, когда два горба расположены, как показано на рис. 9.28, т.е. когда *максимум первого* горба совпадает с *минимумом второго*. То наименьшее различие в длинах волн $\delta\lambda$, которое удовлетворяет поставленному условию, и определит собой способность спектрального аппарата к различению близких длин волн квазимонохроматических спектральных линий одинаковой интенсивности.

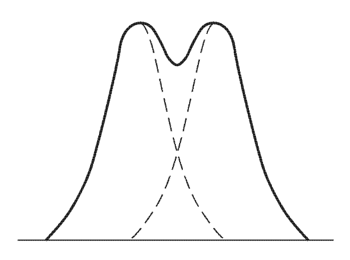


Рис. 9.28. Распределение освещенности для двух еще разрешимых спектральных линий (критерий Рэлея)

Критерий Рэлея в указанной форме неприменим к интерференционным спектральным аппаратам, в которых, как мы видели, переход от максимума к минимуму имеет иную угловую зависимость, нежели в дифракционной решетке [1]). Поэтому удобнее придать критерию Рэлея несколько иной вид. Если две смежные спектральные линии имеют одинаковую интенсивность и форму, то критерий Рэлея означает, что минимум между линиями составляет около 80 % от соседних максимумов. Такой контраст устанавливается вполне уверенно как при визуальных, так и при объективных (фотографических и электрических) методах регистрации. Исходя из этого, нередко предел разрешения определяют требованием, чтобы глубина седловины на интегральной кривой интенсивности двух близких и одинаково интенсивных линий составляла не менее 20 % высоты соседних максимумов.

Условность критерия разрешения в этой формулировке выступает с еще большей отчетливостью. При суждении о возможности разрешения двух линий с сильно различающимися интенсивностями приходится исходить из ряда факторов, характеризующих каждый конкретный случай. Тем не менее, несмотря на условность критерия Рэлея, он оказывается весьма полезным для сравнения разрешающей способности различных приборов. Так, непосредственно ясно, что способность спектрального аппарата к различению близких длин волн тем больше, чем дальше максимумы, т.е. чем выше порядок m и чем резче максимумы (круче переход от максимума к минимуму).

[1]) Различие обусловливается тем, что в дифракционных решетках (включая и эшелон Майкельсона) суммируются N пучков равной интенсивности, тогда как в интерференционных спектроскопах суммируется бесконечное число постепенно ослабевающих пучков.

Мерой *разрешающей способности* спектрального аппарата принято считать отношение длины волны λ, около которой выполняется измерение, к указанному минимальному интервалу $\delta\lambda$, т.е. $\mathscr{A} = \lambda/\delta\lambda$. Для определения $\mathscr{A}$ составим (например, для дифракционной решетки) условия, дающие положения максимумов m-го порядка для волн λ_1 и λ_2:

$$d\sin\varphi'_m = m\lambda_1, \quad d\sin\varphi''_m = m\lambda_2. \tag{50.2}$$

Для перехода от m-го максимума для длины волны λ_2 к соответствующему минимуму необходимо изменить направление падающего света так, чтобы разность хода изменилась на λ_2/N, где N — число интерферирующих световых пучков (штрихов решетки) (см. § 46). Таким образом, минимум λ_2 наблюдается в направлении $\varphi_{\min}$, удовлетворяющем условию

$$d\sin\varphi_{\min} = m\lambda_2 + \frac{\lambda_2}{N}. \tag{50.3}$$

Условие Рэлея гласит

$$\varphi'_m = \varphi_{\min},$$

откуда

$$m\lambda_1 = m\lambda_2 + \frac{\lambda_2}{N} \quad \text{или} \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = mN.$$

Так как λ_1 и λ_2 близки между собой, т.е. $\delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ — малая величина, то разрешающая сила равна

$$\mathscr{A} = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN. \tag{50.4}$$

Таким образом, разрешающая способность решетки при заданном числе штрихов увеличивается при переходе к спектрам высших порядков. Максимальное значение $\mathscr{A}$ соответствует максимальному m, определяемому из условия, согласно которому синус угла дифракции не может превышать 1. Таким образом, из основной формулы решетки $d\sin\varphi = m\lambda$ находим, что $m_{\max} = d/\lambda$ и, следовательно, максимальная разрешающая способность решетки есть

$$\mathscr{A}_{\max} = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{Nd}{\lambda}. \tag{50.5}$$

Но произведение Nd есть *общая ширина* решетки. Следовательно, максимальная разрешающая способность решетки определяется ее общей шириной или, точнее, максимальной разностью хода, выраженной в длинах волн, Nd/λ, между световыми пучками, распространяющимися от первого и последнего штриха решетки.

Итак, максимальная разрешающая способность решетки не зависит от того, образована ли она большим числом штрихов (N_1) малого периода (d_1) или малым числом штрихов (N_2) большого периода (d_2), если только $N_1 d_1 = N_2 d_2$. Однако мелко нарезанная решетка (малое d_1 и большое N_1), обладая той же максимальной разрешающей способностью, что и грубая решетка (большое d_2 и малое N_2) при условии $N_1 d_1 = N_2 d_2$, имеет громадное преимущество, ибо малому d соответствует большая угловая дисперсия при сравнительно невысоком порядке. Грубая решетка будет иметь такую же дисперсию и разрешающую силу лишь при соответственно значительно бóльших порядках

(см. (50.1) и (50.4)). Интенсивность же спектров этих порядков очень мала вследствие быстрого спадания огибающей (штриховая кривая на рис. 9.18). Попытка «расширить» огибающую путем уменьшения ширины прозрачной части периода не приведет к результату, так как ее уменьшение уменьшит световой поток, пропускаемый решеткой. Поэтому в высоких порядках могут быть использованы только фазовые решетки (см. § 48, 49), способные обеспечить высокую концентрацию энергии при больших m. Наконец, при малых d и m значительно больше дисперсионная область (см. ниже). Поэтому практическую ценность представляют решетки малого периода с большим числом штрихов и большой общей шириной. Как уже указывалось, хорошие решетки для видимой области спектра имеют общую ширину 150 мм и содержат около 100 000 штрихов при периоде 1/600 мм.

Формула (50.4) показывает, что разрешающая способность спектрального аппарата равна произведению порядка спектра m на число световых пучков, интерферирующих в приборе. Число это для дифракционной решетки равно числу штрихов; для пластинки Люммера–Герке или Фабри–Перо можно условно считать число N равным числу отраженных световых пучков значительной интенсивности (число эффективных лучей), которое тем больше, чем больше коэффициент отражения R (см. § 30). Для интерферометра Майкельсона $N = 2$; для эшелона Майкельсона N равно числу пластин и т.д.

Легко видеть, что большая разрешающая способность хорошей дифракционной решетки достигается за счет огромных значений N (общего числа штрихов решетки) при незначительном m (2 или 3), тогда как в интерференционных спектроскопах N невелико (не более 20–30), но m очень велико (десятки тысяч). Произведение mN есть число длин волн, представляющее разность хода между крайними световыми пучками, выходящими из прибора. Оно-то и определяет разрешающую способность любого прибора.

В основу рассмотренного выше понятия разрешающей способности положен критерий Рэлея. Наиболее важная черта этого критерия состоит в требовании, чтобы в суммарном распределении интенсивности, создаваемой двумя спектральными линиями, был минимум, составляющий определенную долю (например, 80 % от соседних максимумов, см. рис. 9.28). Таким образом, согласно критерию Рэлея должно быть качественное различие между распределениями освещенности в случае одиночной и двойной линии (соответственно максимум и минимум в центре), т.е. такое различие, которое заметно без детальных количественных измерений. Иными словами, критерий Рэлея по существу предполагает только визуальные наблюдения.

При количественных измерениях постановка вопроса о разрешении должна быть изменена (Г.С. Горелик). Пусть две линии расположены настолько близко, что в середине суммарного распределения располагается не минимум, а максимум освещенности (см. рис. 9.27), т.е. кривая C имеет качественно такой же вид, как и кривые A и B в отдельности. Тем не менее это суммарное распределение интенсивности количественно отличается от распределения при одиночной линии. В частности, суммарное распределение имеет бо́льшую ширину, чем одиночная линия. Это отличие можно измерить, и если точность

измерений достаточно высока, мы получаем возможность установить, что в спектре излучения имеются две спектральные линии, а не одна. Таким образом, при количественных измерениях критерий разрешения можно сформулировать так: две линии считаются разрешенными, если суммарное распределение освещенности отличается от распределения для одиночной линии больше, чем на ошибку измерения. Следовательно, согласно этому критерию при заданных свойствах дифракционной решетки (или другого спектрального аппарата) разрешающая способность тем выше, чем больше точность измерений распределения интенсивности в контуре спектральной линии. В предельном случае абсолютно точных измерений разрешение неограниченно возрастает.

в. Дисперсионная область G. В реальных условиях опыта мы имеем дело не с монохроматическими волнами длиной λ, а с некоторым спектральным участком, охватывающим длины волн от λ до $\lambda + \Delta\lambda$. Наличие такого *набора* длин волн вносит значительное осложнение в работу спектральных аппаратов, особенно тех, в которых наблюдаются спектры высоких порядков, могущих перекрывать друг друга, если приходится работать с довольно широким спектральным интервалом. Таким образом, для каждого аппарата существует предельная ширина спектрального интервала $\Delta\lambda$, при которой еще возможно получение дискретных (неперекрывающихся) максимумов и минимумов. Этот интервал носит название *дисперсионной области* G спектрального аппарата. Предположим для простоты, что исследуемый свет имеет спектральный состав, изображенный на рис. 9.29, и найдем G для дифракционной решетки.

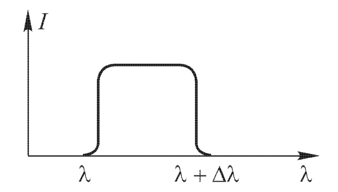


Рис. 9.29. Распределение интенсивности в спектральном интервале от λ до $\lambda + \Delta\lambda$

Место максимума m-го порядка для *правого* края интервала (длина волны $\lambda + \Delta\lambda$) определится из условия

$$d \sin \varphi_m^* = m(\lambda + \Delta\lambda). \tag{50.6}$$

Место максимума $(m+1)$-го порядка для *левого* края интервала (длина волны λ) дается выражением

$$d \sin \varphi_{m+1} = (m+1)\lambda. \tag{50.7}$$

Максимумы соседних порядков начинают накладываться друг на друга, т.е. интерференционная картина становится неясной, при условии

$$\varphi_m^* = \varphi_{m+1},$$

т.е.

$$m(\lambda + \Delta\lambda) = (m+1)\lambda$$

или

$$G = \Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}.$$

Таким образом, дисперсионная область прибора зависит от порядка интерференции, наблюдаемой в данном приборе (ср. § 21).

Для интерференционных спектроскопов и для эшелона Майкельсона наблюдаемые максимумы всегда соответствуют огромной разности хода, т.е. суть максимумы *высокого порядка* (m — несколько тысяч и десятков тысяч), так что $\Delta\lambda \sim \lambda/10\,000$, т.е. для этих приборов характерна очень малая дисперсионная область, измеряемая долями ангстрема.

Для дифракционной решетки обычно наблюдают спектры второго или третьего порядков, т.е. $m = 2$ или 3. В соответствии с этим дисперсионная область $\Delta\lambda = \lambda/2$ или $\lambda/3$ очень велика. В этом — огромное преимущество дифракционной решетки, которая позволяет анализировать даже *белый* свет, т.е. очень обширный спектральный интервал (в тысячи ангстремов), тогда как пластинка Люммера–Герке, например, не дает уже отчетливых максимумов, если падающий на нее свет представляет спектральный интервал, превышающий один ангстрем. Поэтому интерференционные спектроскопы пригодны только для анализа очень однородного света, например для спектральных линий, испускаемых разреженными газами. Они оказывают неоценимые услуги при анализе таких линий, позволяя устанавливать наличие нескольких компонент в этой линии (тонкая структура), оценивать ширину линии, наличие изменений (расщеплений) под действием внешних причин (например, эффект Зеемана) и т.д.

Следующий простой опыт делает очень наглядным значение дисперсионной области. Ртутная лампа в момент зажигания содержит ртутные пары при низком давлении и испускает сравнительно узкие линии, дающие в спектроскопе с эталоном Фабри–Перо (расстояние между зеркалами около 1 см) резкие максимумы и минимумы. Через некоторое время лампа разогревается, плотность пара возрастает и линии становятся настолько широкими, что $\Delta\lambda$ превышает G прибора: максимумы сливаются и интерференционная картина исчезает. Если, однако, начать энергично обдувать лампу вентилятором, то она охлаждается и максимумы вновь разделяются.

г. Сопоставление свойств спектральных приборов. Сопоставление свойств различных спектральных аппаратов иллюстрируется табл. 9.2; $G = \Delta\lambda$ обозначает область дисперсии, равную λ/m, $\mathscr{A} = \lambda/\delta\lambda$ — разрешающую силу, равную mN. Таблица составлена для зеленой области спектра ($\lambda = 5000$ Å $= 500$ нм).

Таблица 9.2

Характеристики различных спектральных аппаратов

	m	N	G, Å	$\mathscr{A}$	Приближенно $\delta\lambda$, Å
Эталон Фабри–Перо, $d = 25$ мм, $R = 0{,}9$	10^5	30	0,05	$3 \cdot 10^6$	0,0017
Интерферометр Майкельсона	10^6	2	0,005	$2 \cdot 10^6$	0,0025
Пластинка Люммера–Герке	$5 \cdot 10^4$	10	0,10	$5 \cdot 10^5$	0,01
Эшелон Майкельсона	$1 \cdot 10^4$	30	0,50	$3 \cdot 10^5$	$\sim 0{,}017$
Дифракционная решетка	3	10^5	~ 1700	$3 \cdot 10^5$	$\sim 0{,}017$

Приведенные в табл. 9.2 данные характеризуют хорошие инструменты указанного рода, хотя и не самые лучшие.

Из сопоставления видно, что хорошая дифракционная решетка имеет разрешающую способность, близкую к разрешающей способности хороших интерференционных спектроскопов, но обладает преимуществом несравненно большей области применения (области дисперсии). Ее недостаток — большая сложность в обращении, если желают получать рекордные, достижимые с решеткой результаты. Однако в приборах среднего класса с разрешающей силой $\mathscr{A} \approx 3 \cdot 10^4 - 10^5$ решетка является наилучшим диспергирующим элементом, причем она превосходит и призменные системы (см. § 94). Поэтому наиболее широкое применение нашли именно дифракционные спектральные приборы.

Комбинируя действие различных спектральных аппаратов, иногда удается повысить область дисперсии аппаратуры, не снижая разрешающей способности. На этих специальных случаях мы останавливаться не будем.

§ 51. Роль спектрального аппарата при анализе светового импульса

При помощи спектрального аппарата мы разлагаем сложный волновой импульс в спектр, т.е. устанавливаем распределение энергии, сосредоточенной в этом импульсе, по различным частотам. Однако, как явствует из предыдущего параграфа, характер распределения энергии по частотам для спектральных приборов различной разрешающей силы оказывается различным. Таким образом, результат изучения импульса спектральным прибором зависит и от свойств импульса (от закона его изменения во времени, т.е. от формы и продолжительности импульса) и от свойств спектрального аппарата (его разрешающей способности).

Чем выше разрешающая способность прибора, тем меньше искажений он вносит в картину спектрального разложения энергии; наоборот, при малой разрешающей силе картина может в сильной степени определяться свойствами прибора и не передавать особенностей наблюдаемого импульса.

Следует, однако, помнить, что хотя при наличии прибора бесконечно большой разрешающей силы вид спектрограммы однозначно определялся бы формой импульса, обратное заключение несправедливо: располагая такой спектрограммой, мы не могли бы еще сделать заключения о *форме волнового импульса.*

Действительно, данные о распределении энергии импульса по частотам, доставленные такой идеальной спектрограммой, позволили бы воспроизвести только *коэффициенты* отдельных элементов ряда (интеграла), на которые, согласно теореме Фурье, можно разложить импульс, ибо интенсивность отдельной спектральной линии определяется соответствующим коэффициентом разложения. Однако форма импульса зависит не только от значения этих коэффициентов, но также и от соотношения фаз отдельных его компонент. Поэтому импульсы самой разнообразной формы могут соответствовать одним и тем

же значениям коэффициентов Фурье и, следовательно, давать одно и то же спектральное разложение. Таким образом, задача о разложении данного волнового импульса в спектр при помощи заданного аппарата решается однозначно. Воспроизведение же исходного импульса по его спектру, даже полученному с помощью прибора бесконечной разрешающей силы, остается неопределенной задачей.

Дифракционная решетка или другой спектральный аппарат является прибором, решающим по отношению к импульсу физическим путем ту самую задачу разложения его на синусоидальные компоненты, которую можно выполнить чисто математическим путем, если известно математическое выражение формы исходного импульса.

С этой точки зрения утверждение, что немонохроматический, в частности, белый свет, представляемый волновыми импульсами, состоит из совокупности монохроматических световых волн, имеет не больше смысла, чем утверждение, что шум есть совокупность правильных музыкальных тонов. Как из светового, так и из звукового импульса можно при помощи подходящего анализирующего инструмента выделить тот или иной простой тон (монохроматический свет). Однако степень монохроматизации тех составляющих, в которые наш прибор преобразует *изучаемый импульс*, зависит от свойств прибора и от его разрешающей силы. Поэтому-то анализ с помощью спектрального прибора может быть более или менее совершенным в зависимости от того, какой инструмент был использован для преобразования импульса. Механизм такого преобразования особенно ясно выступает при рассмотрении действия решетки на импульс. Этот пример в то же время ясно показывает, насколько сильно вид спектра зависит от разрешающей способности спектрального аппарата.

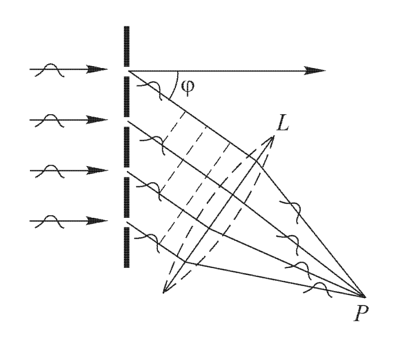


Рис. 9.30. Преобразование импульса в совокупность монохроматических волн при прохождении через дифракционную решетку

Пусть короткий[1] импульс произвольной формы падает нормально на дифракционную решетку; рассмотрим действие на воспринимающий аппарат, расположенный по направлению, задаваемому углом φ с нормалью (рис. 9.30). Все прозрачные элементы (щели) решетки одновременно станут источниками возмущения, направляемого в точку P под углом дифракции φ. Однако, как легко видеть из рисунка, эти отдельные возмущения придут в P не одновременно, а с систематическим запаздыванием на величину $(d\sin\varphi)/c$, где d — период решетки, а c — скорость света. Таким образом, точка P будет получать возмущения, следующие друг за другом *периодически* через промежутки времени

[1]) Импульс мы называли «коротким» в том смысле, что продолжительность его мала по сравнению с любым T (см. ниже).

$T = (d \sin\varphi)/c$, причем для каждого направления φ будет свой период воздействия T. Таким образом, в любой точке P воздействие имеет периодический характер, хотя импульс, упавший на решетку, был одиночным. Чем больше щелей имеет решетка, тем длительнее периодическое воздействие. В случае идеальной решетки, обладающей бесконечным числом щелей (бесконечной разрешающей силой), периодическое воздействие тянется неограниченно долго. Такое бесконечное периодическое воздействие может быть по теореме Фурье представлено как совокупность *синусоидальных* колебаний с периодами T, $T/2$, $T/3$, ... и с амплитудами, зависящими от характера этих периодических воздействий, определяемого формой и длительностью импульса и соотношением размеров прозрачных и непрозрачных мест решетки. Такое разложение периодических толчков на синусоидальные колебания означает, что явления в точке P происходят так, как если бы в эту точку приходили монохроматические волны, длины которых равны соответственно

$$\lambda_1 = cT = d\sin\varphi, \quad \lambda_2 = c\,\frac{T}{2} = \frac{d}{2}\,\sin\varphi, \quad \lambda_3 = c\,\frac{T}{3} = \frac{d}{3}\,\sin\varphi, \quad \ldots$$

Мы видим, таким образом, что по направлению φ будут наблюдаться монохроматические световые волны, длины которых удовлетворяют условию $d\sin\varphi = m\lambda$, где m — целое число, т.е. условию, определяющему положение главных максимумов дифракционного спектра.

По направлению $\varphi = 0$ импульсы от всех щелей приходят одновременно: периодические воздействия не возникают, и нулевой максимум остается «белым». Все эти выводы находятся в соответствии с обычной теорией дифракционных решеток (см. § 46). Приведенное рассуждение показывает механизм воздействия дифракционной решетки на импульс, выдвигая на первый план физическую картину преобразования импульса в периодический процесс вместо математической операции разложения непериодической функции, описывающей импульс, на гармонические составляющие.

Некоторое неудовлетворение оставляет, может быть, то обстоятельство, что для рассмотрения получившегося *периодического* воздействия мы все же прибегали к математической операции разложения периодической функции на синусоиды. Можно, однако, и здесь пойти более физическим путем. Мы имели дело с обычной (щелевой) решеткой, т.е. решеткой, состоящей из периодически чередующихся прозрачных и непрозрачных мест. Другими словами, *коэффициент пропускания* решетки τ меняется вдоль решетки периодическими скачками от 0 до 1 (рис. 9.31 *а*). Предположим теперь, что мы имеем решетку, прозрачность которой вдоль координаты x меняется по синусоидальному закону $\tau = \sin[(2\pi/d)x]$, где d — пространственный период решетки, т.е. τ меняется от $+1$ до -1 (см. рис. 9.31 *б*). То обстоятельство, что τ принимает отрицательные значения, т.е. отрицательными становятся амплитуды проходящего света, имеет очень простой смысл: это значит, что фазы волн с положительными и отрицательными амплитудами противоположны. Следовательно, наша решетка имеет амплитудно-фазовый характер: амплитуда на половине

пространственного периода меняется от единицы до нуля, на второй половине амплитуда нарастает от нуля до единицы, но фаза изменена на обратную.

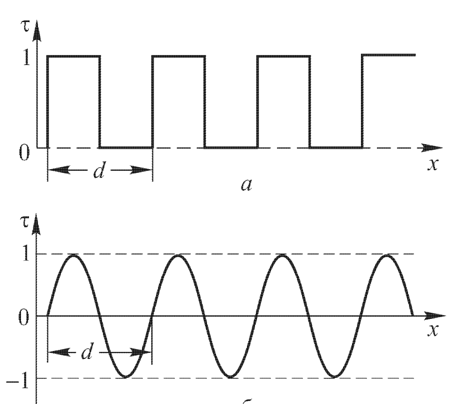


Рис. 9.31. Зависимость коэффициента пропускания τ решетки от координаты x: *а* — щелевая решетка периода d; *б* — синусоидальная решетка периода d

Повторяя вышеприведенные рассуждения (см. рис. 9.30) для такой решетки, получим, что до точки P (в направлении φ) будет доходить световое возбуждение, меняющееся во времени по закону

$$\sin\left(\frac{2\pi}{T}\,t\right),$$

где $T = \dfrac{d\sin\varphi}{c}$.

Действительно, до точки P с течением времени доходят возбуждения от участков, коэффициенты пропускания которых меняются по закону $\sin\left(\dfrac{2\pi}{d}\,x\right)$, причем x нарастает пропорционально времени так, что за время T значение x изменяется на d, т.е. $x = \dfrac{d}{T}\,t$. Таким образом, возбуждение в P меняется по закону

$$\sin\left(\frac{2\pi}{d}\,x\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{d}\,\frac{d}{T}\,t\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{T}\,t\right).$$

Если наша решетка бесконечна по протяжению (т.е. имеет бесконечно большую разрешающую способность), то это синусоидальное возбуждение не ограничено во времени и представляет строго монохроматический свет периода T или длины волны $\lambda = cT = d\sin\varphi$.

Итак, условие образования максимума в случае *синусоидальной* решетки имеет вид

$$d\sin\varphi = \lambda \tag{51.1}$$

вместо условия $d\sin\varphi = m\lambda$, характеризующего обычную дифракционную решетку. Основное различие состоит в том, что *дифракция на синусоидальной решетке приводит к образованию максимумов только первого порядка* ($m = \pm 1$), в отличие от обычных решеток, где образуются нулевой максимум и максимумы различных порядков (Рэлей). Поэтому монохроматическая волна длиной λ будет на такой решетке дифрагировать только под углами $\pm\varphi$, определяемыми из (51.1). Импульс произвольной формы, падая на синусоидальную решетку периода d с бесконечной разрешающей силой, преобразовывается в совокупность монохроматических волн, каждая из которых распространяется по своему направлению φ, определяемому условием (51.1). Соотношение интенсивностей (амплитуд) этих отдельных монохроматических волн зависит от вида импульса. Если решетка содержит не бесконечно большое число штрихов, то длительность от-

дельных цугов, идущих по разным направлениям φ, сокращается и выделенные из импульса волны перестают быть строго монохроматическими. Эти приблизительно монохроматические цуги, в которые ограниченная решетка преобразует импульс, определяются как видом импульса, так и размером решетки, т.е. при заданном периоде *числом* ее штрихов. Эти параметры характеризуют разрешающую способность решетки.

Для других спектральных аппаратов рассуждения несколько усложняются, но сущность дела остается той же [1]) (см. также упражнение 92).

Глава X

ДИФРАКЦИЯ НА МНОГОМЕРНЫХ СТРУКТУРАХ

§ 52. Дифракционная решетка как одномерная структура

Изложенное в § 50 (и, в частности, установленная Рэлеем особенность дифракции на синусоидальных решетках, дающих спектры только первого порядка) позволяет весьма общим и практически важным способом рассмотреть вопрос о дифракции на структурах любого вида. Какова бы ни была структура (в частности, даже если она не периодична), явления дифракции имеют место. Расчет дифракционной картины в таком практически очень распространенном случае, однако, гораздо труднее. Рэлей указал чрезвычайно общий прием решения подобных задач.

В § 4 мы видели, что любая функция времени может быть представлена как совокупность синусоидальных функций времени с различными периодами, амплитудами и фазами. Аналогично, любую пространственную структуру, свойства которой, например коэффициент пропускания, есть функция пространственных координат, можно представить как совокупность синусоидальных структур (теорема Фурье). В частности, если коэффициент пропускания структуры зависит только от одной координаты, например x, то коэффициент пропускания отдельных синусоидальных структур представится в виде $a\sin\left(\frac{2\pi}{d}\,x+\psi\right)$, где a — амплитуда, d — пространственный период и ψ — фаза. Непериодическая структура представляется совокупностью синусоидальных структур с непрерывно меняющимся периодом (представление в виде интеграла Фурье). Периодическая структура с периодом d представится в виде суммы членов ряда, один из которых в общем случае может быть постоянной величиной, а остальные — синусоидальными функциями x с периодом, равным d, $d/2$, $d/3$, …, т.е. остальные члены будут иметь вид $a_n\sin\left(\frac{2\pi n}{d}\,x+\psi_n\right)$,

[1]) Вопросы спектрального разложения и преобразующей роли спектрального аппарата подробно рассмотрены в книге: Г. С. Горелик. Колебания и волны.– М.: Физматгиз, 1959.

где $n = 1, 2, 3, \ldots$ (представление в виде ряда Фурье). Характер рассматриваемой структуры определяет значения амплитуд и фаз отдельных синусоидальных членов ряда. Таким образом, дифракцию на сложной структуре можно рассчитать путем рассмотрения дифракции на каждой отдельной компоненте разложения Фурье этой структуры. Постоянный член разложения Фурье дает нулевой максимум, каждый из синусоидальных членов — по два максимума первых порядков ($m = \pm 1$). Так как периоды синусоидальных структур различны, то и углы дифракции соответствующих максимумов первого порядка будут различны, и в совокупности получится полная дифракционная картина всей структуры. С этой точки зрения максимумы высших порядков обычной дифракционной решетки суть максимумы первого порядка соответствующей ей синусоидальной слагающей. Например, максимумы третьего порядка ($m = \pm 3$) суть максимумы первого порядка ($m = \pm 1$) на третьей синусоидальной структуре, период которой равен $d/3$. Таким образом, для изученной нами *одномерной* решетки (решетка с коэффициентом пропускания, меняющимся только вдоль одной координаты) мы с помощью этого более общего способа рассмотрения получаем согласный с опытом результат.

§ 53. Дифракция на двумерных структурах

Гораздо шире распространен случай, когда коэффициент пропускания пластинки, располагаемой в световом пучке, меняется не вдоль одного направления, а по всей поверхности нашей пластинки. Примером может служить пластинка беспорядочно запыленного стекла или окно, покрытое узорами мороза. Ясно, что такое изменение коэффициента пропускания можно охарактеризовать как изменение по двум координатам нашей поверхности, так что рассматриваемая структура будет *двумерной*. В простейшем случае это будет двумерная периодическая структура (двумерная решетка), в общем — совокупность многих двумерных решеток.

Рассмотрим двумерную решетку, представляющую собой скрещенные перпендикулярные решетки с периодами d_1 и d_2. Подобный случай легко осуществить, поставив непосредственно одну за другой две обыкновенные нарезанные на стеклянных пластинках дифракционные решетки, штрихи которых направлены перпендикулярно друг к другу.

Узкий пучок монохроматического света, пройдя через первую решетку с вертикальными штрихами, должен дать совокупность максимумов (нулевой и максимумы высших порядков) вдоль горизонтальной линии.

Световой пучок, соответствующий каждому максимуму, проходя через вторую решетку, распадается на новую совокупность световых пучков, дающих максимумы вдоль вертикальной линии. Полная картина спектра подобна изображенной на рис. 10.1. Цифры 0,0; 0,1; 1,1; 1,2 и т.д. около пятнышек показывают порядок спектра в первой и второй решетках; интенсивность их убывает по закону распределения интенсивности в дифракционных спектрах решетки. Нетрудно дать элементарную теорию дифракции на такой решетке.

Пусть свет падает на подобную решетку нормально. Выберем направление света за ось Z, направления вдоль решеток — за оси X и Y, охарактеризуем направления падающего пучка углами α_0, β_0, γ_0, дифрагировавшего — углами α, β, γ. В нашем случае $\alpha_0 = \pi/2$, $\beta_0 = \pi/2$, $\gamma_0 = 0$, т.е. $\cos\alpha_0 = \cos\beta_0 = 0$, $\cos\gamma_0 = 1$.

Отклонение дифрагировавшего луча вдоль X приведет к образованию минимумов и максимумов света в зависимости от величины угла дифракции. Применяя теорию одномерной решетки, мы найдем, что положения главных максимумов должны удовлетворять условиям

$$d_1 \cos\alpha = \lambda, 2\lambda, 3\lambda, \ldots, m_1\lambda. \tag{53.1}$$

Аналогично дифракция в направлении оси Y дает главные максимумы в направлениях, определяемых условиями

$$d_2 \cos\beta = \lambda, 2\lambda, 3\lambda, \ldots, m_2\lambda. \tag{53.2}$$

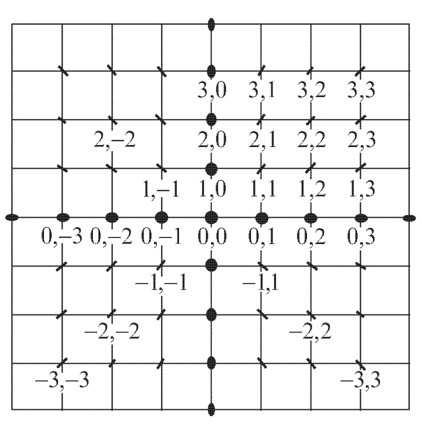


Рис. 10.1. Схематическое изображение распределения интенсивности при дифракции на двумерной решетке

Таким образом, главные максимумы возможны только в направлениях, удовлетворяющих двум из написанных выше совокупностей условий, причем каждой паре значений целых чисел m_1 и m_2 соответствует максимум того или иного порядка. По найденным таким образом значениям α и β определим значения угла γ на основании геометрического соотношения

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{53.3}$$

Таким образом, из трех условий:

$$\begin{gathered} d_1 \cos\alpha = m_1\lambda, \\ d_2 \cos\beta = m_2\lambda, \\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \end{gathered} \tag{53.4}$$

где m_1 и m_2 — целые числа, мы определяем для заданной структуры (d_1, d_2) и для данной длины волны λ значения углов α, β, γ, под которыми будут наблюдаться главные максимумы света. Если предположить, что наша решетка содержит большое число элементов (штрихов), то главные максимумы будут очень резки и в них сосредоточится почти вся световая энергия дифрагировавших волн. Таким образом, практически свет будет наблюдаться только по указанным дискретным направлениям, точнее, в небольшом телесном угле около указанных направлений.

Если решетки d_1 и d_2 не взаимно перпендикулярны, а составляют какой-либо угол между собой, то принципиально рассуждения наши

останутся в силе, только геометрические соотношения изменятся. Положение максимумов (пятнышек) будет, конечно, зависеть и от угла между штрихами решеток. Таким образом, по расположению пятнышек можно судить о *структуре штрихованной поверхности*: о величине периодов d_1 и d_2 и взаимной ориентации решеток.

Если поверхностная структура не периодична, то следует применить для разбора задачи метод Рэлея. Картина получится более сложной. В частности, если структура состоит из частиц, близких по размерам и форме, но всевозможно ориентированных (запыленная пластинка, морозные узоры на стекле), то такая структура эквивалентна совокупности простых решеток всех возможных ориентировок, а соответствующая дифракционная картина представится в виде ряда концентрических кругов. Явление легко наблюдать, рассматривая небольшой яркий источник света сквозь такую пластинку.

§ 54. Дифракционные явления на трехмерных структурах

Наибольший интерес и практическое значение имеет дифракция на пространственных неоднородностях. В этом случае волна распространяется не в однородной среде, а в среде, в которую включены участки, где скорость волны отличается от скорости в остальных частях среды, т.е. участки с иным показателем преломления.

Если среда вполне оптически однородна, т.е. показатель преломления любой небольшой[1]) области равняется показателю преломления другой области, то световая волна будет распространяться в среде без изменения направления.

В частности, плоская волна, распространяясь в такой среде, останется плоской. Это заключение можно подтвердить рассуждениями, подобными тем, которые служат (по Френелю) для объяснения прямолинейного распространения света. Если же однородность среды нарушена какими-либо включениями или вследствие каких-либо процессов, т.е. если в среде встречаются области, показатель преломления которых отличается от показателя преломления остальной части, то на таких неоднородностях должны возникнуть дифракционные явления, и часть света дифрагирует (отклоняется) от своего первоначального направления.

Действительно, части волнового фронта, идущие по областям различного показателя преломления, распространяются с разной скоростью, так что фронт волны, т.е. поверхность одинаковой фазы, перестает быть плоским, и свет будет распространяться по различным направлениям.

Такого рода явления наблюдаются в большом масштабе в природе. Сюда относится, прежде всего, распространение света в тумане, имеющее очень большое значение для ориентировки судов в тумане. Именно такая практическая задача и дала первый повод для детального изучения этого явления (Тиндаль, 1868 г.). Явление дифракции

---

[1]) Небольшой считается область, линейные размеры которой малы по сравнению с длиной световой волны.

на пространственных неоднородностях играет большую роль в метеорологической оптике, обусловливая появление кругов и колец вокруг Солнца и Луны (так называемое гало и венцы). Происхождение их объясняется преломлением и дифракцией солнечных или лунных лучей на мелких частицах, взвешенных в воздухе[1]).

Явление дифракции на пространственных препятствиях или неоднородностях очень легко наблюдать в тех случаях, когда число таких неоднородностей очень велико, а размеры их незначительны. В таком случае среду принято называть *мутной*, и явление дифракции носит обычно название *рассеяния* света. В дальнейшем мы подробнее рассмотрим это явление, особенно для того случая, когда оно не связано с засорением среды посторонними частицами, а является следствием молекулярной структуры среды. Отметим, что для волн обычного света молекулярное строение среды само по себе еще не обусловливает неоднородности, ибо размер молекул в тысячи раз меньше длины световой волны. «Молекулярная мутность» есть результат случайного скопления значительного числа молекул, образующегося при беспорядочном тепловом движении их. Наоборот, для волн очень коротких, например для рентгеновских, уже само наличие молекул обусловливает неоднородность среды и ведет к дифракции (рассеянию).

Рассмотрение дифракции на пространственных неоднородностях любой формы представляет собой очень сложную задачу. Мы ограничимся поэтому простейшим случаем, когда неоднородности имеют правильный периодический характер, т.е. представляют собой то, что мы называем *решеткой*. Однако в этом случае периодическая структура среды имеет пространственный характер, т.е. решетка тянется по всем направлениям в среде. Мы можем представить ее как совокупность периодических структур по трем координатным направлениям и рассматривать дифракцию плоских волн на такой *пространственной* трехмерной решетке.

Пользуясь методом Рэлея (см. § 52), можно рассмотреть дифракцию на любых пространственных структурах, в том числе и непериодических (рассеяние света).

Допустим, что наша среда вдоль оси X представляет собой периодическую структуру с периодом d_1, вдоль оси Y — решетку с периодом d_2 и вдоль оси Z — решетку с периодом d_3, причем d_1, d_2, $d_3 > \lambda$. Ограничимся случаем ромбических[2]) кристаллов, для которых ребра элементарной ячейки (d_1, d_2 и d_3) взаимно перпендикулярны друг к другу. Сюда, конечно, относятся, как частные случаи, тетрагональная ($d_1 = d_2$, d_3) и кубическая ($d_1 = d_2 = d_3$) решетки. Направление распространения света задается тремя углами между волновой нор-

[1]) Следует отличать венцы малого радиуса, которые образуются в результате *дифракции* на капельках, от больших круговых гало (с угловыми размерами 22 и 46°), обусловленных *преломлением* в гексагональных кристалликах льда, взвешенных в воздухе.

[2]) В общем случае триклинных кристаллов, когда ребра ячейки пересекаются под углами, отличными от прямого, рассмотрение задачи потребовало бы применения косоугольной системы координат.

малью и осями координат, которые обозначим через α_0, β_0, γ_0 для падающего и через α, β, γ — для дифрагировавшего света.

Пусть свет падает вдоль оси Z, т.е. $\alpha_0 = \beta_0 = \pi/2$ и $\gamma_0 = 0$. Рассмотрим какой-нибудь слой, параллельный плоскости XY, т.е. слой, для которого $z = \text{const}$. Этот слой представляет собой двумерную решетку, и свет, проходя через него, испытает дифракцию, рассмотренную в предыдущем параграфе. Для *каждой* длины волны λ получим максимумы по направлениям, заданным значениями углов α, β, γ, определяемыми из условий (53.4).

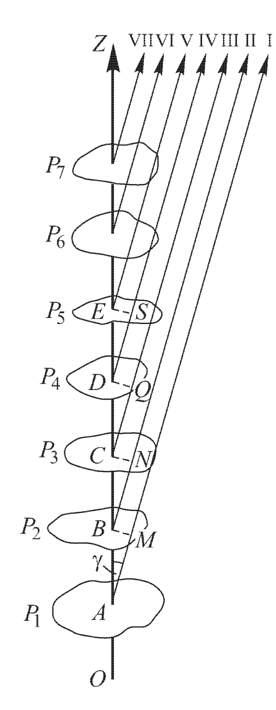


Рис. 10.2. Схема дифракции на трехмерной структуре

Однако в нашем случае среда представляет собой совокупность таких двумерных решеток, расположенных периодически вдоль Z с периодом d_3. Если каждый слой решетки достаточно прозрачен, то часть света испытает дифракцию на первом слое, а часть проникнет до следующего слоя и частично испытает дифракцию на этом втором слое, остаток проникнет дальше и т.д.

Таким образом, по найденному выше направлению (α, β, γ) будет распространяться несколько когерентных волн с известной разностью хода, и мы должны для окончательного результата учесть их взаимную интерференцию.

Результат легко получить из схематического рис. 10.2, где OZ — направление падающей волны; AM, BN, CQ, DS, ... — направления волн, дифрагировавших на отдельных слоях, схематически изображенных маленькими площадками p_1, p_2, p_3, ...; направления AM, BN, ... составляют угол γ с направлением OZ. Расстояние $AB = BC = CD = \ldots = d_3$ есть третий период нашей структуры. Между каждой парой лучей имеется разность хода, равная

$$(AB - AM) = (BC - BN) = (CD - CQ) = \ldots$$

Чтобы волны, отклоненные по указанному направлению каждым слоем, взаимно усиливали друг друга, необходимо, чтобы эта разность хода была равна *целому числу волн*.

Это добавочное условие выразится в виде

$$d_3 - d_3 \cos\gamma = m_3\lambda.$$

Таким образом, в случае дифракции на пространственной структуре с периодами d_1, d_2, d_3 мы получим максимумы света только в

направлениях, удовлетворяющих следующим *четырем* условиям:

дифракционные условия:

$$d_1 \cos\alpha = m_1\lambda, \tag{54.1}$$

$$d_2 \cos\beta = m_2\lambda, \tag{54.2}$$

$$d_3(1 - \cos\gamma) = m_3\lambda, \tag{54.3}$$

где m_1, m_2, m_3 — целые числа, и

геометрическое условие:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \tag{54.4}$$

Нетрудно видеть, что нельзя, вообще говоря, для *любой* длины волны получить направление (α, β, γ), для которого выполняются все эти условия. Действительно, исключая из этих уравнений α, β, γ, найдем соотношение

$$\frac{m_1^2\lambda^2}{d_1^2} + \frac{m_2^2\lambda^2}{d_2^2} + \frac{(d_3 - m_3\lambda)^2}{d_3^2} = 1, \tag{54.5}$$

которое показывает, какие значения должна иметь длина волны λ для того, чтобы в *данной* структуре при *заданном* первоначальном направлении распространения света образовались отчетливые дифракционные максимумы.

Итак, в отличие от дифракции на линейной и поверхностной решетках, дифракция на заданной пространственной решетке дает максимум *не для всех длин волн*, а только для тех, которые удовлетворяют указанному условию (54.5).

Таким образом, если параллельный пучок всех длин волн (белый свет) направить на *линейную* решетку, то получим максимумы для *каждой* длины волны, располагающиеся вдоль линии, перпендикулярной к штрихам решетки (спектр). Если параллельный пучок белого света падает на двумерную решетку, то получим максимумы для всех длин волн, располагающиеся в определенном порядке в плоскости, параллельной плоскости решетки (цветные пятна). Если же направить на пространственную решетку свет всех длин волн, то получатся дифракционные максимумы только для *некоторых* длин волн, удовлетворяющих выведенному выше условию. Волны других длин формируют дифракционный максимум нулевого порядка.

По расположению максимумов и значению длин волн λ, которым они соответствуют, оказывается возможным однозначно воспроизвести ту пространственную решетку, которая обусловила дифракцию.

§ 55. Дифракция рентгеновских лучей

Рассмотренный случай дифракции на трехмерной решетке имеет исключительно важное значение. Он осуществляется практически при дифракции рентгеновских лучей на естественных кристаллах. Лучи Рентгена представляют собой электромагнитные волны, длина которых в тысячи раз меньше длин волн обычного света. Поэтому устройство для рентгеновских лучей искусственных дифракционных решеток сопряжено с огромными трудностями. Мы видели, что трудность эта может быть обойдена путем применения лучей, падающих

на решетку под углом, близким к 90°. Однако дифракция рентгеновских лучей была осуществлена задолго до опытов с наклонными лучами на штрихованных отражательных решетках. По мысли Лауэ (1913 г.), в качестве дифракционной решетки для рентгеновских лучей была использована естественная пространственная решетка, которую представляют собой кристаллы. Атомы и молекулы в кристалле расположены в виде правильной трехмерной решетки, причем периоды таких решеток сравнимы с длиной волны рентгеновских лучей. Если на такой кристалл направить пучок рентгеновских лучей, то каждый атом или молекулярная группа, из которых состоит кристаллическая решетка, вызывает дифракцию рентгеновских лучей. Мы имеем случай дифракции на трехмерной решетке, рассмотренный выше. Действительно, наблюдаемые дифракционные картины соответствуют характерным особенностям дифракции на пространственной решетке.

Благодаря методу Лауэ решаются две задачи огромной важности. Во-первых, открывается возможность определения длины волны рентгеновских лучей, *если известна структура* той кристаллической решетки, которая служит в качестве дифракционной. Таким образом создалась спектроскопия рентгеновских лучей, послужившая для установления важнейших особенностей строения атома (ср. § 118). Во-вторых, наблюдая дифракцию рентгеновских лучей известной длины волны на кристаллической структуре неизвестного строения, мы получаем возможность найти эту *структуру*, т.е. взаимное расстояние и положение ионов, атомов и молекул, составляющих кристалл. Таким путем был создан структурный анализ кристаллических образований, легший в основу важнейших заключений молекулярной физики.

§ 56. Дифракция световых волн на ультраакустических волнах

Пространственную решетку, на которой удобно наблюдать явления дифракции *видимых* световых волн, также удается осуществить. Сюда относятся, прежде всего, дифракционные явления на ультразвуковых волнах.

Как известно, в пластинке кварца или турмалина можно возбудить механические колебания очень большой частоты (до 10^8 Гц). Такая колеблющаяся пластинка излучает упругие (ультраакустические) волны, которые со скоростью звука распространяются в окружающей среде. Поместив колеблющийся кварц в какую-нибудь жидкость, например ксилол, мы получим ультраакустические волны в этой жидкости. Упругая волна в жидкости есть волна сжатия и разрежения, которая распространяется с определенной скоростью. Таким образом, жидкость, в которой распространяется ультраакустическая волна, представляет собой периодическую последовательность областей сжатия и разрежения, т.е. областей, характеризующихся также и различием в показателе преломления света. Поэтому для света жидкость, в которой распространяется ультраакустическая волна, представляет собой *фазовую* решетку (см. § 48), ибо при прохождении света через столб такой жидкости происходит изменение не амплитуды, а фазы световой волны. Если заставить ультраакустическую

волну отражаться от дна сосуда, то наложение проходящей и отраженной волн поведет к образованию *стоячей* ультраакустической волны, которая также представляет собой периодическую структуру переменной плотности и, следовательно, переменного показателя преломления света. Как в случае проходящей, так и стоячей ультраакустической волны получающаяся фазовая решетка будет иметь период, равный *длине* ультраакустической волны, что легко видеть из рис. 10.3. В ксилоле скорость распространения ультраакустических волн равна

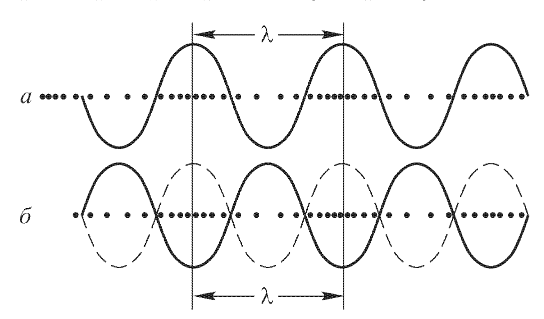


Рис. 10.3. Распределение плотности в бегущей (*а*) и стоячей (*б*) ультраакустических волнах. Как в бегущей, так и в стоячей волне длины периодически повторяющихся областей сжатия и разрежения равны длине ультраакустической волны в среде

примерно 1000 м/с, так что при частоте 10^8 Гц длина ультраакустической волны $\lambda = 10^{-3}$ см $= 10$ мкм. Мы получаем, следовательно, фазовую решетку с периодом 10 мкм, вполне удобную для наблюдения дифракции световых волн. В самом кристалле, служащем для возбуждения волн, также устанавливается стоячая ультраакустическая волна, и, следовательно, колеблющийся кристалл также может служить фазовой дифракционной решеткой [1]).

Пропуская пучок белого света через сосуд с жидкостью, в которой возбуждена ультраакустическая волна (рис. 10.4), мы получим на экране спектр с дисперсией, соответствующей периоду дифракционной решетки, вычисленному по частоте колебаний кварца и скорости ультразвуковой волны в жидкости (рис. 10.5).

[1]) Для большинства жидкостей скорость ультразвуковых волн, не отличающаяся от скорости обычных звуковых волн, составляет около 1000–1500 м/с. Для прозрачных твердых тел (стекло, кварц) скорости составляют 5000–6000 м/с. Поэтому во всех этих веществах можно удобно осуществлять опыты по дифракции на ультраакустических волнах с частотами колебаний до 10^7 Гц и выше. При работе со стоячими волнами важно, чтобы интенсивность отраженной волны была близка к интенсивности проходящей. Поэтому лучше работать с веществами, где ультраакустические волны слабо поглощаются. Из жидкостей такими слабопоглощающими являются ксилол и вода. Следует иметь в виду, что поглощение возрастает пропорционально квадрату частоты ультраакустической волны.

Если пустить ультраакустические волны по трем направлениям, то мы получим пространственную решетку для световых лучей. Впрочем, даже при наличии расположения, указанного на рис. 10.4, когда ультраакустические волны идут в направлении оси Z, мы, по существу, имеем пространственную решетку, но по двум направлениям X и Y период решетки есть нуль, т.е. имеются сплошные отражающие

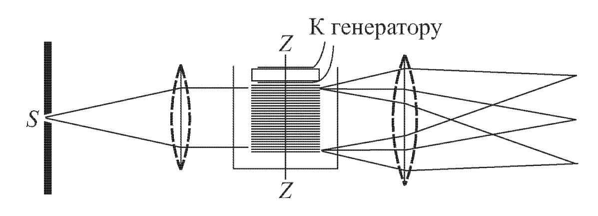


Рис. 10.4. Схема наблюдения дифракции на ультраакустических волнах

плоскости — зеркала. Закон отражения от этих зеркал (луч падающий и луч отраженный лежат в одной плоскости с нормалью к зеркалу и угол падения равен углу отражения) определит значения углов α и β в соотношениях (54.1)–(54.4), а взаимная интерференция лучей, отраженных от системы зеркал, даст третье дифракционное условие для угла γ. Таким образом, и в этом случае мы имеем для трех углов три дифракционных условия и четвертое геометрическое. Явление пространственной дифракции (дискретные максимумы для определенных длин волн) выступает здесь не так отчетливо, как в случае рентгеновских лучей, ибо размеры всего столба, на котором происходит дифракция, в данном случае не особенно велики по сравнению с периодом решетки, так что мы, по сути дела, имеем случай перехода от плоской решетки к объемной.

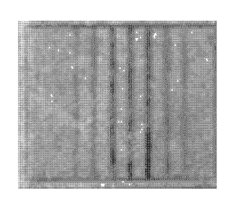


Рис. 10.5. Спектры, полученные при дифракции на ультраакустической волне

Интересно отметить, что фазовая решетка, осуществляемая с помощью ультраакустических волн, отличается еще одной особенностью. Показатель преломления не только имеет пространственную периодичность, но и меняется периодически *во времени*, с периодом ультраакустической волны, т.е. примерно 10^7–10^8 раз в секунду. Это приводит к тому, что интенсивность дифрагировавшего света испытывает периодическое изменение с той же частотой, т.е. *модуляцию*. Согласно изложенному в § 4 это означает, что если на ультраакустическую волну падает монохроматический свет частоты $\nu \approx 5 \cdot 10^{14}$ Гц, то дифрагировавший свет имеет измененную частоту, равную $\nu \pm N$, где N — частота примененной ультраакустической волны. Если $N \sim 10^8$ Гц, то это изменение частоты незначительно и составляет несколько десятимиллионных от первоначальной. Такое изменение наблюдалось на опыте. С подобным явлением, имеющим чрезвычайно большое научное и практическое значение, мы встретимся в вопросе о рассеянии света (см. § 162).

Изложенное рассмотрение применимо к стоячей ультраакустической волне, где показатель преломления в каждой точке меняется со временем. Для бегущей ультраакустической волны изменение частоты легче всего представить как результат отражения света от движущихся поверхностей, которыми являются поверхности фронта бегущей волны, т.е. как результат явления Доплера (см. § 127). В волне, бегущей в одну сторону, изменение частоты дифрагировавшего света будет соответствовать увеличению частоты $(\nu + N)$, а в волне, бегущей навстречу, — уменьшению $(\nu - N)$. Стоячая волна, как совокупность двух бегущих навстречу, обусловливает изменение частоты, выражаемое формулой $\nu \pm N$. Несложный расчет показывает, что как по методу стоячих волн (модуляция), так и по методу бегущих волн (явление Доплера) мы получаем, конечно, одно и то же значение (N) изменения частоты падающего света.

Изучение дифракции света на ультраакустических волнах стало важным методом исследования законов распространения этих волн в веществе и служит для исследования вопросов молекулярной физики; для некоторых технических применений используется ультраакустическая дефектоскопия.

Глава XI

ГОЛОГРАФИЯ

§ 57. Введение

Период электромагнитных колебаний, относящихся к оптической области спектра, чрезвычайно мал, вследствие чего приемники излучения, обладающие большей или меньшей инерционностью, способны регистрировать лишь величину световой энергии, среднюю за период колебаний, но не мгновенное ее значение. В результате такого усреднения мы имеем возможность судить об амплитудах колебаний, но полностью теряем сведения об их фазах. Вместе с тем, именно фазы волн содержат в себе информацию о взаимном расположении частей источника света, о его удалении от приемника и т.д. Таким образом, результаты измерений, из которых выпали сведения о фазах колебаний, несомых волнами, не позволяют, вообще говоря, составить полное представление о свойствах источника этих волн.

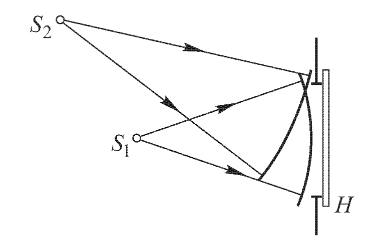


Рис. 11.1. К вопросу о регистрации фазы волны

Пусть, например, на поверхность фотопластинки H (рис. 11.1) падает сферическая волна, испущенная точечным источником S_1. Падающий свет вызовет равномерное почернение открытой части светочувствительного слоя. К тому же результату приведет и волна, пришедшая от любого другого точечного источника,

например, от S_2. Разумеется, распределение фаз колебаний на поверхности приемника, определяемое изменяющимся расстоянием от волнового фронта до плоскости пластинки H (см. рис. 11.1), однозначно связано с положением источника. Однако незнание фазы, обусловленное указанными выше фундаментальными причинами, лишает нас возможности делать какие-либо заключения о локализации источника волн.

Мы можем использовать линзу или какой-либо более сложный оптический прибор и совместить фотопластинку с изображением S_1' источника S_1 (рис. 11.2). Благодаря таутохронизму оптических систем

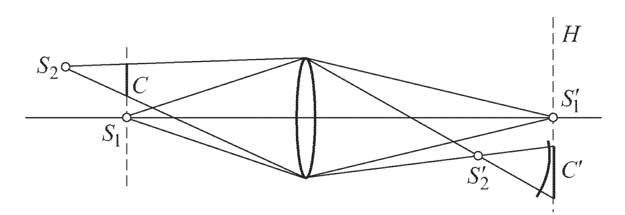


Рис. 11.2. К вопросу о регистрации волн в оптических системах

(см. § 20) все части световой волны, проходящие через различные части линзы, приходят в изображение S_1' с равными фазовыми сдвигами, и сведения о положении источника света определяются локализацией его изображения; измерив положение изображения и зная свойства оптического прибора, можно вычислением определить координаты источника. Сказанное относится, очевидно, к любой точке поверхности, которая отображается на плоскость приемника H. Изложенный принцип лежит в основе большого числа разнообразных оптических приборов, которые будут детально рассмотрены в главах XII–XV.

Применение указанного принципа не может, однако, обеспечить сохранение всех интересующих нас сведений об источнике света на одной фотографии. Например, изображение S_2' источника S_2 (см. рис. 11.2), находящееся вне поверхности приемника H, вызовет почернение участка пластинки C', т.е. приведет к такому же эффекту, как и отображение предмета C. Рассматривая S_2' как источник сферической волны, падающей на H, и вспоминая обсуждение рис. 11.1, легко заключить, что как при использовании оптической системы, так и без нее мы имеем дело с общей физической причиной неполноты знания свойств источников — утратой данных о фазах колебаний при их регистрации приемником.

Таким образом, и разобранные простые примеры, и общие соображения приводят к выводу, что для получения полного представления о локализации источников волн нужно уметь измерять и распределение амплитуд, и распределение фаз волн.

Измерение распределения фаз можно осуществить с помощью интерференционных явлений (см. главы IV–VII). Сущность интерференции заключается в том, что при сложении когерентных колебаний разность их фаз обусловливает изменение амплитуды суммарного колебания, иными словами, происходит *преобразование фазовых соот-*

ношений волн в амплитудную структуру интерференционной картины. Следовательно, если на приемник излучения, помимо интересующей нас волны, послать другую, «пробную» волну с относительно простой формой фронта, например, плоскую или сферическую, то возникшая интерференционная картина полностью охарактеризует закон изменения разности фаз этих двух волн на поверхности приемника. Таким способом мы получим возможность составить представление о фазовой структуре изучаемой волны.

Разумеется, следует выполнить необходимые условия когерентности интерферирующих колебаний и принять ряд других мер технического характера, о чем будет сказано в своем месте. Сейчас же мы иллюстрируем высказанный общий принцип рассмотрением простейших примеров.

§ 58. Голографирование плоской волны

Пусть на экран H падает плоская волна *1* (рис. 11.3 *а*). В качестве пробной или, как ее называют, *опорной волны* выберем также плоскую волну O. Схема рис. 11.3 *а* обеспечивает, очевидно, когерентность

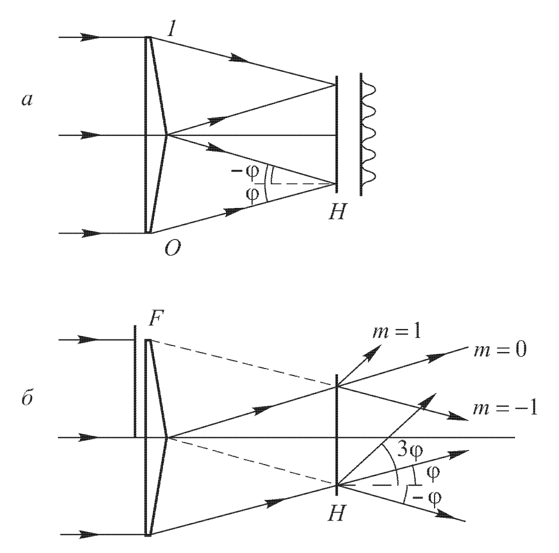


Рис. 11.3. Регистрация интерференционной картины от двух плоских волн O и *1* (*а*) (справа от H показано распределение освещенности) и восстановление волны *1* с помощью просвечивающей волны (*б*)

волн *1* и O, если исходная плоская волна, падающая на бипризму, в достаточной степени когерентна. На экране H образуется интерференционная картина, имеющая вид параллельных периодических полос (см. § 15); расстояние между полосами $\mathscr{B}$ равно отношению длины волны к углу 2φ между направлениями распространения волн *1* и O (см. (15.5)), т.е. $\mathscr{B} = \lambda/2\varphi$. Пусть экран H представляет собой фо-

топластинку; сфотографировав полосы и измерив расстояние между ними, мы можем вычислить угол 2φ:

$$2\varphi = \frac{\lambda}{\mathscr{B}}.$$

Таким образом, мы определили ориентацию волны *1* относительно опорной, т.е. извлекли информацию о волне, которая содержалась в распределении фаз по поверхности приемника.

Мы можем и не ограничиться измерениями распределения почернений на фотопластинке, но с ее помощью вновь *воспроизвести* интерферировавшие волны. В самом деле, поместим фотопластинку в то же место и в той же ориентации, в каких она экспонировалась, и направим на нее просвечивающую волну, идентичную опорной O, прикрыв волну *1* диафрагмой F (см. рис. 11.3 *б*). Поскольку почернение пластинки изменяется периодически, она представляет собой дифракционную решетку с периодом $\mathscr{B}$. Справа от пластинки мы обнаружим набор плоских дифрагировавших волн; направления их распространения (углы дифракции) определяются соотношением (см. § 47)

$$\theta = \varphi + m\,\frac{\lambda}{\mathscr{B}} = \varphi + m2\varphi, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

причем, ради простоты, угол падения φ и угол дифракции θ предполагаются малыми. Нулевой порядок ($m = 0$), как обычно, соответствует распространению падающей волны (см. рис. 11.3 *б*). Для $m = -1$ имеем $\theta = -\varphi$, т.е. эта волна распространяется точно в том же направлении, как и волна *1* во время образования интерференционной картины, полученной по схеме рис. 11.3 *а*. Последнее обстоятельство отражено на рис. 11.3 *б* штриховыми линиями, которые являются продолжением лучей *1* в направлении, противоположном их распространению.

Остальные значения $m = 1, \pm 2, \ldots$ отвечают дополнительным волнам, которых не было среди исходных волн (см. рис. 11.3 *а*). Как известно, отношение интенсивности дифрагировавших волн, отвечающих различным значениям порядка m, определяется законом, по которому изменяется коэффициент пропускания решетки на протяжении ее периода (см. § 46, 48). Если пропускание подчиняется синусоидальному закону, то образуются волны $m = 0, \pm 1$ (решетка Рэлея; см. § 51). В нашем случае распределение освещенности фотопластинки было синусоидальным, однако пропускание проявленной пластинки не вполне синусоидальное, и дополнительные волны поэтому существуют, хотя, как правило, они сравнительно мало интенсивны. Исключение составляет волна $m = 1$, у которой интенсивность такая же как у волны $m = -1$.

Итак, описанный опыт показывает, что можно не только регистрировать сведения о распределении фаз волны на поверхности приемника, что само по себе более или менее очевидно заранее, но при желании и восстановить волну, участвовавшую в образовании интерференционной картины.

Метод регистрации фазы волны и ее восстановления, разобранный выше на примере плоской волны, называется *голографией*. В переводе с греческого «голография» означает «полная запись», т.е. в назва-

нии подчеркнута возможность регистрации исчерпывающих сведений о волновом поле на поверхности приемника света. Фотопластинка, на которой зафиксирована интерференционная картина (в виде почернений), называется *голограммой*. Разумеется, с этой же целью применяются и иные приемники света, однако фотографический способ технически наиболее разработан и поэтому используется чаще других.

§ 59. Голографирование сферической волны

На рис. 11.4 изображена схема опыта по голографированию сферической волны, испускаемой точечным источником S. В качестве опорной служит когерентная сферической плоская волна, отклоняемая пластинкой P так, что она падает на экран H перпенднкулярно к его поверхности.

В плоскости H можно наблюдать интерференционную картину, имеющую вид концентрических колец, центр которых находится в точке O пересечения плоскости H с перпендикуляром, опущенным

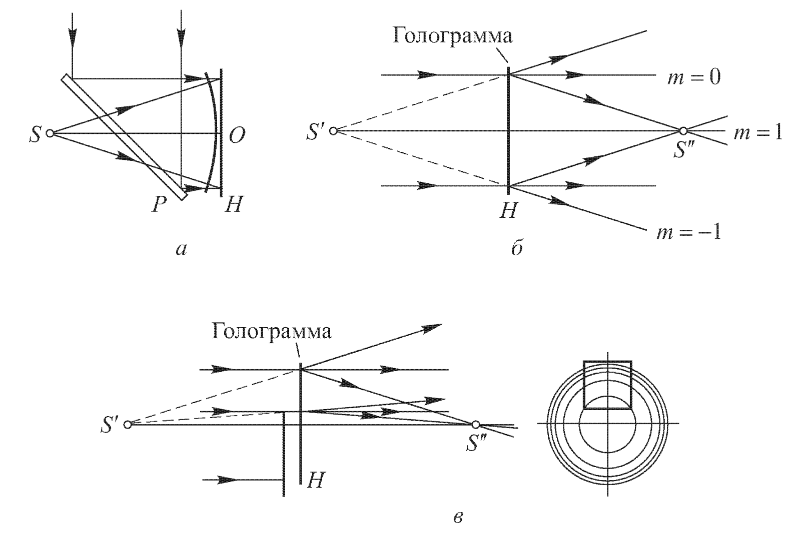


Рис. 11.4. Схема голографирования сферической волны: *а* — регистрация интерференционной картины; *б* — просвечивание голограммы; *в* — формирование изображений S', S'' частью голограммы, показанной справа

на нее из S. Аналогичная картина описана в § 26, где также обсуждалась интерференция плоской и сферической волн (кольца Ньютона). Расстояние между соседними кольцами убывает по мере роста их радиуса. Последнее легко объяснить с помощью простого расчета разности хода между сферическим и плоским фронтами и соответствующей разности фаз ψ, определяемой соотношением

$$\psi = \frac{2\pi}{\lambda}\,\frac{r^2}{2R} + \psi_0,$$

где ψ_0 — некоторая постоянная величина, $R = SO$, r — радиус кольца. Положение светлых колец определяется из условия $\psi = 2\pi n_1$ (n_1 — целое число), так что

$$r_n = \sqrt{2\lambda R n}, \quad n = n_1 - \frac{\psi_0}{2\pi}.$$

Перемещением источника можно добиться максимальной интенсивности в центре картины, что эквивалентно целочисленности величины $\psi_0/2\pi$; в этих условиях разность $n = n_1 - \psi_0/2\pi$ совпадает с номером кольца. Измерив радиус какого-либо кольца, мы можем вычислить радиус кривизны волнового фронта в точке O,

$$R = \frac{r^2}{2\lambda n},$$

и определить тем самым положение источника.

Таким образом, и в данном случае «запись» фазы волны достаточна для выяснения ее геометрических свойств.

Заменим экран H фотопластинкой и сфотографируем интерференционную картину. В результате мы получим голограмму с чередующимися прозрачными и непрозначными кольцами, причем закон изменения радиуса колец такой же, как и в случае зонной пластинки. Свойства зонной пластинки, изложенные в § 34, позволяют легко понять результаты следующего опыта по восстановлению волнового фронта. Просветив полученную голограмму плоской волной (см. рис. 11.4 *б*), обнаружим справа от голограммы несколько волн. Одна из них (плоская) распространяется в направлении волны, падающей на голограмму; вторая сходится в точку S''; третья расходится и имеет своим центром точку S'. Точка S' находится на таком же расстоянии от голограммы, как и источник S во время экспонирования (см. рис. 11.4 *а*), т.е. точку S' можно рассматривать как восстановленный источник S.

Объяснение описанных явлений непосредственно вытекает из фокусирующих свойств зонной пластинки (см. § 34). Если пропускание голограммы следует закону $\sin(\pi r^2/\lambda R)$, то никакие волны, кроме указанных трех, не образуются. Это свойство зонных пластинок аналогично способности решеток Рэлея образовывать дифракционные максимумы порядков $m = 0$ и ± 1 (см. упражнение 88). Поэтому иногда зонную пластинку именуют *зонной решеткой.*

Если пропускание голограммы отличается от указанного выше, наблюдается несколько более слабых сходящихся и расходящихся волн, не показанных на рис. 11.4 *б* (см. § 34 и рис. 8.6) [1]).

Голограммы обладают важным свойством восстанавливать волновой фронт небольшой своей частью. Видоизменим схему опыта, закрыв часть голограммы диафрагмой, как показано на рис. 11.4 *в*. Опыт показывает, что открытая часть голограммы по-прежнему об-

---

[1]) Следует иметь в виду, что величина r_m в § 34 характеризует радиус m-й зоны Френеля. В данном же параграфе мы оперировали с радиусом n-го светлого кольца, а в пределах каждого кольцевого периода укладываются две зоны Френеля.

разует мнимое (S') и действительное (S'') «изображения» несуществующего источника S. Разумеется, интенсивность волн всех порядков уменьшится в соответствии с меньшей величиной светового потока. И в том, и в другом отношении поведение зонной пластинки подобно действию линзы. В случае голограммы плоской волны, разобранном в предыдущем параграфе, отмеченное свойство голограммы очевидно: если прикрыть часть дифракционной решетки, то направление дифрагировавших волн останется прежним, но изменится их интенсивность и увеличится ширина главных максимумов (см. § 46). Таким образом, и в данном отношении голограммы плоской и сферической волн вполне подобны друг другу.

Опыт, выполненный по схеме рис. 11.4 *в*, позволяет сделать два интересных вывода. Во-первых, можно было вообще не экспонировать участок голограммы, закрытый впоследствии диафрагмой. Но это означает, что голограмму можно изготавливать и при наклонном падении сферической волны на экран H и фотопластинку, т.е. на первом этапе голографирования работать по схеме, аналогичной рис. 11.4 *в*. Восстановленная волна порядка $m = -1$ все равно будет иметь центром схождения точку S', совпадающую с положением источника S во время экспонирования. Во-вторых, в схеме с наклонным падением (в отличие от рис. 11.4 *а*, *б*) происходит пространственное разделение пучков, образующих действительное и мнимое изображения источника. Это обстоятельство представляет несомненное практическое преимущество, вследствие чего в большинстве голографических приборов осуществляется наклонное падение опорных световых пучков.

§ 60. Голограммы Френеля трехмерных объектов

Опорная и освещающая объект волны могут формироваться в результате разделения расширенного волнового фронта лазерного излучения Σ на две части (рис. 11.5 *а*). Одна часть фронта отражается от зеркала *З*, а другая — рассеивается объектом наблюдения O. Оба волновых поля достигают фотопластинки *П*, на которой регистрируется результирующая интерференционная картина — голограмма объекта O. На рис. 11.6 приведена обычная фотография некоторых объектов, на рис. 11.7 *а* — их голограмма в натуральную величину, на рис. 11.7 *б* — участок той же голограммы при увеличении. Интерференционные кольца на голограмме — результат побочного эффекта, вызванного дифракцией света на пылинках, случайно оказавшихся на пути опорной волны.

Изображения объекта формируются в результате просвечивания голограммы лазерным световым пучком (рис. 11.5 *б*) и дифракции света на неоднородностях ее почернения. В направлении *1–1* распространяется волновое поле, формирующее *без помощи объектива* действительное изображение (ДИ) объекта. В направлении *2–2* восстанавливается волновое поле, рассеянное объектом наблюдения, как это было показано на рис. 11.5 *а*. Это волновое поле соответствует мнимому изображению (МИ) объекта. Такое поле можно использовать, перемещая в нем объектив или глаз, для формирования различных

изображений объекта, видимых под разными углами из различных точек пространства, как при непосредственных наблюдениях объекта. Достигаемое при этом взаимное параллактическое смещение деталей изображения показано на рис. 11.8. То же можно наблюдать и для действительных изображений, просвечивая различные участки голограммы.

Кроме рассмотренных волновых полей, за голограммой распространяются также ослабленный исходный световой пучок *3–3* и немного расходящийся световой пучок *4–4*. Эти пучки не несут информации об объекте наблюдения.

В обсуждаемом опыте рассеянное объектом излучение можно рассматривать как результат дифракции на нем освещающего лазерного пучка. В схеме рис. 11.5 голограмма не слишком удалена от объекта,

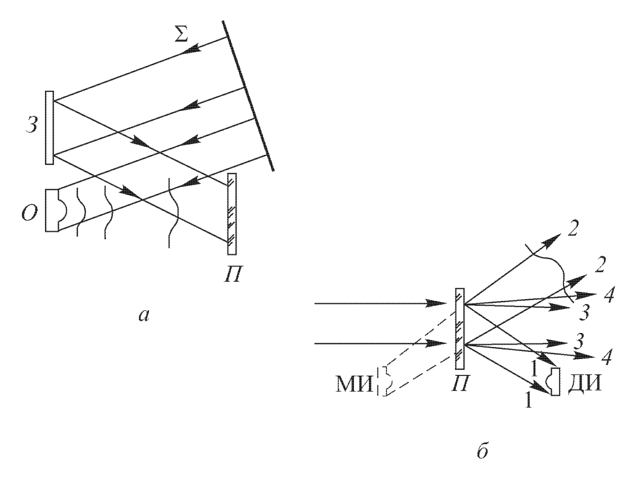


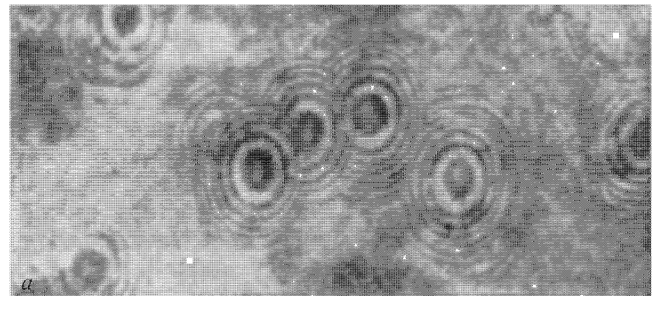
Рис. 11.5. Схема опыта по голографированию трехмерных рассеивающих объектов и восстановлению их изображений

так что указанную дифрагировавшую волну следует отнести к френелевскому типу (см. гл. VIII). Поэтому голограммы, получаемые в такого рода расположениях, называют *голограммами Френеля.*

Для объяснения описанного, очень эффектного эксперимента можно рассуждать следующим образом. На первом этапе голографирования фотопластинка воспринимает более или менее сложное поле, фазовые свойства которого зависят от геометрических особенностей объекта и опорной волны, поскольку использованное лазерное излучение пространственно когерентно. Каково бы ни было это поле, его можно представить в виде набора плоских волн (теорема Фурье). Каждая из них в результате интерференции с опорной волной создает периодическую систему интерференционных полос с характерными для нее ориентацией и периодом. Каждая элементарная интерференционная картина приводит к образованию на голограмме некоторой дифракционной решетки. В соответствии с изложенным в § 58 каждая из этих решеток на втором этапе голографирования восстановит



Рис. 11.6. Фотография объектов исследования



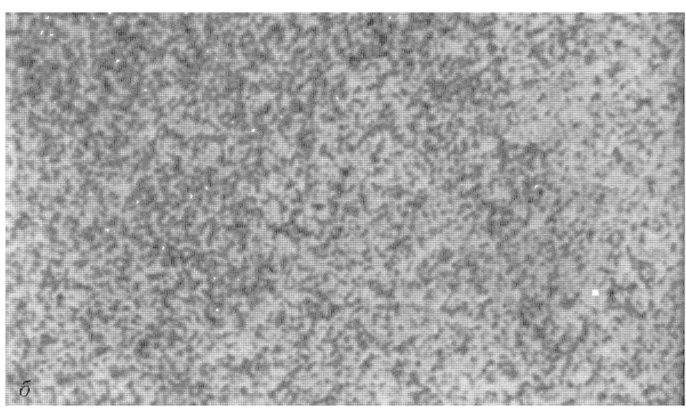
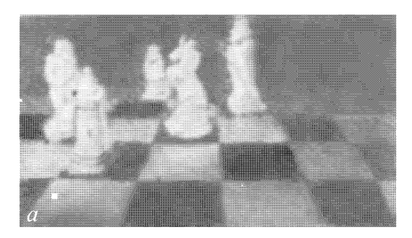
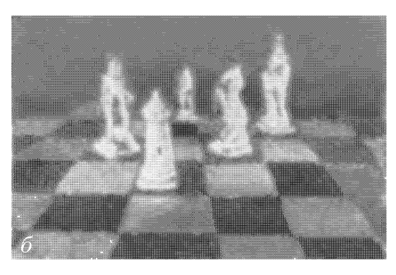


Рис. 11.7. Голограмма объектов (*а*), изображенных на рис. 11.6, и сильно увеличенный ее участок (*б*)

исходную плоскую волну. Более детальный анализ показывает, что восстановленные элементарные волны находятся в таких же амплитудных и фазовых отношениях, как и набор исходных плоских волн. Поэтому совокупность восстановленных элементарных плоских волн воссоздаст, согласно теореме Фурье, полное рассеянное объектами поле, которое мы и наблюдаем визуально или регистрируем фотографически.





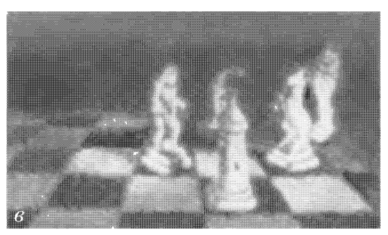


Рис. 11.8. Голографические изображения, полученные для разных направлений наблюдения

Сказанное относится к элементарной плоской волне, которая на рис. 11.3 *б* обозначена как волна порядка $m = -1$. Помимо нее, элементарная дифракционная решетка формирует по крайней мере еще две совокупности волн — нулевого и первого порядков. Волны $m = 0$ распространяются в направлении опорной волны и не попадают в глаз при надлежащем его расположении (см. рис. 11.5 *б*). Волны порядка $m = 1$ образуют, как будет видно, второе, действительное изображение объекта.

Для выяснения последнего обстоятельства целесообразно рассуждать другим способом, опираясь на рассмотрение голограммы сферической волны. Каждая точка предмета представляет собой источник сферической волны; ее интерференция с опорной волной создает на голограмме элементарную зонную решетку, которая на втором этапе голографирования восстанавливает исходную сферическую волну и формирует изображение выделенной точки предмета (точка S' на рис. 11.4). Совокупность элементарных зонных решеток создает, очевидно, мнимое изображение всего объекта.

Кроме мнимого изображения S', элементарная зонная решетка образует действительное изображение S'' (см. рис. 11.4 *б*, *в*), совокупность которых и обусловливает возникновение действительного изображения объекта в целом.

Помимо элементарных решеток, обусловленных интерференцией опорной волны с каждой из элементарных волн, голограмма содержит дополнительную структуру, возникающую в результате интерференции элементарных волн между собой. Эта дополнительная структура приводит к некоторому рассеянию опорной волны или, что то же, к образованию дополнительных дифрагировавших волн, концентрирую-

щихся вблизи направления распространения просвечивающей волны. Подобное рассеяние опорной волны может мешать наблюдению регулярных (мнимого и действительного) изображений объекта. Если, однако, угол падения опорной волны на голограмму в достаточной мере отличается от углов падения предметных волн, то дополнительные волны не накладываются на изображения (см. упражнение 236).

При количественном описании голографирования удобно применять комплексную запись колебаний (см. § 4), которой мы и воспользуемся. Поле, создаваемое в плоскости голограммы в результате рассеяния лазерного излучения объектом, можно записать в виде

$$E(\boldsymbol{\rho}) = A(\boldsymbol{\rho}) \exp\left[i\varphi(\boldsymbol{\rho})\right], \tag{60.1}$$

где $\boldsymbol{\rho}$ — радиус-вектор, лежащий в плоскости голограммы $A(\boldsymbol{\rho})$ и $\varphi(\boldsymbol{\rho})$ — амплитуда и фаза световых колебаний в точке с радиусом-вектором $\boldsymbol{\rho}$. Плоская опорная волна описывается выражением [1])

$$A_0 \exp\left(i\mathbf{k}_0\mathbf{r}\right), \tag{60.2}$$

где $\mathbf{k}_0$ — волновой вектор, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор произвольной точки пространства, A_0 — амплитуда, сохраняющая постоянное значение в пределах поперечного сечения пучка. Если начало координат поместить на поверхности голограммы, то в ее плоскости поле опорной волны принимает вид

$$E_0(\boldsymbol{\rho}) = A_0 \exp\left(i\mathbf{k}_0\boldsymbol{\rho}\right). \tag{60.3}$$

Итак, суммарное поле на поверхности голограммы записывается следующим образом:

$$E_0(\boldsymbol{\rho}) + E(\boldsymbol{\rho}) = A_0 \exp\left(i\mathbf{k}_0\boldsymbol{\rho}\right) + A(\boldsymbol{\rho}) \exp\left[i\varphi(\boldsymbol{\rho})\right]. \tag{60.4}$$

Согласно правилам пользования комплексной записью колебаний распределение освещенности $I(\boldsymbol{\rho})$ в интерференционной картине пропорционально квадрату модуля выражения (60.4), т.е.

$$I(\boldsymbol{\rho}) = |E_0(\boldsymbol{\rho})|^2 + |E(\boldsymbol{\rho})|^2 + E_0^*(\boldsymbol{\rho})E(\boldsymbol{\rho}) + E_0(\boldsymbol{\rho})E^*(\boldsymbol{\rho}), \tag{60.5}$$

причем мы опустили несущественный в данном расчете коэффициент пропорциональности.

Допустим, что мы изготовили позитивную фотографию интерференционной картины, а фотоматериал и режим проявления выбрали таким образом, что коэффициент пропускания голограммы $T(\boldsymbol{\rho})$ пропорционален освещенности $I(\boldsymbol{\rho})$, т.е. $T(\boldsymbol{\rho}) = T_0 I(\boldsymbol{\rho})$. В этих условиях описание второго этапа голографирования сводится к следующему. Просвечивающая волна, идентичная опорной, проходит голограмму и оказывается промодулированной в соответствии с распределением освещенности в интерференционной картине. Обозначая через $\mathscr{E}(\boldsymbol{\rho})$ освещающее поле на выходе из голограммы, т.е. на ее «выходной» поверхности, находим

$$\mathscr{E}(\boldsymbol{\rho}) = T(\boldsymbol{\rho})E_0(\boldsymbol{\rho}) = T_0 I(\boldsymbol{\rho})E_0(\boldsymbol{\rho}). \tag{60.6}$$

[1]) Поскольку условие постоянства фазы $\mathbf{k}_0\mathbf{r} = \mathrm{const}$ определяет плоскость, перпендикулярную к $\mathbf{k}_0$, выражение (60.2) действительно соответствует плоской волне, распространяющейся вдоль $\mathbf{k}_0$.

С помощью соотношений (60.5), (60.1) и (60.3) выражению для $\mathscr{E}(\boldsymbol{\rho})$ можно придать следующую форму:

$$\begin{aligned} &\mathscr{E}(\boldsymbol{\rho}) = \mathscr{E}_1(\boldsymbol{\rho}) + \mathscr{E}_2(\boldsymbol{\rho}) + \mathscr{E}_3(\boldsymbol{\rho}), \\ &\mathscr{E}_1(\boldsymbol{\rho}) = T_0[|A_0|^2 + |A(\boldsymbol{\rho})|^2]E_0(\boldsymbol{\rho}), \\ &\mathscr{E}_2(\boldsymbol{\rho}) = T_0|A_0|^2 E(\boldsymbol{\rho}), \\ &\mathscr{E}_3(\boldsymbol{\rho}) = T_0 A_0^2 E^*(\boldsymbol{\rho}) \exp(2i\mathbf{k}_0\boldsymbol{\rho}). \end{aligned} \tag{60.7}$$

Уравнения (60.6) и (60.7) были впервые получены Д. Габором (1948) и носят название уравнений Габора.

Таким образом, поле $\mathscr{E}(\boldsymbol{\rho})$ оказывается возможным представить в виде суммы трех членов. В силу принципа суперпозиции мы можем по отдельности рассматривать дифрагировавшие волны, обусловленные каждым из этих членов.

Согласно принципу Гюйгенса–Френеля, дифрагировавшее поле за голограммой однозначно определяется фазами и амплитудами фиктивных источников на некоторой произвольной поверхности. Такой поверхностью может служить выходная плоскость голограммы, для которой мы вычислили поле ($\mathscr{E}(\boldsymbol{\rho})$) и, таким образом, узнали характеристики фиктивных источников Гюйгенса–Френеля. Напомним, что существенное значение в любой дифракционной задаче имеет только закон распределения фаз и амплитуд фиктивных источников. Уменьшение или увеличение амплитуд, одинаковое для всех фиктивных источников, обусловит лишь пропорциональное изменение амплитуд дифрагировавших волн, но не повлияет на их характерные особенности. Последнее обстоятельство позволяет не проводить решения дифракционной задачи в полном объеме и, тем не менее, выяснить структуру восстановленной волны.

Часть поля на границе голограммы, описываемая членом $\mathscr{E}_1(\boldsymbol{\rho})$, с точностью до множителя $T_0[|A_0|^2 + |A(\boldsymbol{\rho})|^2]$ совпадает с тем, которое создала бы опорная волна в отсутствие голограммы, т.е. при свободном распространении. Опорная волна обычно значительно более интенсивна, чем предметная, так что членом $|A(\boldsymbol{\rho})|^2$ можно пренебречь и коэффициент пропорциональности между $\mathscr{E}_1(\boldsymbol{\rho})$ и $E_0(\boldsymbol{\rho})$ оказывается постоянным. В этом случае, следовательно, член $\mathscr{E}_1(\boldsymbol{\rho})$ отражает тот факт, что за голограммой будет распространяться плоская волна, совпадающая по направлению с опорной [1]).

Член $\mathscr{E}_2(\boldsymbol{\rho})$ в (60.7) пропорционален полю $E(\boldsymbol{\rho})$, созданному в плоскости голограммы волнами от исследуемого объекта. Ясно по-

[1]) В рамках представлений, основанных на разложении поля $E(\boldsymbol{\rho})$ на элементарные волны, член $|A(\boldsymbol{\rho})|^2$ описывает, очевидно, дополнительную структуру голограммы, обусловленную интерференцией между этими элементарными волнами. Как было выяснено выше, указанная структура приводит к некоторому рассеянию просвечивающей волны, но вредное влияние такого рассеяния можно устранить рациональным выбором углов падения опорной и просвечивающей волн.

этому, что поле, формируемое соответствующими вторичными источниками Гюйгенса–Френеля, идентично тому полю, которое создается самим объектом в отсутствие голограммы. Таким образом, эта часть поля отвечает мнимому изображению объекта. Можно сказать поэтому, что наблюдение мнимого изображения эквивалентно рассматриванию самого предмета через отверстие, совпадающее с рабочей частью голограммы. В свете сказанного способность голограммы восстанавливать изображение с помощью небольшой части своей поверхности получает почти тривиальное объяснение: указанная способность эквивалентна тому, что при непосредственном рассматривании какой-либо точки предмета используется только та часть ее излучения, которая ограничена действующим конусом лучей, попадающих в глаз.

Нетрудно показать, что член $\mathscr{E}_3(\boldsymbol{\rho})$ описывает образование действительного изображения объекта. В этом мы убедились на примере точечного источника света (см. § 59). Последовательно помещая экран в разные сечения области локализации действительного изображения, можно получать четкие изображения трехмерного объекта и его деталей, не применяя никаких дополнительных оптических систем. При таких наблюдениях легко обнаружить, что подобие между объектом и действительным изображением имеет место только при условии, что опорный и просвечивающий пучок падают на голограмму перпендикулярно к ее поверхности. В противном случае действительное изображение оказывается искаженным и при некоторых условиях может даже исчезнуть (см. упражнение 263).

До сих пор мы считали опорную волну плоской. Из элементарной теории, изложенной выше, нетрудно усмотреть, что в качестве опорной может служить и сферическая волна. В самом деле, заменим выражение (60.3) на

$$E_0(\boldsymbol{\rho}) = A_0 \exp\left[ik_0|\mathbf{r}_0 - \boldsymbol{\rho}|\right],$$

где $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор центра сферической волны. Поскольку и в данном случае $|E_0(\boldsymbol{\rho})|^2 = |A_0|^2$, по-прежнему получим $\mathscr{E}_2(\boldsymbol{\rho}) \propto E(\boldsymbol{\rho})$, и, следовательно, мнимое изображение остается таким же, как и при плоской опорной волне.

§ 61. Голограмма как элемент идеальной оптической системы. Получение увеличенных изображений

В предыдущих параграфах мы предполагали, что опорная и просвечивающая волны идентичны. В этом случае мнимое изображение полностью копирует сам объект. Однако выполнение указанного условия отнюдь не обязательно, и голографирование успешно осуществляется и в том случае, когда на первом и втором этапах применяется излучение с разными длинами волн и разными кривизнами волновых фронтов. Такие изменения условий опыта позволяют получать *увеличенные изображения* голографируемых предметов.

Рассмотрим голограмму сферической волны, получаемую с применением также сферических волн в качестве опорной и просвечивающей. Световые колебания, соответствующие этим трем волнам, в

точке с радиусом-вектором $\boldsymbol{\rho}$ голограммы можно записать в виде

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{\rho}) &= A \exp\left[ik|\mathbf{r}_s + \boldsymbol{\rho}_s - \boldsymbol{\rho}|\right], \\ E_0(\boldsymbol{\rho}) &= A_0 \exp\left[ik|\mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\rho}_0 - \boldsymbol{\rho}|\right], \\ E'_0(\boldsymbol{\rho}) &= A'_0 \exp\left[ik'|\mathbf{r}'_0 + \boldsymbol{\rho}'_0 - \boldsymbol{\rho}|\right]. \end{aligned} \tag{61.1}$$

Векторы $\boldsymbol{\rho}_s$, $\boldsymbol{\rho}_0$, $\boldsymbol{\rho}'_0$ задают положение оснований перпендикуляров $\mathbf{r}_s$, $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{r}'_0$, направленных из плоскости голограммы в центры предметной, опорной и просвечивающей волн соответственно (рис. 11.9). Волновые числа $k = 2\pi/\lambda$ и $k' = 2\pi/\lambda'$, вообще говоря, не равны друг другу.

Будем интересоваться сначала мнимым изображением предмета. Повторяя рассуждения, проведенные при обосновании соотношения (60.6), нетрудно убедиться, что интересующая нас часть поля $\mathscr{E}_2(\boldsymbol{\rho})$ на «выходной» границе голограммы после ее просвечивания выражается соотношением

$$\mathscr{E}_2(\boldsymbol{\rho}) = T_0 E_0^*(\boldsymbol{\rho}) E'_0(\boldsymbol{\rho}) E(\boldsymbol{\rho}) = T_0 A_0^* A'_0 A \exp\left[i\psi(\boldsymbol{\rho})\right], \tag{61.2}$$

где $\psi(\boldsymbol{\rho})$ — фаза колебания в точке с радиусом-вектором $\boldsymbol{\rho}$,

$$\psi(\boldsymbol{\rho}) = k|\mathbf{r}_s + \boldsymbol{\rho}_s - \boldsymbol{\rho}| - k|\mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\rho}_0 - \boldsymbol{\rho}| + k'|\mathbf{r}'_0 + \boldsymbol{\rho}'_0 - \boldsymbol{\rho}|. \tag{61.3}$$

Предположим, что длины перпендикуляров значительно превышают разности $|\boldsymbol{\rho}_s - \boldsymbol{\rho}|$ и т.д., т.е. углы падения лучей на голограмму малы для всех ее точек и для всех трех волн. В этом случае простые, но громоздкие преобразования, которые полезно проделать читателю в качестве упражнения, позволяют представить $\psi(\boldsymbol{\rho})$ следующим образом:

$$\psi(\boldsymbol{\rho}) = \frac{k'}{2r'_s}\,(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'_s)^2 + \psi_0, \tag{61.4}$$

где ψ_0 не зависит от $\boldsymbol{\rho}$, а r'_s, $\boldsymbol{\rho}'_s$ определяются соотношениями

$$\frac{k'}{r'_s} = \frac{k}{r_s} + \frac{k'}{r'_0} - \frac{k}{r_0}, \tag{61.5}$$

$$k'\,\frac{\boldsymbol{\rho}'_s}{r'_s} = k\,\frac{\boldsymbol{\rho}_s}{r_s} + k'\,\frac{\boldsymbol{\rho}'_0}{r'_0} - k\,\frac{\boldsymbol{\rho}_0}{r_0}. \tag{61.6}$$

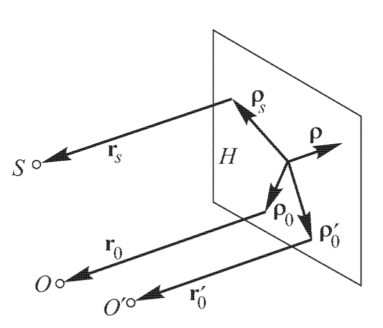


Рис. 11.9. К теории голографических систем

Распределение фаз, описываемое формулой (61.4), могла бы создать сферическая волна с длиной $\lambda' = 2\pi/k'$, причем центр ее должен находиться на перпендикуляре длиной r'_s, восстановленном из точки $\boldsymbol{\rho}'_s$. В таком случае построение Френеля, обсужденное в § 33 и относящееся к свободному распространению сферической волны, позволяет заключить, что за голограммой будет распространяться сферическая волна с указанным положением ее центра. Другими словами, формулы (61.5) и (61.6) для r'_s, $\boldsymbol{\rho}'_s$ определяют положение изображения точечного объекта, находившегося при экспонировании голограммы в точке, задаваемой величинами r_s, $\boldsymbol{\rho}_s$.

Таким же путем можно вывести аналогичные соотношения, описывающие положение $(r''_s, \boldsymbol{\rho}''_s)$ второго изображения точечного источника, которое формируется при просвечивании голограммы:

$$\frac{k'}{r''_s} = -\frac{k}{r_s} + \frac{k'}{r'_0} + \frac{k}{r_0}, \tag{61.7}$$

$$k'\frac{\boldsymbol{\rho}''_s}{r''_s} = -k\frac{\boldsymbol{\rho}_s}{r_s} + k'\frac{\boldsymbol{\rho}'_0}{r'_0} + k\frac{\boldsymbol{\rho}_0}{r_0}. \tag{61.8}$$

Подчеркнем, что величины r'_s, r''_s могут быть как положительными, так и отрицательными. Физически это означает, что центры кривизны каждой из восстановленных волн могут располагаться по обе стороны голограммы. В дальнейшем условимся считать расстояния от голограммы до точек S, O, O' (см. рис. 11.9) и до точек изображений S', S'' положительными, если указанные точки находятся за голограммой (по ходу света), и отрицательными, если они располагаются до голограммы.

Таким образом, в рассматриваемом общем случае обе восстановленные волны могут образовывать и мнимые ($r'_s < 0$, $r''_s < 0$), и действительные ($r'_s > 0$, $r''_s > 0$) изображения. Поэтому в дальнейшем будем называть S' (часть поля $\mathscr{E}_2(\boldsymbol{\rho})$) *главным изображением*, а S'' (часть поля $\mathscr{E}_3(\boldsymbol{\rho})$) — *дополнительным.*

Если просвечивающая волна плоская, то независимо от кривизны опорной волны изображения S' и S'' лежат на равных расстояниях от голограммы, но по разные ее стороны,

$$\frac{k'}{r'_s} = -\frac{k'}{r''_s} = k\left(\frac{1}{r_s} - \frac{1}{r_0}\right).$$

В этом случае, следовательно, одно изображение действительное, а другое — мнимое, причем главное изображение будет мнимым, если кривизна $1/r_0$ опорной волны меньше (в алгебраическом смысле), чем кривизна $1/r_s$ волны, испускаемой источниками. Пусть теперь предмет и центр опорной волны находятся в одной плоскости, параллельной голограмме ($r_s = r_0$). Тогда из (61.5) и (61.7) получаем $r''_s = r'_s = r'_0$, т.е. оба изображения располагаются по одну сторону голограммы и на равных расстояниях от нее. Этот случай более подробно рассматривается в следующем параграфе.

Обратимся к вопросу об увеличении голографического изображения. Сместим точечный предмет параллельно плоскости голограммы на величину $\Delta\boldsymbol{\rho}_s$. Изображения S' и S'' также сместятся, причем смещения эти, согласно формулам (61.6) и (61.8), равны

$$\Delta\boldsymbol{\rho}'_s = \frac{k}{k'}\,\frac{r'_s}{r_s}\,\Delta\boldsymbol{\rho}_s, \quad \Delta\boldsymbol{\rho}''_s = -\frac{k}{k'}\,\frac{r''_s}{r_s}\,\Delta\boldsymbol{\rho}_s. \tag{61.9}$$

К такому же результату мы придем и в том случае, если под $\Delta\boldsymbol{\rho}_s$, $\Delta\boldsymbol{\rho}'_s$, $\Delta\boldsymbol{\rho}''_s$ будем понимать векторы, соединяющие соответственно две точки предмета и их изображений. Коэффициенты пропорциональности в соотношениях (61.9) называются *поперечными увеличениями* V' и V''

голографической системы:

$$V' = \frac{k}{k'}\,\frac{r'_s}{r_s} = \frac{1}{1 - r_s/r_0 + (k'/k)(r_s/r'_0)}\,,$$
$$V'' = -\frac{k}{k'}\,\frac{r''_s}{r_s} = \frac{1}{1 - r_s/r_0 - (k'/k)(r_s/r'_0)}\,, \tag{61.10}$$

и равны, очевидно, отношениям размеров изображений и объекта в направлениях, параллельных плоскости голограммы.

Продольные увеличения U' и U'' определяются как отношения смещений изображений к смещению точки предмета в направлении, нормальном к голограмме. Из соотношений (61.5), (61.7) найдем

$$U' = \frac{dr'_s}{dr_s} = \frac{k}{k'}\left(\frac{r'_s}{r_s}\right)^2 = \frac{k'}{k}\,V'^2, \quad U'' = \frac{dr''_s}{dr_s} = -\frac{k}{k'}\left(\frac{r''_s}{r_s}\right)^2 = -\frac{k'}{k}\,V''^2. \tag{61.11}$$

Из сравнения (61.11) и (61.10) можно увидеть, что продольное и поперечное увеличения различны. Это означает искажение формы изображения в сравнении с объектом (трехмерным); изображение сплюснуто или растянуто в направлении к голограмме в зависимости от того, какое из увеличений больше $|V'|$ и $|V''|$ или $|U'|$ и $|U''|$. Главное изображение подобно объекту только при выполнении условия $r_s = r'_s$, чему отвечает единственное положение предмета

$$\frac{1}{r_s} = \frac{1}{k' - k}\left(\frac{k'}{r'_0} - \frac{k}{r_0}\right).$$

Поперечное и продольное увеличения при этом условии равны отношению длин волн, т.е.

$$V' = U' = \frac{k}{k'} = \frac{\lambda'}{\lambda}\,.$$

Таким образом, можно получить увеличенное голографическое изображение, подобное объекту; в этом случае длина просвечивающей волны должна быть больше, чем предметной и опорной.

Для плоских объектов выполнение условия $V' = U'$ не необходимо, и можно получить неискаженное увеличенное изображение не только за счет различия в длинах волн λ и λ', но и путем выбора геометрических условий опыта. Например, при плоской опорной волне $(r_0 \to \infty)$

$$V' = \frac{1}{1 + (k'/k)(r_s/r'_0)}$$

и увеличенное главное изображение получается при разных знаках r_s и r'_0, т.е. просвечивающая волна должна быть сходящейся [1] (r_s всегда отрицательно).

Мы не будем более конкретизировать общие соотношения (61.5)–(61.8), связывающие положение объекта и его изображений, поскольку они в формальном отношении полностью совпадают с законами,

[1]) Аналогичный анализ дополнительного изображения см. в упражнении 264.

справедливыми для любой оптической системы. Последние будут детально анализироваться в главах XII–XIV, а здесь мы ограничимся констатацией указанной аналогии. Для удобства сопоставления выпишем рядом основные соотношения, описывающие изображение в голографических и линзовых системах (см. § 79):

Главное голографическое изображение	Изображение в идеальной линзе
$\dfrac{k'}{r'_s} - \dfrac{k}{r_s} = \dfrac{k'}{f'}$,	$\dfrac{n_2}{a_2} - \dfrac{n_1}{a_1} = \dfrac{n_2}{f_2} = -\dfrac{n_1}{f_1}$,
$V' = \dfrac{k}{k'}\,\dfrac{r'_s}{r_s}$,	$V = \dfrac{n_1}{n_2}\,\dfrac{a_2}{a_1}$,
$U' = \dfrac{k}{k'}\left(\dfrac{r'_s}{r_s}\right)^2 = \dfrac{k'}{k}\,V'^2$,	$U = \dfrac{n_1}{n_2}\left(\dfrac{a_2}{a_1}\right)^2 = \dfrac{n_2}{n_1}\,V^2$.

Здесь a_2, a_1 (расстояния от изображения и объекта до линзы, точнее, до ее главных плоскостей) аналогичны r'_s, r_s. Показатели преломлений n_2, n_1 пространства предметов и пространства изображений следует соотнести с волновыми числами k', k. Роль фокусных расстояний голографической системы играют величины f', f, определяемые соотношениями

$$\frac{k'}{f'} = \frac{k'}{r'_0} - \frac{k}{r_0}, \quad \frac{k}{f} = -\frac{k'}{r'_0} + \frac{k}{r_0} = -\frac{k'}{f'};$$

они так же связаны между собой, как и фокусные расстояния f_2, f_1 (заднее и переднее) линзовой системы.

Обсуждаемую аналогию можно продолжить, сравнивая f' и f с фокусными расстояниями тонкой линзы[1]) (см. § 76, 77)

$$\frac{n_2}{f_2} = \frac{n_2 - n}{R_2} - \frac{n_1 - n}{R_1}, \quad \frac{n_1}{f_1} = \frac{n_1 - n}{R_1} - \frac{n_2 - n}{R_2} = -\frac{n_2}{f_2},$$

где n — показатель преломления материала линзы, R_1 и R_2 — радиусы кривизны ее поверхностей, подчиненные тому же правилу знаков, что и r_s и т.д. Таким образом, голограмма по отношению к главному изображению эквивалентна тонкой линзе, у которой радиусы кривизны поверхностей связаны с r_0, r'_0 следующим образом:

$$\frac{1}{r_0} = \frac{n_1 - n}{n_1}\,\frac{1}{R_1}, \quad \frac{1}{r'_0} = \frac{n_2 - n}{n_2}\,\frac{1}{R_2}. \tag{62.12}$$

Главное и дополнительное голографическое изображения преобразуются друг в друга так же, как при отражении в сферическом зеркале. Действительно, из соотношений (61.5) и (61.7), (61.9), (61.11) легко получаем

$$\frac{1}{r''_s} + \frac{1}{r'_s} = \frac{2}{r'_0}, \quad \Delta\boldsymbol{\rho}''_s = -\frac{r''_s}{r'_s}\,\Delta\boldsymbol{\rho}'_s, \quad \frac{dr''_s}{dr'_s} = -\left(\frac{r''_s}{r'_s}\right)^2, \tag{61.13}$$

[1]) Приведены более общие выражения, чем в § 76, верные и при $n_2 \neq n_1$.

что формально описывает отражение в сферическом зеркале (см. (72.4)), если радиус кривизны последнего равен расстоянию r_0' между голограммой и центром просвечивающей сферической волны. Поэтому дополнительное изображение иногда называют *сопряженным.*

Итак, геометрические свойства главного и дополнительного изображений, формируемых голограммой, такие как положение, ориентация [1]), размеры и т.п., совершенно идентичны свойствам изображений, образуемых линзой и зеркалом с соответственно подобранными характеристиками.

Установленная формальная аналогия, разумеется, не случайна. Как при голографировании, так и при отображении в линзовой либо зеркальной оптической системе речь идет о преобразовании одной сферической волны (предмета) в другую, также сферическую волну (изображения). Формальный вид закона такого преобразования (линейное преобразование кривизны волновых фронтов) предопределен самой постановкой задачи и никак не связан с конкретным способом его реализации. Любой способ, голографический или линзовый, может только изменить кривизну исходного волнового фронта в определенное число раз и добавить к ней новое слагаемое [2]), но не более того. Анализ физического явления, призванного осуществить эту процедуру, конкретизирует физический смысл соответствующего множителя и слагаемого и их зависимость от характеристик явления и конструктивных особенностей системы. Последнее оказывается очень существенным при сравнительном рассмотрении разных способов. Как уже упоминалось, применение разных длин волн на первом и втором этапе предоставляет голографии неизмеримо более широкие возможности, чем аналогичный фактор в линзовых и зеркальных системах (различие показателей преломления в пространстве изображений и предметов, иммерсионные объективы микроскопов, см. § 97), ибо можно использовать излучение с очень сильно различающимися длинами волн, например, рентгеновское и видимое (когда будет создан рентгеновский лазер).

В заключение подчеркнем, что голограмма и просвечивающая ее волна позволяют получить информацию о трехмерном объекте наблюдения без помощи каких-либо оптических систем. И если при обычной фотографии каждый негатив может дать лишь одно изображение объекта, наблюдаемого под определенным углом зрения, то в каждой голограмме записан целый комплекс изображений, позволяющий

---

[1]) Линзовые и зеркальные изображения различаются в следующем важном пункте: фиксируем на объекте правую тройку ортов; на линзовом изображении эта тройка всегда преобразуется в правую, а на зеркальном — всегда в левую тройку. Это свойство, многократно наблюдавшееся каждым при использовании бытовых зеркал, означает невозможность совмещения предмета и его изображения с помощью перемещений и вращений.

[2]) Такое же положение дел и в так называемых нелинейных оптических приборах, где изображение формируется излучением, возникающим в приборе в результате генерации суммарных, кратных и других гармоник (см. § 236).

наблюдать трехмерный объект под разными углами зрения. Кроме того, голография позволяет наблюдать интерференцию волн, существовавших в разные моменты времени (см. § 67).

§ 62. Голограммы Фурье

Полезными свойствами обладают голографические системы определенного рода, в которых каждая точка предмета порождает на голограмме элементарную решетку Рэлея. Один из способов осуществления таких голограмм иллюстрируется схемой, изображенной на рис. 11.10. Плоский прозрачный объект, показанный штриховой линией, просвечивается параллельным пучком лазерного излучения; часть того же пучка фокусируется линзой L на малое отверстие O, которое служит источником опорной сферической волны. Схема обеспечивает, очевидно, когерентность опорной волны и волн, идущих от предмета.

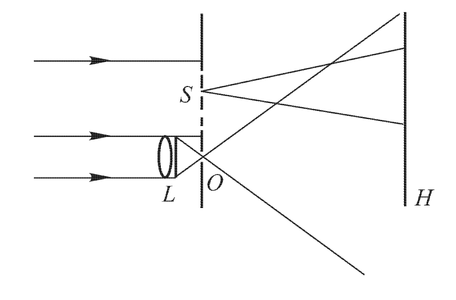


Рис. 11.10. Схема получения голограмм Фурье

Рассмотрим картину в плоскости голограммы H, возникающую в результате интерференции опорной волны и волны от какой-либо точки S объекта. Интерференционные картины такого рода, подробно обсужденные в гл. IV, имеют вид последовательности периодических полос; ширина (период) полос равна отношению длины волны к углу, под которым виден участок OS из точки голограммы H, для которой вычисляется период. Таким образом, в схеме рис. 11.10 каждой точке объекта соответствует гармоническое распределение интенсивности в плоскости H [1]). Амплитуда ее изменения пропорциональна коэффициенту пропускания объекта в точке S, а период тем меньше, чем дальше точка S от источника опорной волны O.

Опираясь на сказанное выше, легко показать, что распределение интенсивности света в плоскости H, обусловленное действием всего объекта, представляет собой преобразование Фурье для распределения амплитуды поля в плоскости объекта (см. упражнение 265). Иными словами, устройство, схематически изображенное на рис. 11.10, физически осуществляет преобразование Фурье над указанным распределением амплитуд. Поэтому голограммы, получаемые в расположениях указанного типа, называют *голограммами Фурье*.

Если голограмму Фурье просветить плоской волной, то каждая элементарная решетка образует три плоские волны с порядками $m = 0, \pm 1$ (см. § 58). Можно сказать, следовательно, что каждая точка

[1]) Угловые размеры отрезка OS должны быть, конечно, примерно одинаковыми для всех точек действующей части голограммы.

предмета порождает плоские волны (главное и дополнительное изображения), причем направление их распространения определяется координатой этой точки. Таким образом, в данном случае голографирование эквивалентно размещению предмета в фокальной плоскости некоторой оптической системы. Этот же вывод вытекает и из общих формул, полученных в предыдущем параграфе. Для рассматриваемого случая в обозначениях § 61 имеем $r_s = r_0$, $r'_0 \to \infty$ и из соотношений (61.5) и (61.7) следует:

$$\frac{1}{r'_s} = \frac{1}{r''_s} = 0,$$

что означает физически бесконечное удаление и главного, и дополнительного изображений.

Осветим теперь голограмму сферической волной. В этом случае оба изображения и центр просвечивающей волны оказываются в одной плоскости (рис. 11.11). Центральное пятнышко соответствует центру схождения просвечивающей волны, левое и правое изображения

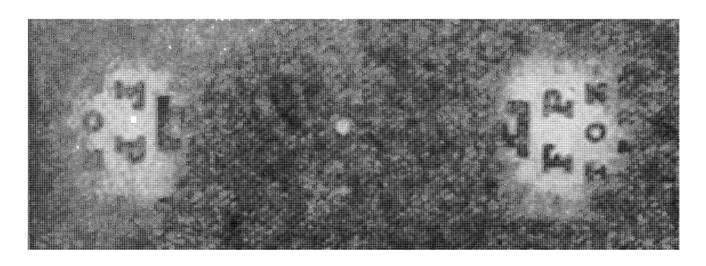


Рис. 11.11. Восстановленные изображения плоского объекта, полученные с помощью голограммы Фурье

суть главное и дополнительное. Взаимная «перевернутость» изображений обусловлена противоположными знаками их поперечного увеличения (см. § 61).

Отмеченные особенности находятся в полном согласии с выводами, которые можно извлечь из общей теории, изложенной в § 61. Полагая в соотношениях (61.5), (61.7) и (61.10) $r_s = r_0$, находим

$$r'_s = r''_s = r'_0, \quad V' = -V'' = \frac{k}{k'}\,\frac{r'_0}{r_s} = \frac{\lambda'}{\lambda}\,\frac{r'_0}{r_s}.$$

Если просвечивающая волна расходящаяся, то оба изображения мнимые, и для их регистрации необходима дополнительная оптическая система, в качестве которой может выступать и глаз. Просвечивание сходящейся волной ($r'_0 > 0$) позволяет получать действительные изображения на экране без применения линз (так называемое безлинзовое изображение).

Из приведенного выше выражения для увеличения видно, что в голографии Фурье увеличенное изображение можно получить как за счет различия длин волн λ и λ', так и путем приближения объекта к голограмме (уменьшение r_s), которая действует, следовательно, как объектив микроскопа.

Другой прием осуществления увеличенного изображения заключается в изготовлении репродукции голограммы в уменьшенном масштабе. Поскольку масштаб интерференционной структуры при этом уменьшился (скажем, в M раз), то углы дифракции для просвечивающего света соответственно увеличились (также в M раз). Следовательно, должен увеличиться и размер изображения. И действительно, простой расчет приводит к соотношению

$$V' = \frac{Mk}{k'}$$

(см. упражнение 266). Указанный прием используется, разумеется, не только в голографии Фурье (в частности, в голографической микроскопии), но и в ряде других случаев.

§ 63. Разрешающая способность голографических систем

Полученные в § 61 соотношения, позволяющие вычислить положение изображений, не следует понимать в том смысле, что каждой точке объекта будет соответствовать точка (в математическом смысле этого слова) в изображении. Как и в любой другой оптической системе, ограничение размеров волнового фронта приводит к тому, что изображение точечного источника имеет вид дифракционного пятна большего или меньшего размера, пропорционального длине волны (см. главы IX, XV). Упомянутые соотношения описывают только положения центров дифракционных пятен. Что касается их формы, размеров, распределения в них энергии и т.д., то все эти важные свойства изображения определяются формой голограммы и ее размерами, если, разумеется, при наблюдении изображения полностью используется весь свет от голограммы. Если же система, регистрирующая изображение (фотоаппарат или глаз), пропускает часть восстановленной волны, то свойства дифракционного пятна определяются регистрирующей системой.

В результате дифракционного расширения изображения точки голографическая система не сможет отличить друг от друга две точки, если расстояние между ними меньше диаметра дифракционного пятна, т.е. они будут восприниматься в изображении как одна точка. В таком случае говорят, что система не разрешает данные точки.

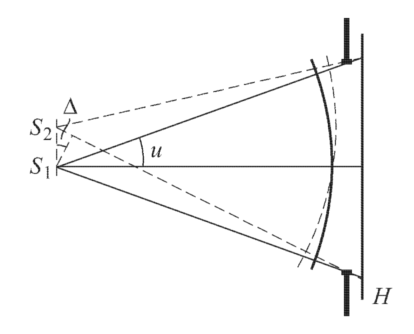


Рис. 11.12. К определению разрешающей способности голографических систем

Рассмотрим условия разрешения двух точечных источников света S_1 и S_2 (рис. 11.12), опираясь на представления, изложенные в предыдущих параграфах. Точки S_1 и S_2 будут разрешаться, если соответствующие им интерференционные картины в плоскости голограммы будут достаточно явно отличаться друг

от друга. Последнее в свою очередь зависит от того, насколько различаются разности фаз ψ_1 и ψ_2 между опорной волной и волнами от S_1 и S_2. Нетрудно видеть, что разность $\psi_1 - \psi_2$ просто равна разности фаз $\delta\psi$ между волнами от S_1 и S_2. Итак, если $\delta\psi$ достаточно велика, например, больше π, то интерференционные картины, соответствующие S_1 и S_2, сдвинуты друг относительно друга в должной мере и точки S_1 и S_2 разрешаются.

Из рис. 11.12 можно увидеть, что $\delta\psi$ имеет максимальное значение на краю диафрагмы, ограничивающей голограмму, причем соответствующая разность хода равна

$$\Delta = l \sin u,$$

где l — расстояние между точками S_1, S_2, u — угол, который стягивает половина диафрагмы. Поскольку $\delta\psi = 2\pi\Delta/\lambda$, то критерий разрешения $\delta\psi \geqslant \pi$ эквивалентен $\Delta \geqslant \lambda/2$, так что точки S_1, S_2 разрешаются при выполнении условия

$$l \geqslant l_{\min} = \frac{\lambda}{2\sin u}\,. \tag{63.1}$$

Если угол u невелик, то $\sin u \approx u \approx D/2r_s$ и условие (63.1) принимает вид

$$l \geqslant l_{\min} = \frac{\lambda}{D}\, r_s \tag{63.2}$$

(D — диаметр диафрагмы, r_s — расстояние от S_1 до голограммы).

Условие (63.1), полученное с помощью качественных соображений, мало отличается от результатов строгого рассмотрения разрешающей способности микроскопа (см. § 97). Этого и следовало ожидать, так как специфические черты голографирования, такие, как наличие опорной волны, ее геометрия, просвечивание и т.п., совершенно не существенны в вопросе о дифракционном пределе разрешения.

В предыдущих рассуждениях неявно предполагалось, что фоточувствительный слой, регистрирующий интерференционную картину, полностью передает все самые тонкие ее детали. Однако в действительности фотослой сам обладает не беспредельной разрешающей способностью, и если линейные размеры структуры интерференционной картины меньше некоторого предельного значения ε, фотослой перестает передавать истинное распределение освещенности. Величина ε определяется (для голографических эмульсий) размерами зерна фоточувствительного вещества.

Проследим влияние указанного свойства фотослоя на голограмму сферической волны, получаемую при плоской опорной волне (см. § 59). В этом случае голограмма имеет вид зонной решетки, изображенной на рис. 8.5. Начиная с некоторого номера расстояние между кольцами окажется меньше разрешающей способности фотослоя ε и кольца сливаются друг с другом [1]). Просвечивающая волна, проходя через такие периферийные участки голограммы, не будет испытывать

[1]) Наглядное представление об искажении, вносимом в голограмму за счет указанного эффекта, можно получить из рис. 7.5, на котором изображены аналогичные интерференционные кольца. Вдали от центра кóльца не

регулярную дифракцию и не примет участие в образовании изображения источника. Другими словами, действующий размер голограммы оказывается ограниченным свойствами фотослоя. Определим величину этого размера.

Согласно § 59 радиус n-го кольца зонной решетки дается соотношением

$$r_n^2 = 2\lambda r_s n.$$

Расстояние между соседними кольцами приближенно выражается следующим образом:

$$r_{n+1} - r_n = \frac{2\lambda r_s}{r_{n+1} + r_n} \approx \frac{\lambda r_s}{r_n}.$$

Приравнивая $r_{n+1} - r_n$ минимально разрешаемому расстоянию ε, находим диаметр действующей части голограммы

$$D = \frac{2\lambda r_s}{\varepsilon},$$

и с помощью полученного значения диаметра определяем предел разрешения в голографическом изображении

$$l \geqslant l_{\min} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, в данном случае разрешаемое расстояние между точками объекта равно половине разрешаемого расстояния на фотослое.

Обычно фотоматериалы характеризуют величиной, обратной ε, т.е. $N = 1/\varepsilon$ (число разрешаемых линий на мм). Для голографических систем специально разработаны фотоэмульсии с большим значением числа N (порядка 1000–8000 мм$^{-1}$), позволяющие добиваться большой разрешающей силы прибора. Если, например, $N = 10^3$ мм$^{-1}$, то величина $\varepsilon/2 = 1/2N = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ мм оказывается сравнимой с длиной волнй, и фотопластинка не очень сильно ухудшает разрешение прибора.

Следует иметь в виду, однако, что проделанный расчет относился к схемам, где пучки, образующие главное и дополнительное изображение, не разделены (см. рис. 11.4 *б*). В более употребительных расположениях с наклонным падением пучков, необходимым для разделения двух изображений, используются только кольца высокого порядка (см. рис. 11.4 *в*) и роль фотослоя увеличивается. Поэтому в голографии Френеля с наклонным падением разрешающая сила, как правило, определяется фотоматериалом.

§ 64. Качество голографических изображений

До сих пор мы предполагали, что излучение, применяемое в качестве опорной и просвечивающей волны, равно как и для освещения

разрешаются вследствие того, что полиграфическая репродукция составляется из ячеек, размеры которых в данном случае равны 0,5 мм и которые легко увидеть с помощью лупы. Каждая ячейка репродукции и играет роль зерна фотоэмульсии голограммы.

объектов, вполне когерентно. Однако абсолютно когерентного света не существует, и естественно возникает вопрос о выяснении необходимых требований, которым должен удовлетворять источник излучения.

Согласно изложенному в § 21, 22, для наблюдения контрастной интерференционной картины ширина спектра излучения, выраженная в длинах волн, должна подчиняться условию

$$\Delta\lambda < \frac{\lambda}{m},$$

где m — порядок интерференции, т.е. отношение разности хода L интерферирующих волн к λ. Более удобной, чем длина волны, оказывается обратная переменная, равная частоте, деленной на $2\pi c$ ($\omega/(2\pi c) = 1/\lambda$), выражаемая в см$^{-1}$ и обычно обозначаемая ν, как и число колебаний в секунду. Если ширину спектра излучения выразить в см$^{-1}$, $\Delta\nu = \Delta\lambda/\lambda^2$, а вместо порядка интерференции ввести разность хода в соответствии с определением $m = L/\lambda$, то критерию монохроматичности излучения можно придать простую форму:

$$\Delta\nu < \frac{1}{L}. \tag{64.1}$$

Итак, ширина спектра излучения, выраженная в см$^{-1}$, должна быть меньше (желательно, значительно меньше) обратной разности хода $1/L$. Физическое содержание этого условия очевидно: длина когерентности излучения или длина цугов, из которых состоит квазимонохроматическое излучение, равная $1/\Delta\nu$ (см. § 21), должна быть больше разности хода L, чтобы в плоскости голограммы интерферировали колебания, принадлежащие одному цугу.

Наибольшие значения разности хода имеют место при голографировании трехмерных объектов, когда L практически совпадает с размерами объекта. Если, следовательно, последние составляют несколько десятков см, то $\Delta\nu$ не может превышать 0,01 см$^{-1}$. Для сравнения укажем, что ширины спектральных линий в газоразрядных источниках света, как правило, находятся в пределах 0,1–1 см$^{-1}$, и поэтому их применение в голографии предполагает дополнительную монохроматизацию с помощью спектральных приборов с высокой разрешающей силой типа интерферометра Фабри–Перо (см. § 30, 50).

Требования, касающиеся пространственной когерентности излучения, легко сформулировать с помощью понятия области когерентности, введенного в § 22: размеры области когерентности $2l_{\text{ког}}$ должны быть больше размеров голограммы D. Если угловые размеры источника равны θ, то $2l_{\text{ког}} = \lambda/\theta$ и из сформулированного критерия необходимой пространственной когерентности $2l_{\text{ког}} > D$ следует:

$$\theta < \frac{\lambda}{D}. \tag{64.2}$$

Полученное условие можно истолковать иным способом: угловые размеры источника должны быть меньше разрешаемого системой расстояния, выраженного в угловой мере (см. (63.2)). К тому же результату можно прийти с помощью общего условия (17.1), ограничивающего допустимые в интерференционных опытах размеры протяженного ис-

точника света, если принять во внимание совпадение апертуры интерференции и угла u на рис. 11.9 и в соотношении (63.1).

Каждое из условий (64.1) и (64.2), будучи взятым вне связи с другим, можно выполнить сравнительно просто. Например, четкая интерференционная картина с небольшим значением порядка m легко возникает на сравнительно больших площадях, в чем мы убедились в § 16, обсуждая разнообразные схемы интерференционных опытов. Однако одновременное выполнение обоих условий вынуждает работать со столь малыми потоками, что эксперименты по голографии с нелазерными источниками света оказались чрезвычайно трудными и сложными.

Основные физические идеи голографии были сформулированы Д. Габором в 1948 г. в связи с проблемой повышения разрешающей способности электронных микроскопов. Габор подтвердил свои теоретические соображения экспериментами в оптической области спектра. Однако в силу указанных трудностей голография развивалась очень медленно вплоть до создания оптических квантовых генераторов, излучение которых, по самому принципу их работы, исключительно монохроматично и обладает высокой степенью пространственной когерентности (см. § 228, 229). В начале шестидесятых годов Э. Лейт и Ю. Упатниекс получили первые голограммы с помощью лазерного излучения. Начиная с этого времени голография быстро прогрессировала и превратилась в разветвленную область прикладной оптики. Можно поэтому с полным основанием сказать, что успехи голографии целиком определены изобретением оптических квантовых генераторов [1]).

Длина когерентности излучения лазеров может достигать сотен метров, и по крайней мере в принципиальном отношении лазеры решают проблему источников света для голографии. Применяются лазеры разных типов, но наиболее широкое распространение получили гелий-неоновые лазеры ($\lambda = 632{,}8$ нм, см. § 227).

В предыдущих разделах основное внимание концентрировалось на физической стороне процесса голографирования, и мы сознательно не обсуждали некоторые детали, не имеющие значения с этой точки зрения, но очень важные для получения высококачественных голографических изображений. Отметим теперь ряд таких деталей.

В § 60 было показано, что при идентичности опорной и просвечивающей волн изображение вполне подобно объекту и может отличаться от него только в результате дифракционного расширения изображения каждой точки (см. § 63). Попытка получить увеличенное изображение (см. § 61) неизбежно сопряжена, как оказывается, с до-

[1]) В этой связи создатель голографии Д. Габор в 1971 г. писал: «Пути науки часто неисповедимы. Электронная микроскопия так до сих пор и не извлекла существенной пользы из восстановления волн, тогда как мои оптические опыты (которые были задуманы как модельные) положили начало голографии. Хотя многие исследователи ... достигли некоторых успехов в последующие годы, настоящее второе рождение голография пережила в 1962 г., когда Э. Лейт и Ю. Упатниекс применили лазеры...».

полнительным ухудшением качества изображения (так называемые аберрации изображения; см. гл. XIII). Это обстоятельство требует к себе особого внимания, поскольку аберрации быстро растут по мере увеличения размеров голограммы и углов падения света.

Для голографии характерна возможность появления многих дополнительных изображений. Причина их возникновения, по существу, была выяснена в § 58. Интерференционную картину можно рассматривать как наложение элементарных систем полос, обусловленных интерференцией опорной плоской волны и пространственных фурье-составляющих поля объекта (см. также § 52). Соответствующая элементарная дифракционная решетка будет периодической, но если фотографический процесс должным образом не отрегулирован, коэффициент ее пропускания не будет гармонически зависеть от координаты. При просвечивании такой решетки образуются волны не только с порядком $m = 0, \pm 1$, но и с $m = \pm 2$ и т.д. Каждому порядку дифракции соответствует свое изображение, т.е. образуется много изображений, наложение которых друг на друга обычно нежелательно и даже вредно.

Помимо упомянутых, существует много других тонкостей голографического эксперимента (как, впрочем, и во всякой иной области). В частности, существенное значение могут иметь отношение интенсивностей опорной и голографируемой волн, вибрации прибора, фазовые искажения в слое желатина и т.д. и т.п. Мы не будем углубляться в анализ такого рода факторов, играющих важную роль, но представляющих специальный интерес.

§ 65. Объемные голограммы (метод Денисюка)

Интерференционное поле, образующееся в области перекрытия опорной и предметной волн, конечно, не локализовано на поверхности фотопластинки. Как и в любом опыте с когерентными волнами, места повышенных и пониженных значений амплитуды суммарного колебания распределены во всем пространстве по тому или иному закону, зависящему от вида волновых фронтов. Поэтому в слое фоточувствительной эмульсии, всегда обладающем некоторой толщиной, образуется *трехмерная* структура почернений, а не двумерная, как приближенно предполагалось нами ранее. Вместе с тем, законы дифракции света на трехмерных структурах имеют свои особенности (см. гл. X), которые, как сейчас выяснится, находят интересные применения в голографии.

Рассмотрим сначала простейший случай голограммы плоской волны, когда опорная волна также плоская (ср. § 58). В этих условиях слои почернения фотоэмульсии, отвечающие точкам синфазного сложения световых колебаний, располагаются параллельно биссектрисе угла между волновыми векторами $\mathbf{k}_0$ и $\mathbf{k}$ опорной и предметной волн, причем расстояние между соседними слоями равно $d = \lambda/[2\sin(\theta/2)]$ см. упражнение 267). На рис. 11.13 *а* слои почернений условно обозначены сплошными линиями и изображены в сильно увеличенном масштабе.

Для просвечивающей волны такая голограмма служит периодической трехмерной структурой, и, в соответствии с законом Вульфа–

Брэгга, должна наблюдаться дифрагировавшая волна в направлении, соответствующем зеркальному отражению от слоев почернения (см. рис. 11.13 *б*). Но именно в этом направлении распространялась предметная волна. Таким образом, объемность структуры голограммы не препятствует восстановлению волнового фронта.

Опыт показывает, что при достаточно большой толщине голограммы при ее просвечивании наблюдаются только волны порядков $m = 0$ и -1 (волновые векторы $\mathbf{k}_0$ и $\mathbf{k}$), а волна первого порядка не образуется, что согласуется с изложенным выше (см. гл. X). Так обстоит дело только при условии, что толщина слоя h значительно превосходит период структуры d. В противном случае трехмерная структура оказывается эквивалентной решетке Рэлея и в ней формируется и волна первого порядка, показанная на рис. 11.13 *б* штриховой стрелкой.

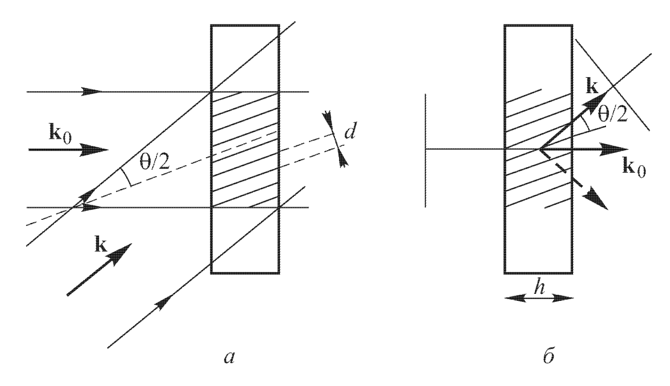


Рис. 11.13. Объемная голограмма плоской волны

Пусть, например, вектор $\mathbf{k}_0$ перпендикулярен к плоскости голограммы. При этом условии, как вытекает из вычислений, волны первого порядка, зарождающиеся в последовательных слоях фотоэмульсии, взаимно гасят друг друга, если выполняется неравенство (см. упражнение 268)

$$h > \frac{\lambda}{[2\sin(\theta/2)]^2}\,. \tag{65.1}$$

Если $\lambda = 0{,}63$ мкм, $\theta = 10°$, то $\lambda/[2\sin(\theta/2)]^2 = 21$ мкм, что превышает толщины обычно применяемых фотоматериалов (6–15 мкм) и неравенство (65.1) не выполняется. Поэтому в расположениях, характеризующихся сравнительно небольшими углами между опорной и предметной волнами, объемность голограммы оказывается несущественной и наблюдается как главное, так и дополнительное изображение (§ 58–64).

Обратная картина имеет место при интерференции встречных или почти встречных волн ($\theta \approx 180°$), когда $\lambda/[2\sin(\theta/2)]^2 \approx \lambda/4$ и условие (65.1) выполняется с большим запасом. В таких расположениях дифрагировавшая волна соответствует брэгговскому отражению и следует ожидать образования только одного голографического изображения.

На рис. 11.14 *а* показана схема голографического опыта такого рода. Объект S освещается лазерным излучением через фотопластинку, и отраженные волны распространяются назад к слою специальной фотоэмульсии *ФЭ*, практически прозрачной до проявления. Буквой C обозначено стекло фотопластинки. Лазерная волна играет также

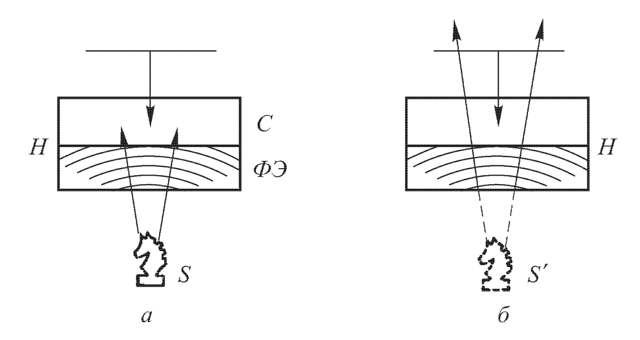


Рис. 11.14. Схема получения объемных голограмм с помощью встречных пучков

роль опорной, образуя вместе с предметной волной интерференционное поле, передающее все особенности волнового фронта, идущего от объекта, и имеющее поэтому весьма сложную структуру. Как показывает опыт, при просвечивании полученной таким способом голограммы восстанавливается только мнимое (главное) изображение объекта (см. рис. 11.14 *б*), что и должно быть согласно приведенным выше соображениям.

Описанный метод голографии, в котором используется брэгговское отражение просвечивающей волны от трехмерной структуры голограммы, был предложен и осуществлен Ю.Н. Денисюком (1962 г.) и носит его имя.

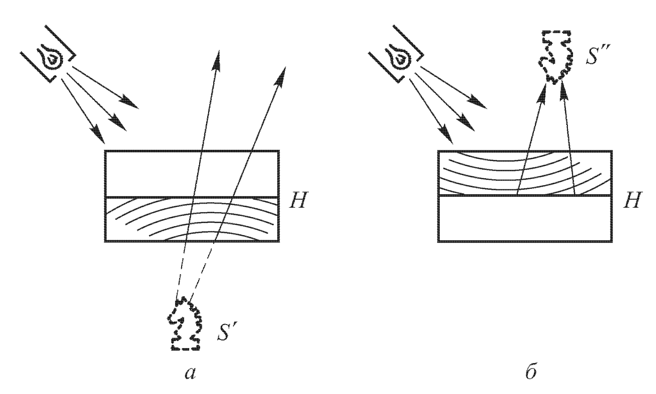


Рис. 11.15. Восстановление главного (*а*) и дополнительного (*б*) изображений при просвечивании объемной голограммы некогерентным светом

Замечательная особенность метода Денисюка заключается в том, что в качестве просвечивающего излучения можно использовать расходящийся пучок белого света и, тем не менее, изображение предмета восстанавливается (рис. 11.15 *а*). Это обусловлено особенностями дифракции света на трехмерной структуре: эффективное отражение света происходит лишь для тех длин волн и для тех направлений его распространения, которые связаны соотношением Вульфа–Брэгга. Вся остальная часть излучения проходит голограмму и не принимает участия в образовании изображения.

Если осветить голограмму с обратной стороны (рис. 11.15 *б*), то главное изображение отсутствует, но образуется дополнительное. Как и в расположениях, рассмотренных в § 59–64, дополнительное изображение, получаемое методом Денисюка, является зеркальным по отношению к объекту.

§ 66. Цветные голографические изображения

Описанный выше способ объемной голографии позволяет осуществить цветные изображения с вполне удовлетворительным качеством цветопередачи. Для уяснения принципа цветной голографии следует иметь в виду, что цветное зрение связано с существованием в сетчатке глаза трех типов приемников света, реагирующих на красное, зеленое и синее излучение (см. § 193). Можно сказать, что изображение предмета на сетчатке глаза представляет собой как бы три совмещенные изображения, рассматриваемые в трех указанных интервалах длин волн. Подобный принцип совмещения изображений применяется и в цветной репродукции, где в зависимости от требуемого качества цветопередачи совмещают от трех до 10–15 изображений в различных красках.

Аналогичные соображения лежат в основе цветной голографии. Для осуществления цветного изображения по методу Денисюка можно зарегистрировать голограмму, используя освещение объекта (одновременно или последовательно) излучением, имеющим в своем спектре три линии (красную, зеленую и синюю). Тогда в толще фотоэмульсии образуются три системы стоячих волн и соответственно три системы пространственных структур. При восстановлении изображения с помощью белого света каждая из указанных систем будет формировать свое изображение объекта в свете соответствующего спектрального участка, примененного во время экспонирования. Поскольку положение изображения не зависит, согласно изложенному в предыдущем параграфе, от длины волны, мы получаем три совмещенные изображения в трех участках спектра, а этого уже достаточно для восстановления цветного изображения.

Объемная дифракционная решетка, образованная несколькими десятками слоев почернений, обладает сравнительно небольшой спектральной разрешающей силой. Поэтому каждое из составных изображений отнюдь не столь «монохроматично», как лазерное излучение, примененное на первом этапе голографирования. Это обстоятельство до известной степени способствует «мягкости» цветопередачи.

Одна из трудностей цветной голографии связана с изменением толщины фотоэмульсии, происходящим при ее фотообработке (проявление, фиксирование, промывка и сушка). Практика показывает, что обработка приводит к «усадке» фотоэмульсии, вследствие чего уменьшается и период трехмерной структуры. В результате условие Вульфа–Брэгга выполняется для более коротковолнового излучения, чем опорное. Этим объясняется некоторое искажение окраски цветных голографических изображений.

§ 67. Применение голографии. Голографическая интерферометрия

Заканчивая изложение физических принципов голографии, сформулируем еще раз соображения, лежащие в основе этого способа регистрации информации об объекте наблюдения, переносимой электромагнитным полем. Нас интересует информация, заключающаяся в распределении амплитуд и фаз в этом поле. Фотографирование распределения интенсивности в специально созданной интерференционной картине, возникшей при суперпозиции волнового поля объекта и когерентной ему опорной волны, дает возможность регистрации полной информации, переносимой изучаемым волновым полем. Последующая дифракция света на распределении почернений в фотослое голограммы восстанавливает волновое поле объекта и допускает изучение этого поля в отсутствие объекта наблюдения. Рассмотрим теперь некоторые практические применения голографии.

Число независимых сведений о предмете, фиксируемых на голограмме, можно грубо оценить с помощью следующих соображений. Независимым элементом объекта, его «элементарной ячейкой» следует признать площадку с размерами, равными разрешаемому интервалу $l_{\min}$. В самом деле, если свойства тела изменяются на протяжении указанной площадки, голограмма не сможет передать изменения и зарегистрирует лишь некоторое среднее значение параметров, описывающих такие свойства. Наоборот, для расстояний, превышающих разрешаемый интервал, мы имеем возможность установить то или иное различие свойств объекта. Сказанное можно рассматривать, по существу, как общее определение понятия разрешения, а условия разрешения, выведенные в § 63, как количественную меру разрешающей способности.

Обозначим через Ω телесный угол, который стягивает предмет из плоскости голограммы. Телесный угол, соответствующий независимому элементу предмета, равен, очевидно, $l_{\min}^2/r_s^2$. Поэтому число независимых элементов, содержащихся в телесном угле Ω, дается выражением $N = \Omega r_s^2/l_{\min}^2$. С другой стороны, значение $l_{\min}$ связано с размерами голограммы D соотношением (63.1), и с его помощью находим $N = \Omega D^2/\lambda^2$. В дальнейших оценках будем полагать $\Omega = 1$, что отвечает угловым размерам объекта около 60°. В этом случае

$$N = \frac{D^2}{\lambda^2}\,. \tag{67.1}$$

Таким образом, число независимых сведений о предмете, регистрируемых на голограмме, обратно пропорционально квадрату длины волны и пропорционально площади голограммы (D^2). Следовательно, можно сказать, что на 1 см^2 голограммы регистрируется

$$N_1 = \frac{1}{\lambda^2} \tag{67.2}$$

независимых сведений о предмете.

К выражениям (67.1) и (67.2) для N и N_1 можно прийти с помощью несколько иных соображений. Можно считать, например, что N равно квадрату отношения линейных размеров голограммы к минимальному периоду интерференционной картины, $N = (D/d)^2$. Поскольку $d^2 = (\lambda/2\varphi)^2 = \lambda^2/\Omega$ (2φ — угловые размеры предмета), мы вновь получаем (67.1).

Пусть $\lambda = 0{,}63 \cdot 10^{-4}$ см (гелий-неоновый лазер); в этом случае на 1 см^2 поверхности голограммы может содержаться $N = 2{,}5 \cdot 10^8$ независимых сведений, а на сравнительно небольшой голограмме 5×8 см^2 примерно $N = 10^{10}$ сведений.

Разумеется, не все сведения из этого фантастического числа имеют одинаковую ценность и отнюдь не всегда возникает необходимость в таких значениях числа N. Если, например, нужно зафиксировать положение тридцати двух фигур на шахматной доске, то с десятикратным запасом достаточна площадь голограммы $32 \cdot 10 \cdot l_{\min}^2$. Шахматная партия в 40 ходов требует для своей регистрации $10 \cdot 32 \cdot 40 \cdot 2l_{\min}^2 = 2{,}56 \cdot 10^4/2{,}5 \cdot 10^8 = 10^{-4}$ см^2. Если же мы хотим получить детальные сведения о вырезанных шахматных фигурах [1]), то необходимый объем сведений сильно возрастает. В этом случае площадь голограммы, требуемая при одностороннем наблюдении, приблизительно равна площади проекции фигур на плоскость, перпендикулярную к направлению наблюдения, т.е. составляет около сотни см^2, а при круговом осмотре и того больше.

Большое число независимых сведений, регистрируемых голограммой, находит свое внешнее проявление в чрезвычайной сложности ее структуры, производящей впечатление хаотического, совершенно случайного набора пятнышек почернения всевозможной формы и ориентации, как это видно на рис. 11.7 *б*. Однако суждение о случайности структуры голограммы, разумеется, субъективно, и обусловлено неспособностью аппарата зрения извлечь из голограммы сосредоточенных в ней вполне регулярных и закономерных сведений о предмете сложной формы. В противоположность этому, в кольцевой структуре голограммы сферической волны глаз с первого взгляда улавливает общую закономерность, и такая голограмма представляется регулярной. Если, однако, речь идет не о констатации сферичности волны в первом приближении, но о точном измерении ее радиуса кривизны или об изучении малых отступлений фронта волны от сферической

[1]) Такое впечатление нельзя составить по рисункам 11.6 и 11.8 именно вследствие недостаточной разрешающей способности репродукции.

формы, то и здесь ситуация может приобрести сложный характер и потребовать для своего описания большого числа сведений и соответственно большой площади голограммы.

В примере сферической волны сведения об источнике, зарегистрированные голограммой, можно извлечь непосредственной обработкой самой голограммы, т.е. с помощью измерения радиусов колец (см. § 59). В более сложных случаях, например, голограммы шахматных фигур, попытка такого рода обработки обречена на неудачу. С этой точки зрения восстановление изображения можно рассматривать как *автоматическое преобразование сведений* из одной формы в другую, более удобную для восприятия и для формулировки того или иного заключения на основе усвоенных сведений. В то же время, именно такое преобразование и составляет содержание многочисленных методов оптической обработки информации.

Следует подчеркнуть, что указанное преобразование зарегистрированных сведений осуществляется чрезвычайно быстро. Минимальное время, необходимое для восстановления изображения, можно оценить с помощью следующих рассуждений. Пусть просвечивающая волна представляет собой световой импульс с длительностью τ. Импульс ограниченной длительности можно рассматривать как набор монохроматических волн, причем спектральная ширина импульса $\delta\nu$, согласно изложенному в § 21, связана с τ универсальным соотношением $\delta\nu\,\tau = 1$. Голограмма, будучи, по существу, дифракционной решеткой, произведет спектральное разложение импульса, и изображение каждой точки предмета будет соответствующим образом расширено. Для того чтобы такое уширение практически не было заметным, спектральная ширина импульса должна быть меньше интервала частот, разрешаемого голограммой-решеткой (см. § 50). На основе высказанных соображений легко показать, что длительность импульса должна удовлетворять условию:

$$\tau > \frac{D}{c}\,(\sin\varphi_0 - \sin\varphi), \tag{67.3}$$

где D — размер голограммы, φ_0 и φ — углы падения опорной и предметной волн на голограмму. Полученное условие можно интерпретировать по-иному: длина импульса $c\tau$ должна быть больше разности хода $D(\sin\varphi_0 - \sin\varphi)$ между волнами, идущими от крайних штрихов решетки; в противном случае указанные волны не могут интерферировать в точке изображения, будет работать не вся голограмма и изображение окажется уширенным.

Полагая $D = 9$ см, $\sin\varphi_0 - \sin\varphi = 1/3$ в (67.3), находим чрезвычайно малое значение необходимой длительности импульса $\tau \approx$ $\approx 10^{-10}$ с. При снижении требований к качеству изображения минимальную длительность импульса можно еще более уменьшить.

Конечно, не всегда быстрота процесса восстановления голографического изображения гарантирует малое время работы системы, включающей в себя и регистрацию восстановленного изображения. Время инерции глаза, например, составляет приблизительно 0,1 с, и при визуальной регистрации изображения инерционность системы в целом определяется глазом. Однако существуют приемники света с

временем инерции 10^{-8} с и еще меньше (например фотоумножители, см. § 181) и, следовательно, быстродействие голографии может быть реализовано.

Таким образом, с прикладной точки зрения голография характеризуется способностью к регистрации (записи), хранению и к чрезвычайно быстрому преобразованию огромного массива данных. Именно эти стороны голографии, заложенные в ее физических принципах, обусловили широкую область ее применений для решения самых различных технических и научных задач.

Рассмотрим один из методов прикладной голографии, именуемый *голографической интерферометрией* и нашедший очень широкое распространение. Сущность этого метода в простейшем варианте заключается в следующем. На одну фотопластинку последовательно регистрируются две интерференционные картины, соответствующие двум разным, но мало отличающимся состояниям объекта, например, в процессе деформации. При просвечивании такой «двойной» голограммы образуются, очевидно, два изображения объекта, измененные относительно друг друга в той же мере, как и объект в двух его состояниях. Восстановленные волны, формирующие эти два изображения, когерентны, интерферируют, и на поверхности изображения наблюдаются полосы, которые и характеризуют изменение состояния объекта.

В другом варианте голограмма изготавливается для какого-то определенного состояния объекта; при ее просвечивании объект не удаляется и производится его освещение, как на первом этапе голографирования. Тогда опять получаем две волны, одна формирует голографическое изображение, а другая распространяется от самого объекта. Если теперь происходят какие-либо изменения в состоянии объекта (в сравнении с тем, что было во время экспонирования голограммы), то между указанными волнами возникает разность хода и изображение покрывается интерференционными полосами.

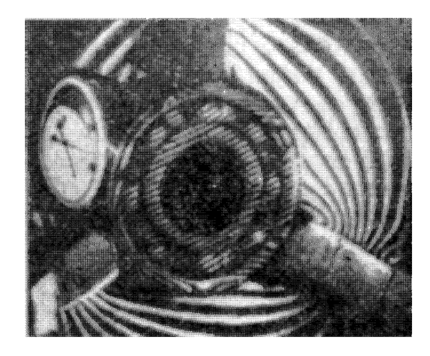


Рис. 11.16. Деформации объекта, зарегистрированные методом голографической интерферометрии

Описанный способ применяется для исследования деформаций предметов, их вибраций, поступательного движения и вращений, неоднородности прозрачных объектов и т.п. На рис. 11.16 приведена фотография изображения шарикового подшипника, сжатого в патроне токарного станка. Интерференционная картина наглядно свидетельствует о различии деформаций при двух значениях силы сжатия, о чем говорят два положения стрелки тензометра (левая часть рисунка), зарегистрированные во время двух последовательных экспозиций.

Замечательной особенностью голографической интерферометрии является отсутствие жестких требований к обработке отражающих

поверхностей или оптической однородности исследуемых объектов. В самом деле, в результате деформаций, вибраций и других изменений состояния объекта возникают разности хода, изменяющиеся вдоль поверхности тела. Поэтому картина полос аналогична картине, наблюдаемой в случае интерференции в тонкой пленке (см. гл. VI), роль которой (с известными оговорками) выполняет пространство между *средними* поверхностями тела в двух его последовательных состояниях. Другими словами, фронты интерферирующих волн могут иметь очень сложную форму, но часто интерференционная картина относительно груба и легко наблюдаема. Применяя голографическую терминологию, можно сказать, что одна из волн служит опорной для другой, причем в каждом конкретном случае опорная волна вполне подобна голографируемой. В противоположность этому, в интерференционных приборах (интерферометры Жамена, Майкельсона и др., см. гл. VII) волной сравнения, т.е. опорной волной, служит вполне определенная, стандартная волна, плоская или сферическая, и исследуемые волны должны обладать столь же простым волновым фронтом. В противном случае интерференция дает мелкомасштабную картину типа показанной на рис. 11.7 *б* что, конечно, менее удобно. Следовательно, и отражающие тела должны иметь поверхности высокого оптического качества. Голографическая интерферометрия свободна от этого жесткого ограничения.

Благодаря указанной особенности можно осуществлять голографическую интерференцию при отражении света от шероховатых поверхностей рассеивающих тел (например, автомобильных шин, балок, корродирующих поверхностей и т.п.), для объектов, заключенных в сосуд с очень неоднородными стенками и т.д. Поэтому голографическая интерферометрия и получила обширные применения.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

Глава XII

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ (ЛУЧЕВОЙ) ОПТИКИ

§ 68. Введение

Явления интерференции и дифракции света показывают, что распространение света представляет собой волновой процесс. С помощью волновой теории мы можем решать задачи о распространении света как в однородной среде, так и через любую оптическую систему, т.е. через совокупность различных сред, ограниченных теми или иными поверхностями и диафрагмами. Однако в очень многих областях, имеющих важное практическое значение, в частности, в вопросе о формировании светового пучка (светотехника) и в вопросах об образовании изображения (оптотехника), решение можно получить гораздо более простым путем, с помощью представлений *геометрической оптики.*

Геометрическая оптика оперирует понятием отдельных световых лучей, подчиняющихся известным законам преломления и отражения и независимых друг от друга (см. «Введение», § 1).

Понятие светового луча можно получить из рассмотрения реального светового пучка в однородной среде, из которого при помощи одной или последовательности диафрагм с отверстиями выделяется узкий параллельный пучок. Чем меньше диаметр этих отверстий, тем у́же выделяемый пучок, и в пределе, переходя к отверстиям сколь угодно малым, можно казалось бы получить световой луч как прямую линию. Мы знаем, однако, что подобный процесс выделения сколь угодно узкого пучка (луча) невозможен вследствие явления дифракции. Неизбежное угловое расширение реального светового пучка, пропущенного через диафрагму диаметра D, определяется углом дифракции $\varphi \sim \lambda/D$ (направление на 1-й минимум, см. § 39). Только в предельном случае, когда $\lambda = 0$, подобное расширение не имело бы места, и можно было бы говорить о луче как о геометрической линии, направление которой определяет направление распространения световой энергии. Таким образом, световой луч есть абстрактное математическое понятие, а не физический образ, и геометрическая оптика есть лишь предельный случай реальной волновой оптики, соответствующий исчезающе малой длине световой волны.

Соотношение $\varphi \approx \lambda/D$ показывает, что угловое отклонение, нарушающее прямолинейность распространения света в однородной среде, может быть весьма мало, если размеры отверстия или экрана велики по сравнению с длиной волны λ. Поэтому в реальной оптике, где λ —

конечная величина, отступления от законов геометрической оптики должны быть тем меньше, чем больше размеры D.

Размеры объектов очень важны и в вопросе образования резких теней, существование которых является одним из основных аргументов в пользу лучевых представлений оптики (см. § 1). Как ясно из § 37, при относительно небольших расстояниях от объекта до точки наблюдения (дифракция Френеля) ширина области вблизи геометрической тени, где наблюдаются дифракционные полосы, примерно равна радиусу первой зоны Френеля; в случае плоской волны (бесконечно удаленный источник) радиус этой зоны $r = \sqrt{f\lambda}$ (f — расстояние от объекта, вызвавшего дифракцию света, до точки наблюдения). За меру резкости тени естественно принять отношение линейного размера объекта x к радиусу зоны, т.е. x/r. Лишь при $x/r \approx 1$ область полутени будет относительно очень широкой, и подобие объекта и тени нарушится. Из этого соотношения следует, что отсутствие тени будет лишь при расстояниях $f > x^2/\lambda$. Уже при $x = 1$ см, $\lambda = 500$ нм имеем $f = 200$ м.

Приведенный выше рис. 8.18 показывает, как выглядела бы тень от руки, держащей тарелку, при освещении параллельным пучком лучей. При относительно малом расстоянии (см. рис. 8.18 *а*) тень вполне резка и подобна объекту, при большем же расстоянии ($f = 11$ км, см. рис. 8.18 *б*) о геометрическом подобии тени и объекта не может быть и речи. Однако в обычных условиях наблюдения подобные искажения не дают себя знать, и применение законов геометрической оптики приводит к построениям, которые, как показывает опыт, вполне удовлетворительно решают вопрос о распространении света и образовании изображения.

Таким образом, для обширного круга важных задач светотехники и оптотехники мы имеем возможность пользоваться геометрической оптикой лучей. Однако при пользовании законами лучевой оптики нельзя забывать, что они — лишь первое приближение к действительности и что без дифракционных явлений не обходится ни один случай распространения света. Необходимо, следовательно, понимать волновой (дифракционный) смысл этих лучевых (геометрических) построений. Отсюда ясно, что законы лучевой оптики имеют ограниченное применение, и надо уметь ориентироваться, при каких условиях применение этих законов допустимо и будет практически находиться в соответствии с опытом. Оказывается, однако, что даже в практической оптике наиболее тонкие вопросы (например, вопрос о разрешающей силе оптических инструментов) решаются при помощи теории дифракции.

§ 69. Принцип Ферма

В том предельном случае, когда справедлив переход к геометрической оптике, т.е. в случае исчезающе малой длины волны, распространение волнового фронта может быть найдено простым построением. Пусть поверхность F (рис. 12.1) изображает поверхность равной фазы (волновой фронт) к некоторому моменту t. В каждой точке M этой

поверхности построим сферу с радиусом $dn = v\tau$, где v есть скорость распространения волны в данном месте, а τ — бесконечно малый промежуток времени. Поверхность F', огибающая эти маленькие сферы, есть также поверхность равной фазы, ибо все точки ее будут иметь к моменту $(t+\tau)$ те же фазы, что и точки поверхности F к моменту t. Отрезки прямых dn, соединяющие точки M с точкой касания соответствующей сферы и огибающей, представляют собой элементы луча, перпендикулярные к поверхности фронта [1]).

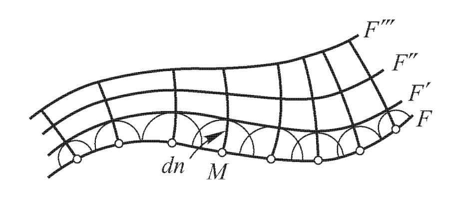


Рис. 12.1. К принципу Ферма: последовательное построение волнового фронта

Продолжая это построение, мы можем шаг за шагом определить поверхности равной фазы и в то же время найти направление лучей, представляющих собой кривые, в которые переходят ломаные, составленные из отрезков dn, если τ выбрано бесконечно малым.

С помощью указанного построения можно доказать следующее важное положение: *действительный путь распространения света (луч) есть путь, для прохождения которого свету требуется минимальное время по сравнению с любым другим мыслимым путем между теми же точками*. Действительно, выполнив построение, описанное выше (рис. 12.2), мы увидим, что от точки A до точки B *вдоль луча* свет проходит за время $\tau = \tau_1 + \tau_2 + \ldots$ $\ldots + \tau_n$, где $\tau_i = dn_i/v_i$, т.е.

$$\tau = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{dn_i}{v_i} = \int_A^B \frac{dn}{v}.$$

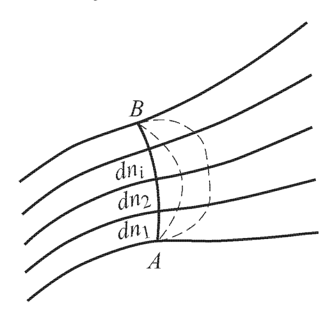


Рис. 12.2. К принципу Ферма: действительный путь света AB соответствует минимальному времени распространения

Всякий же другой мыслимый путь будет состоять из отрезков, для прохождения которых потребуется время τ_i, если этот отрезок совпадает с нормалью к фронту, или время, *большее* τ_i, если отрезок отличается от нормали. Таким образом, действительный путь распространения света (луч) соответствует минимальному времени распространения.

Эта теорема, доказанная нами для волновой теории в том приближении, когда справедлива геометрическая оптика ($\lambda \to 0$), представляет в геометрической оптике *аксиому*, именуемую принципом *кратчайшего оптического пути* (или минимального времени распространения). Она была сформулирована Ферма как общий закон распространения света (принцип Ферма, около 1660 г.). Действительно,

[1]) Мы ограничиваемся для простоты рассуждений случаем изотропной среды, когда луч и нормаль к фронту совпадают (см. § 142).

нетрудно видеть, что для однородной среды этот принцип приводит к закону прямолинейного распространения согласно геометрической аксиоме о том, что прямая есть кратчайшее расстояние между двумя точками; для случая же перехода через границу различных сред этот принцип дает законы отражения и преломления света.

Пусть свет, исходя из точки P, приходит в точку Q, преломляясь на плоской границе раздела двух сред (рис. 12.3). Проведем через P и Q плоскость нормально к границе раздела (плоскость падения). *Любой* путь PO_1Q, лежащий вне плоскости падения, проходится светом за большее время, чем путь POQ, проведенный в плоскости падения так, чтобы O явилось следом перпендикуляра, опущенного из O_1 на плоскость падения. Действительно, как в первой, так и во второй среде длины путей, проходящих через O_1, соответственно больше, чем через O ($PO_1 > PO$ и $QO_1 > QO$).

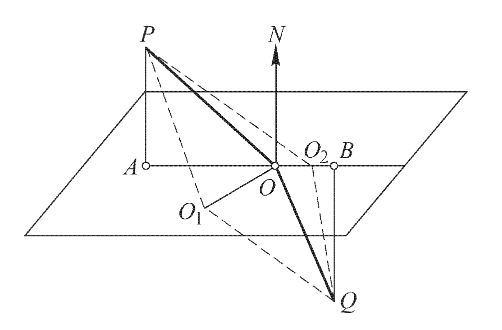


Рис. 12.3. Вывод закона преломления из принципа Ферма

Итак, в согласии с принципом Ферма путь, требующий минимального времени, должен лежать в плоскости падения (первый закон преломления). Для того чтобы из всех путей от P до Q, лежащих в плоскости падения, выбрать путь, требующий минимального времени, исследуем, как меняется это время в зависимости от положения точки O на линии пересечения плоскости падения и плоскости раздела.

Положение точки O определено длиной отрезка $AO = x$, где A — след перпендикуляра, опущенного из P на плоскость раздела. Время распространения света по пути POQ есть

$$t = \frac{PO}{v_1} + \frac{OQ}{v_2},$$

где v_1 и v_2 — скорости света в первой и во второй средах. Обозначив $PA = h_1$, $QB = h_2$ и $AB = p$, найдем, что

$$t = \frac{\sqrt{h_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{h_2^2 + (p-x)^2}}{v_2}.$$

Условие, определяющее, при каком значении x это время будет минимально, есть равенство нулю $\frac{dt}{dx}$. Из него следует:

$$\frac{1}{v_1}\,\frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{1}{v^2}\,\frac{p-x}{\sqrt{h_2^2 + (p-x)^2}} = 0,$$

т.е.

$$\frac{\sin i}{v_1} - \frac{\sin r}{v_2} = 0,$$

или

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2} = \mathrm{const}\left(= \frac{n_2}{n_1}\right).$$

Таким образом, из принципа Ферма вытекает закон преломления световых лучей. Аналогично можно рассмотреть задачу об отражении (см. упражнение 34).

Интересно отметить, что принцип Ферма приводит к утверждению, что в среде с бо́льшим показателем преломления ($n_2 > n_1$) скорость света меньше ($v_2 < v_1$), т.е. находится в согласии с представлениями Гюйгенса и противоречит теории Ньютона. Обоснования принципа Ферма не были, однако, достаточно безупречными для того, чтобы, опираясь на него, можно было делать выбор между теориями света.

Для того чтобы принцип Ферма выражал действительное положение дела, ему надо дать более общую формулировку, чем это было сделано самим Ферма; именно, условие $\dfrac{dt}{dx} = 0$, выделяющее действительный путь, есть условие экстремума, т.е. может быть не только условием минимума, но и условием максимума или стационарности, т.е. действительный путь может быть минимальным, максимальным или равным всем остальным возможным путям, проведенным от P к Q через границу раздела двух сред. Примером минимального пути являются разобранные выше случаи прохождения лучей через плоскую границу. Примером стационарного значения времени служит случай отражения лучей от внутренней поверхности эллипсоида вращения, в одном из фокусов которого расположена светящаяся точка P (рис. 12.4). Изображение Q получается в другом фокусе, причем согласно свойству эллипсоида сумма $(PO + OQ)$ есть постоянная для всех положений O. Отражение от поверхности меньшей кривизны (MM), например от плоскости, касательной к эллипсоиду, соответствует минимуму, а отражение от поверхности большей кривизны (NN) — максимуму длины пути (или времени) (ср. упражнение 35).

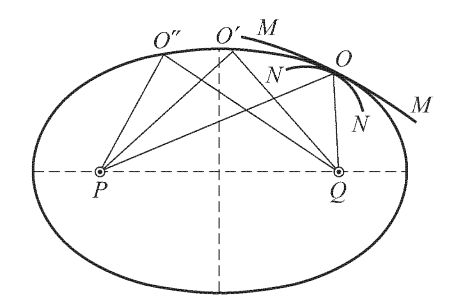


Рис. 12.4. К принципу Ферма: действительный путь света соответствует стационарному времени распространения

§ 70. Основные определения. Закон преломления и отражения. Принцип взаимности

Пользуясь представлениями лучевой оптики, мы рассматриваем каждую светящуюся точку источника как вершину расходящегося пучка лучей, именуемого *гомоцентрическим*, т.е. имеющим общий центр. Если после отражения и преломления этот пучок превращается в пучок, сходящийся также в одну точку, то и последний представляет собой гомоцентрический пучок и центр его является *изображением* светящейся точки. При сохранении гомоцентричности каждая точка

источника дает одну точку изображения. Такие изображения называются точечными или *стигматическими* (рис. 12.5). В силу обратимости (взаимности) световых лучей (см. ниже) изображение можно рассматривать как источник, а источник — как изображение. Поэтому при стигматическом изображении центры наших пучков называются *сопряженными* точками той оптической системы, в которой происходит преобразование расходящегося гомоцентрического пучка в сходящийся. Соответственные лучи и пучки также называются *сопряженными*. Поверхность, нормальная к лучам, называется *волновой поверхностью* (см. § 6). В указанном смысле волновая поверхность имеет чисто геометрический смысл и не имеет того глубокого содержания, которое мы вкладывали в нее раньше. Волновая поверхность гомоцентрического пучка в однородной и изотропной среде есть, очевидно, сферическая поверхность.

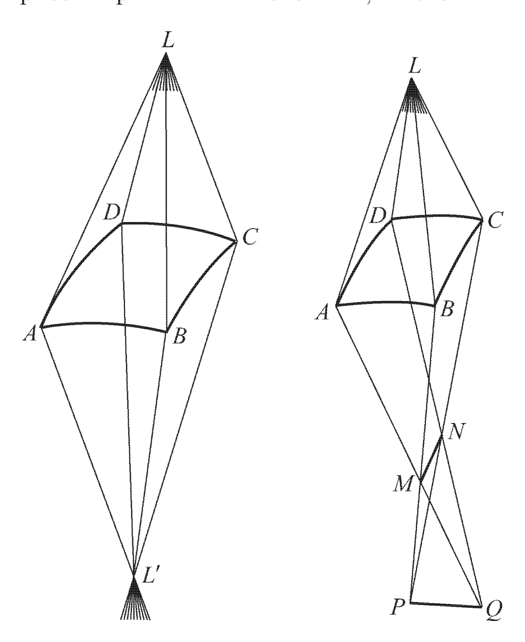


Рис. 12.5. Стигматическое изображение точки L. При прохождении через оптическую систему гомоцентричность пучка сохраняется

Рис. 12.6. Астигматическое изображение точки L. При прохождении через оптическую систему гомоцентричность пучка нарушается

Если в результате отражения и преломления пучок перестает быть гомоцентрическим, то волновая поверхность перестает быть сферой. Стигматичность изображения теряется, и точка уже не изображается точкой (рис. 12.6). Так как в практической оптике обычно ставится задача получения изображений, точно передающих форму источника, то важнейшим вопросом лучевой оптики является выяснение условий сохранения гомоцентричности пучков.

В основе всех построений лучевой оптики лежат законы преломления и отражения света. Мы рассмотрели во Введении их содержание и показали, какой смысл вкладывает в них волновая теория. Здесь мы воспроизведем лишь математическую формулировку этих законов, придав ей такое выражение, которое позволяет рассматривать вопросы преломления и отражения совместно, так что из формул, касающихся преломляющих систем (линз), могут быть сразу получены заключения и для отражающих систем (зеркал).

Однако предварительно покажем, что при явлениях преломления и отражения соблюдается закон *взаимности*, или *обратимости* световых лучей.

Пусть среда *1* отделена от вакуума тонкой плоскопараллельной пластинкой среды *2* (рис. 12.7); n_1, n_2 и N_{21} — абсолютные и относительный показатели преломления соответствующих сред. Из рис. 12.7 ясно, что

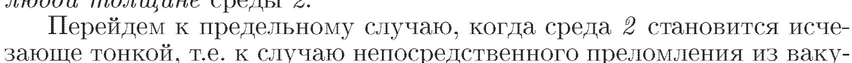
$$\frac{\sin i}{\sin \alpha} = n_2, \quad \frac{\sin \alpha}{\sin r} = N_{21}.$$

Отсюда

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n_2 N_{21}.$$

Последняя формула справедлива при *любой толщине* среды *2*.

Рис. 12.7. К выводу закона взаимности при преломлении



Перейдем к предельному случаю, когда среда *2* становится исчезающе тонкой, т.е. к случаю непосредственного преломления из вакуума в среду *1*. Тогда имеем $\sin i / \sin r = n_1$. Сопоставляя эти две формулы, найдем $N_{21} = n_1/n_2$. Повторяя те же рассуждения для случая, когда тонкий слой среды *1* отделяет среду *2* от вакуума, найдем $N_{12} = n_2/n_1$ или $N_{12} = 1/N_{21}$, т.е. *показатель преломления первой среды относительно второй* (N_{12}) *равен обратному значению показателя преломления второй среды относительно первой* (N_{21}).

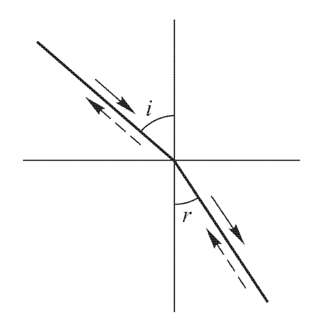


Рис. 12.8. Ход лучей при отражении света

Отсюда непосредственно следует, что при преломлении на границе двух сред лучи остаются *взаимными*, т.е. при изменении направления лучей на обратное их взаимное расположение не меняется (рис. 12.8). В законе отражения этот принцип обратимости светового пути также действителен, как легко видеть из рис. 12.9 без дальнейших объяснений. Принцип взаимности сохраняет, конечно, свою силу при каком угодно числе преломлений и отражений, поскольку он соблюдается при каждом из них. Таким образом, принцип взаимности справедлив для всех задач, связанных с построением изображений.

Закон преломления при переходе из первой среды во вторую (см. рис. 12.8) гласит:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = N_{12} = \frac{n_2}{n_1} \tag{70.1}$$

или

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r.$$

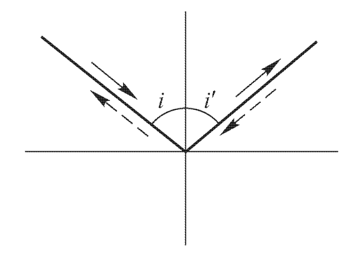


Рис. 12.9. Ход лучей при отражении света

Закон отражения (см. рис. 12.9) выражается соотношением [1])

$$i = -i'. \tag{70.2}$$

Его можно получить из предыдущей формулы, положив $n_1 = -n_2$, откуда

$$\sin i = -\sin r, \quad i = -r.$$

Итак, закон отражения получается из закона преломления, если положить $n_2 = -n_1$ и под r подразумевать угол отражения. Таким образом, любую формулу, выведенную для преломляющих систем, можно использовать для описания явлений в отражающих системах.

§ 71. Преломление (и отражение) на сферической поверхности

Предположим, что две среды с показателями преломления n и n_2 разделяются сферической поверхностью Σ (рис. 12.10). На линии LL', проходящей через центр сферы O, поместим точечный источник света L. Рассмотрим узкий гомоцентрический конус лучей, падающий из L на поверхность раздела двух сред.

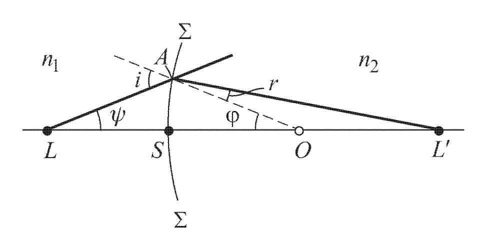


Рис. 12.10. Преломление параксиальных лучей на сферической границе двух сред

Мы предполагаем пучок настолько узким, т.е. угол ψ настолько малым, что практически можно считать отрезок LS равным LA, $L'S$ равным $L'A$ и т.д. Такой узкий пучок будем называть *параксиальным* [2]). Итак, условие параксиальности пучка есть

$$LS \approx LA \quad \text{и} \quad L'S \approx L'A.$$

Возьмем какой-либо луч из этого пучка, например LA, падающий на Σ под углом i, построим сопряженный ему преломленный луч AL' (угол преломления r) и найдем положение точки, в которой преломленный луч пересечет ось системы.

Из треугольника ALO имеем

$$\frac{LO}{LA} = \frac{\sin i}{\sin\varphi},$$

из треугольника OAL'

$$\frac{AL'}{OL'} = \frac{\sin\varphi}{\sin r}.$$

[1]) Знак минус означает, что углы i' и i отсчитываются в разные стороны от нормали к поверхности.

[2]) Линия LL' называется обычно осью данной системы. Отсюда название — параксиальный (приосевой).

Отсюда

$$\frac{LO}{LA}\,\frac{AL'}{OL'} = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}\,. \tag{71.1}$$

В дальнейшем все отрезки вдоль оси будем отсчитывать от точки S, считая положительными отрезки, откладываемые от S *вправо* (в направлении распространяющегося света), и отрицательными — отрезки, откладываемые *влево*. Таким образом, $AL \approx SL = -a_1$, $AL' \approx \approx SL' = a_2$, $AO = SO = R$ (радиус нашей сферы). В таком случае $LO = -a_1 + R$, $OL' = a_2 - R$. Из формулы (70.1) получим

$$\frac{-a_1 + R}{-a_1}\,\frac{a_2}{a_2 - R} = \frac{n_2}{n_1}\,,$$

т.е.

$$n_1\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{R}\right) = n_2\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{R}\right) = Q. \tag{71.2}$$

Последняя формула показывает, что произведение $n\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{R}\right)$ при преломлении сохраняет свою величину Q. Его называют *нулевым инвариантом Аббе*. Для многих целей этой формуле удобно придать вид

$$\frac{n_1}{a_1} - \frac{n_2}{a_2} = \frac{n_1 - n_2}{R}\,. \tag{71.3}$$

Соотношение (71.3) позволяет найти длину $a_2 = SL'$, если задано $a_1 = LS$, т.е. позволяет отыскать положение точки L' по заданному L. При выводе его мы, кроме закона преломления, пользовались еще допущением, что луч LA принадлежит к параксиальному пучку. Следовательно, соотношение справедливо для *любого луча параксиального* пучка. Из формулы (71.3) видно, что a_2 при заданных параметрах задачи (n_1, n_2, R) зависит только от a_1. Таким образом, все лучи параксиального гомоцентрического пучка, выходящего из L, пересекают ось в одной и той же точке L', которая является, следовательно, стигматическим изображением источника L. Итак, гомоцентрический пучок при преломлении на сферической поверхности остается гомоцентрическим, если он удовлетворяет условию параксиальности. Основное уравнение (71.3) охватывает все случаи преломления лучей на сферической поверхности. Пользуясь установленным выше правилом знаков, мы можем разобрать случай выпуклой ($R > 0$) или вогнутой ($R < 0$) поверхности.

Точно так же в зависимости от того, будут ли a_1 и a_2 иметь разные знаки или одинаковые, мы будем иметь случаи, когда изображение располагается с противоположной по сравнению с источником стороны преломляющей поверхности или лежит по одну сторону с ним. В первом случае ($a_2 > 0$) точка, именуемая изображением, есть действительно точка пересечения преломленных лучей. Такое изображение называется *действительным*. Во втором случае ($a_2 < 0$), очевидно, преломленные лучи, идущие во второй среде, остаются расходящимися и реально не пересекаются. В этом случае название *изображения* относится к той воображаемой точке, которая представляет собой место пересечения предполагаемого продолжения преломленных лучей.

Такое изображение называется *мнимым.* Наши рассуждения и формула (71.3) показывают, что гомоцентрический пучок после преломления направлен так, что его лучи или пересекаются в одной точке (действительное изображение), или могут быть представлены как пересекающиеся в одной точке (мнимое изображение). Именно в этом смысле он и остается *гомоцентрическим.* Так как для всех наших рассуждений нам важно знать направление световых лучей, то при всех построениях мы одинаково можем пользоваться как действительным, так и мнимым изображением.

Формула (71.3) показывает также, что если бы источник был в L', то изображение расположилось бы в L (взаимность).

§ 72. Фокусы сферической поверхности

Из основного уравнения (71.3)

$$\frac{n_1}{a_1} - \frac{n_2}{a_2} = \frac{n_1 - n_2}{R}$$

следует, что

при $a_1 = -\infty$

$$a_2 = \frac{n_2 R}{n_2 - n_1} = f_2, \tag{72.1}$$

при $a_2 = \infty$

$$a_1 = -\frac{n_1 R}{n_2 - n_1} = f_1, \tag{72.2}$$

т.е. f_1, f_2 зависят только от радиуса кривизны поверхности R и показателей преломления n_1, n_2 обеих сред.

Величины f_1 и f_2 суть постоянные длины, характеризующие преломляющую поверхность. Они называются ее *фокусными расстояниями*: f_1 — переднее фокусное расстояние (точка F_1 — передний фокус); f_2 — заднее фокусное расстояние (точка F_2 — задний фокус) (рис. 12.11).

Таким образом, фокусом сферической поверхности называется точка, в которой сходятся после преломления параллельные лучи (т.е.

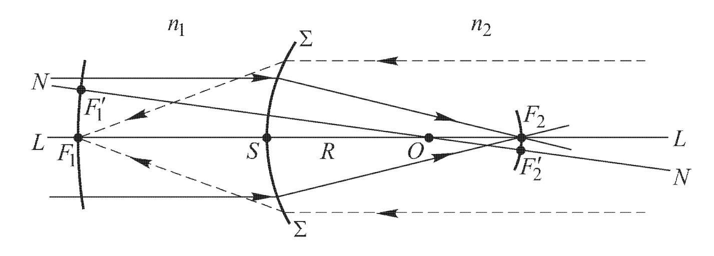


Рис. 12.11. Фокусы сферической поверхности

лучи, идущие из бесконечно удаленной точки). Понятно, что фокусы, так же как и изображения, могут быть действительными и мнимыми, т.е. представлять точку пересечения преломленных лучей (бывших до

преломления параллельными) или их предполагаемых продолжений. Так, если вогнутая сторона поверхности раздела обращена к среде, имеющей меньший показатель преломления, то оба фокуса будут мнимыми. В этом легко убедиться как из анализа формул (72.1) и (72.2), так и из построения.

Параллельные лучи, идущие справа налево вдоль NO (см. рис. 12.11), сойдутся в фокусе F_1', расположенном на линии NO и лежащем также на расстоянии $|f_1|$ от преломляющей поверхности. Геометрическое место точек $F_1 F_1' \ldots$ образует сферическую поверхность с радиусом $|R - f_1|$ (для случая, показанного на рис. 12.11, $f_1 < 0$), концентрическую с преломляющей сферой (с центром в точке O). Эта поверхность носит название *передней фокальной поверхности*. Аналогично построим *заднюю фокальную поверхность* радиуса $|f_2 - R|$. Малые участки этих поверхностей (для параксиальной области) могут быть приняты за плоскости (фокальные плоскости).

Фокусные расстояния сферической поверхности различны по знаку и не равны между собой по абсолютной величине (см. рис. 12.11), ибо $n_1 \neq n_2$. Рассматриваемый случай легко осуществить на опыте, взяв широкую стеклянную трубку и заклеив один ее конец часовым стеклом, имеющим сферическую форму. Если налить в трубку воду или, еще лучше, бензол, показатель преломления которого практически совпадает с показателем преломления часового стекла, то получим сферическую границу раздела между воздухом ($n_1 = 1{,}00$) и бензолом ($n_2 = 1{,}49$). На этом простом аппарате легко убедиться, в согласии с (72.1) и (72.2), что

$$\frac{f_2}{f_1} = -\frac{n_2}{n_1}. \tag{72.3}$$

Важным практическим примером одной преломляющей сферической поверхности является система, эквивалентная глазу и носящая название «приведенный глаз» (см. § 91). В качестве второго примера рассмотрим сферическое зеркало. Согласно сказанному в § 70 формулу (71.3) можно применить и к случаю отражения, если положить $n_2 = -n_1$. Тогда имеем

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{2}{R}, \tag{72.4}$$

т.е. известную формулу сферического зеркала. Фокусное расстояние такого зеркала определится по формуле (72.1). Найдем $f = R/2$, и, следовательно, формуле зеркала можно придать вид

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{1}{f}. \tag{72.5}$$

В случае зеркала изображение действительное, если оно лежит по одну сторону с источником, и мнимое, если расположено за зеркалом.

Случаи вогнутого и выпуклого зеркала отличаются лишь знаком R. Легко видеть, что фокус вогнутого зеркала — действительный, а фокус выпуклого зеркала — мнимый.

Чтобы получить законы плоского зеркала, достаточно положить $R = \infty$. В этом случае найдем $a_1 = -a_2$, т.е. изображение точки в плоском зеркале мнимое и симметрично расположенное.

§ 73. Изображение малых предметов при преломлении на сферической поверхности

Пользуясь свойствами параксиальных гомоцентрических пучков, можно построить изображение небольших площадей при преломлении на сферической поверхности. Представим себе сферическую поверхность, около центра которой расположена небольшая диафрагма DD, выделяющая узкие пучки, имеющие характер параксиальных по отношению к соответствующим осям (рис. 12.12). Параксиальный гомоцентрический пучок после преломления остается гомоцентрическим, т.е. дает изображение своей вершины. Соответствующим образом изо-

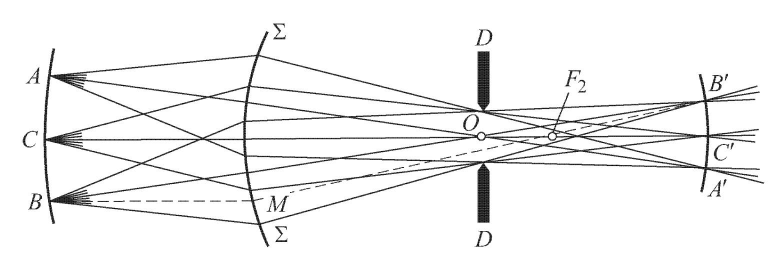


Рис. 12.12. Изображение малого предмета ACB при преломлении на сферической поверхности

бразится любая точка светящейся дуги ACB (или части сферы) с центром в O. Для отыскания изображения всех точек ACB применим формулу

$$\frac{n_1}{a_1} - \frac{n_2}{a_2} = \frac{n_1 - n_2}{R}.$$

Так как для всех точек ACB все a_1 имеют одно и то же значение, то и все a_2 одинаковы; элемент сферы с радиусом $R - a_1$ отобразится в виде элемента сферы с радиусом $a_2 - R$ с общим центром O. Для графического отыскания точки B', например, можно провести луч $BM \parallel CO$; тогда преломленный луч должен пройти через фокус F_2; луч же BO проходит без преломления. Пересечение продолжений MF_2 и BO и определит положение B'.

Ввиду того, что AB и $A'B'$ очень малы, вместо дуг (элементов сферы) можно брать хорды (элементы плоскости). Таким образом, в сферической системе малая площадка, перпендикулярная к оси, изобразится при помощи параксиальных лучей в виде площадки, также перпендикулярной к той же оси.

Плоскость предмета AB и плоскость его изображения $A'B'$ называются плоскостями, *сопряженными* по отношению к данной оптической системе.

§ 74. Увеличение. Теорема Лагранжа–Гельмгольца

Выберем в качестве светящегося предмета линию A_1B_1, перпендикулярную к оси, и построим ее изображение A_2B_2 (рис. 12.13). Отношение линейных размеров изображения ($y_2 = A_2B_2$) и предмета

($y_1 = A_1B_1$) носит название *линейного* или *поперечного* увеличения $V = y_2/y_1 = A_2B_2/A_1B_1$. Приписывая A_1B_1 и A_2B_2 знаки (как обычно в геометрии), получим, что увеличение *положительно*, если изображение *прямое*, и *отрицательно*, если изображение *перевернутое.*

Из треугольников A_1B_1S и A_2B_2S имеем

$$\frac{y_1}{a_1} = \operatorname{tg} i, \quad \frac{y_2}{a_2} = \operatorname{tg} r.$$

При малых размерах A_1B_1 и A_2B_2

$$\frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} r} = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1},$$

т.е.

$$\frac{n_1 y_1}{a_1} = \frac{n_2 y_2}{a_2} \quad \text{или} \quad \frac{y_2}{y_1} = V = \frac{n_1}{n_2}\,\frac{a_2}{a_1}. \tag{74.1}$$

Для преломляющей системы n_1 и n_2 всегда положительны, так что знак V определится знаком отношения a_2/a_1. Для расположений, со-

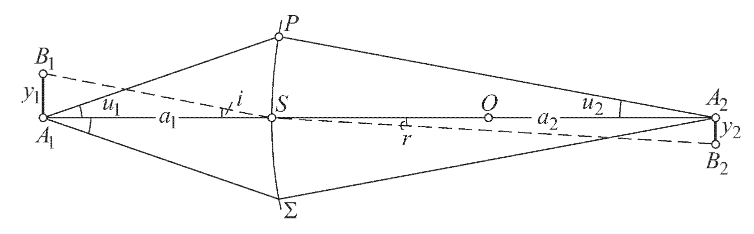


Рис. 12.13. К выводу уравнения Лагранжа–Гельмгольца для параксиальных лучей: $y_1 n_1 \sin u_1 = y_2 n_2 \sin u_2$

ответствующих действительному изображению (см. рис. 12.13), a_1 и a_2 имеют разные знаки, т.е. V отрицательно, и изображение перевернутое; для мнимых изображений — наоборот.

Для зеркал $n_1/n_2 = -1$, т.е. $V = -a_2/a_1$. В случае действительного изображения a_1 и a_2 имеют одинаковые знаки, т.е. $V < 0$ и изображение перевернутое; в случае мнимого изображения знаки a_1 и a_2 различны, $V > 0$, изображение прямое. Для плоского зеркала ($a_1 = -a_2$) $V = 1$, т.е. изображение прямое и натуральной величины.

Сопряженные плоскости называются *главными*, если для них $V = 1$, т.е. изображение получается прямым и в натуральную величину объекта. Нетрудно видеть, что для сферической поверхности главные плоскости совпадают между собой и представлены плоскостью, касательной к сфере в точке S, т.е. $a_1 = a_2 = 0$ (см. упражнение 100). В соответствии с этим и фокусные расстояния сферической поверхности следует считать расстояниями от главных плоскостей до фокусов. На рис. 12.13 изображены также углы u_1 и u_2, определяющие *максимальное* раскрытие (апертуру) пучков, падающих на поверхность Σ (угол $2u_1$), и сопряженных им изображающих пучков (угол $2u_2$). Предельное значение этих углов определяется требованием соблюдения условий параксиальности.

Так как при всех значениях углов u, лежащих *в пределах* апертуры параксиальных лучей, отношение a_2/a_1 остается постоянным, то

соотношение (74.2) показывает, что увеличение небольшого предмета A_1B_1 сохраняется неизменным, какой бы частью параксиального пучка ни было образовано изображение. Другими словами, не только изображение точки на оси (см. § 71), но и изображение *небольшого предмета*, расположенного около оси, передается параксиальным пучком без искажения.

Для параксиальных лучей $A_1P \approx A_1S = a_1$ и $PA_2 \approx SA_2 = a_2$, так что

$$u_1 = \operatorname{tg} u_1 = \frac{SP}{a_1}, \quad u_2 = \operatorname{tg} u_2 = \frac{SP}{a_2}, \quad \frac{u_1}{u_2} = \frac{a_2}{a_1}.$$

На основании (74.1) имеем $n_1a_2/n_2a_1 = n_1u_1/n_2u_2 = V = y_2/y_1$, или

$$y_1n_1u_1 = y_2n_2u_2. \tag{74.2}$$

Соотношение (74.2) носит название *теоремы Лагранжа–Гельмгольца*.

Это соотношение справедливо для области параксиальных лучей. При употреблении пучков со значительной апертурой получение четких изображений возможно лишь при выполнении условия

$$y_1n_1 \sin u_1 = y_2n_2 \sin u_2 \tag{74.3}$$

(условие синусов Аббе, см. § 85). Условие Лагранжа–Гельмгольца или условие синусов налагает ограничение на свободу преобразования световых пучков при помощи оптических систем, связывая апертуру и размер предмета с апертурой и размером изображения. Из него вытекает, что преобразование данного оптического пучка при помощи оптической системы в другой пучок любого *наперед заданного строения* невозможно. Строение преобразованного пучка может быть только таким, какое допускает условие Лагранжа–Гельмгольца. Это важное *принципиальное* ограничение приобретает особое значение в вопросах фотометрии и концентрирования лучистой энергии при помощи оптических систем.

§ 75. Центрированная оптическая система

Случай преломления на *одной* сферической поверхности сравнительно редок. Большинство реальных преломляющих систем содержит по крайней мере две преломляющие поверхности (линза) или большее их число.

Система сферических поверхностей называется *центрированной*, если центры всех поверхностей лежат на одной прямой (рис. 12.14), которая называется *главной оптической осью* системы.

Для всех рассуждений, изложенных в § 71, было существенно, что из точки L (см. рис. 12.10) выходит гомоцентрический пучок лучей, и отнюдь не важно, каким способом он получен. В частности, в L может находиться не точечный источник света, а его стигматическое изображение, полученное с помощью какой-либо иной оптической системы. Следовательно, соотношение (71.3) можно последовательно применить к каждой преломляющей поверхности сложной оптической системы, понимая под L изображение точечного источника, образованное всеми предыдущими поверхностями. Очевидно, что при этом a_1

может быть и положительным, если на рассматриваемую поверхность падает сходящийся пучок лучей (см. рис. 12.14, поверхность Σ_3).

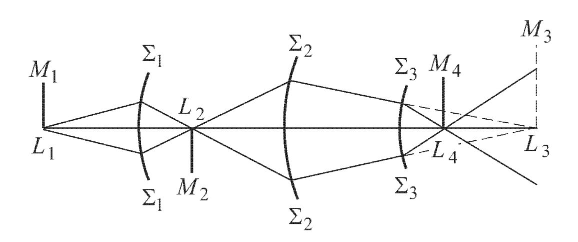


Рис. 12.14. Центрированная оптическая система

Для точки L_1, лежащей на оси, пучок параксиальных лучей сохраняет гомоцентричность, т.е. он соберется в точке L_2, из которой также пойдет параксиально и, следовательно, сохранит гомоцентричность, и т.д.

Итак, *гомоцентрический параксиальный пучок остается гомоцентрическим* при произвольном числе преломлений (и отражений) в центрированной сферической системе; таким образом, точка L_1 дает в центрированной системе стигматическое изображение (действительное или мнимое).

Подобным же образом, повторяя рассуждения § 73, 74, можно показать, что небольшой участок плоскости, расположенный в первой среде перпендикулярно к оптической оси центрированной системы, изобразится в последней преломляющей среде сопряженной плоскостью, также перпендикулярной к оптической оси, причем изображение остается геометрически подобным объекту. Наличие двух фокусов и двух фокальных поверхностей, установленное для одной сферической поверхности, сохраняется также и для всякой центрированной системы поверхностей. Точно так же для центрированной системы поверхностей сохраняет силу и теорема Лагранжа–Гельмгольца, т.е.

$$y_1 n_1 u_1 = y_2 n_2 u_2 = y_3 n_3 u_3 = \ldots$$

Для центрированной системы сохраняет смысл и понятие главных плоскостей как таких сопряженных плоскостей, в которых объект и изображение имеют одинаковые величину и направление. Но в то время как для одной преломляющей сферической поверхности обе главные плоскости сливались в одну, касающуюся сферической поверхности в ее вершине S, для центрированных поверхностей эти две плоскости, вообще говоря, не совпадают. Фокусные расстояния системы, так же как и в случае одной сферической поверхности, есть расстояния от соответствующей главной плоскости до фокуса.

§ 76. Преломление в линзе. Общая формула линзы

Большое значение имеет простейший случай центрированной системы, состоящей всего из двух сферических поверхностей, ограничивающих какой-либо прозрачный хорошо преломляющий материал

(обычно стекло) от окружающего воздуха. Такая система представляет, очевидно, обычную *линзу*.

Линза называется *тонкой*, если обе ее вершины можно считать совпадающими, т.е. если толщина линзы d мала по сравнению с R_1 и R_2, радиусами кривизны ограничивающих поверхностей. На рис. 12.15 для ясности линза изображена толстой. В дальнейших расчетах будем полагать, что точки S_1 и S_2 сливаются, и обозначим их буквой S. Все расстояния будем отсчитывать от этой точки S, которая

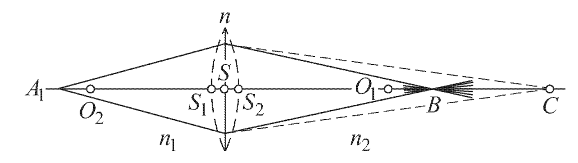


Рис. 12.15. Преломление в тонкой линзе

практически совпадает с S_1 и S_2. Точка S носит название *оптического центра* линзы. Любой параксиальный луч, проходящий через S, практически не испытывает преломления. Действительно, для таких лучей участки обеих поверхностей линзы можно считать параллельными, так что луч, проходя через них, не меняет направления, но лишь смещается параллельно самому себе (преломление в плоскопараллельной пластинке), а так как толщиной линзы мы пренебрегаем, то смещение это ничтожно и луч практически проходит без преломления. Луч, проходящий через оптический центр, мы назовем *осью* линзы. Та из осей, которая проходит через центры обеих поверхностей, называется *главной*, остальные — *побочными*.

Преломление на первой сферической поверхности создало бы без второй сферической поверхности в сплошном стекле с показателем преломления n изображение C на расстоянии $SC = a$ (см. рис. 12.15) от вершины, так что

$$\frac{n_1}{a_1} - \frac{n}{a} = \frac{n_1 - n}{R_1},$$

где $a_1 = SA_1$, R_1 — радиус кривизны первой поверхности линзы.

Для второй поверхности C является как бы мнимым источником света. Построение изображения этого источника после преломления на второй поверхности линзы даст точку B на расстоянии $a_2 = SB$ от линзы. Здесь опять применима формула

$$\frac{n}{a} - \frac{n_2}{a_2} = \frac{n - n_2}{R_2},$$

где R_2 — радиус второй поверхности.

Так как $n_1 = n_2$ (воздух с двух сторон линзы), то имеем

$$\frac{n_1}{a_1} - \frac{n}{a} = \frac{n_1 - n}{R_1}, \quad \frac{n}{a} - \frac{n_1}{a_2} = \frac{n - n_1}{R_2}.$$

Складывая второе уравнение с первым, получим

$$n_1\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1}\right) = (n - n_1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right),$$

или, вводя относительный показатель преломления $N = n/n_1$,

$$\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = (N-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right). \tag{76.1}$$

Эта общая формула линзы годна для линз выпуклых и вогнутых при любом расположении источника и соответствующем расположении фокуса. Нужно только принять во внимание знаки a_1, a_2, R_1, R_2, считая их положительными, если они отложены *вправо* от линзы, и отрицательными, если они отложены *влево* от линзы (как было сделано при выводе формулы (71.2)). Если знаки a_1 и a_2 одинаковы, то одна из сопряженных точек — мнимая, т.е. в ней пересекаются не сами лучи, а их воображаемые продолжения.

§ 77. Фокусные расстояния тонкой линзы

Если светящаяся точка, лежащая на главной оси, удаляется от линзы (a_1 возрастает по абсолютной величине), то изображение перемещается. Положение изображения, соответствующее предельному случаю, когда источник удален в бесконечность, носит название *фокуса* линзы. Таким образом, фокус есть точка, сопряженная бесконечно удаленной точке главной оси, или, что то же, — место схождения лучей, параллельных главной оптической оси. Расстояние от линзы до фокуса есть *фокусное расстояние* тонкой линзы. Плоскость, проходящая через фокус перпендикулярно к главной оси, называется *фокальной плоскостью.*

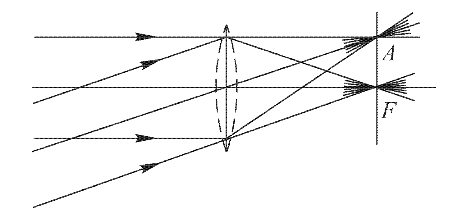


Рис. 12.16. Положение фокусов, расположенных на главной и побочной оптических осях тонкой линзы (AF — фокальная плоскость линзы)

Если лучи идут из бесконечности параллельным пучком, но под углом к главной оси (вдоль побочной оси), то они пересекаются в соответствующей точке A фокальной плоскости (рис. 12.16). Таким образом, фокальная плоскость есть плоскость, сопряженная бесконечно удаленной плоскости.

Для определения фокусных расстояний имеем следующие соотношения:

при $a_1 = -\infty$

$$a_2 = f_2 = \frac{1}{(N-1)(1/R_1 - 1/R_2)}, \tag{77.1}$$

при $a_2 = \infty$

$$a_1 = f_1 = -\frac{1}{(N-1)(1/R_1 - 1/R_2)}, \tag{77.2}$$

т. е.

$$f_1 = -f_2. \tag{77.3}$$

Итак, фокусные расстояния линзы равны по величине [1]) и противоположны по знаку, т.е. фокусы лежат по разные стороны от линзы.

В зависимости от знака и величины R_1 и R_2, а также от знака $(N-1)$, величина f_1 может быть положительной либо отрицательной, т.е. фокус может быть мнимым или действительным. То же относится и к f_2, причем нетрудно видеть, что если первый фокус — мнимый, то и второй будет мнимым, и наоборот.

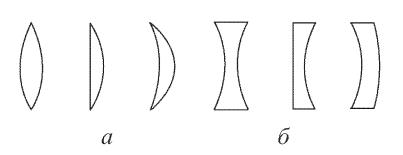


Рис. 12.17. Различные типы тонких линз: *а* — собирательные, *б* — рассеивающие

Если фокусы действительны, т.е. параллельные лучи после преломления в линзе сходятся, то линза называется *собирательной* или *положительной*. При мнимых фокусах параллельные лучи после преломления в линзе становятся расходящимися. Поэтому такие линзы называются *рассеивающими* или *отрицательными*.

Если материал тонкой линзы преломляет сильнее, чем окружающая среда (например, стеклянная линза в воздухе), то собирательными будут линзы двояковыпуклые, плоско-выпуклые и вогнуто-выпуклые (положительный мениск), т.е. линзы, утолщающиеся к середине (рис. 12.17 *а*); к рассеивающим линзам принадлежат двояковогнутые, плоско-вогнутые и выпукло-вогнутые (отрицательный мениск), т.е. линзы, утончающиеся к середине (см. рис. 12.17 *б*). Если материал тонкой линзы преломляет меньше, чем окружающая среда (например, воздушная полость в воде), то линзы вида рис. 12.17 *а* будут рассеивающими, а вида рис. 12.17 *б* — собирательными.

Вводя фокусное расстояние линзы, придадим формуле линзы вид

$$\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{1}{f}, \quad f = f_2 = -f_1.$$

Зависимость между a_1 и a_2 графически изображена на рис. 12.18.

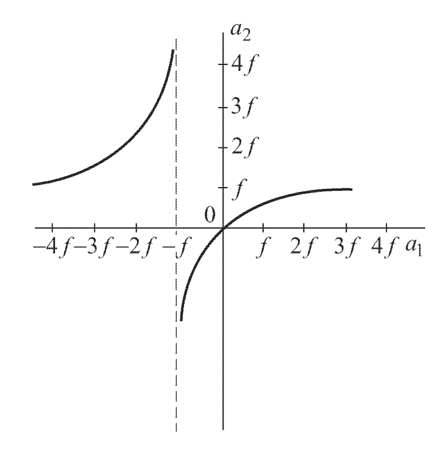


Рис. 12.18. Графическая зависимость между a_1 и a_2 при данном f для идеальной тонкой линзы

Легко видеть, что изменение величины a_1 приводит к изменению a_2 того же знака. Другими словами, изображение сдвигается вдоль

[1]) Если линза помещена так, что по обе стороны ее располагаются разные среды ($n_1 \neq n_2$), то формула усложняется. В этом случае фокусные расстояния f_1 и f_2 относятся между собой, как $-n_1/n_2$ (см. упражнение 105). Примером может служить хрусталик глаза человека.

оси в том же направлении, что и объект. Исключение составляет лишь точка $a_1 = f_1$, при прохождении которой изображение переходит из $a_2 = +\infty$ в $a_2 = -\infty$.

§ 78. Изображение в тонкой линзе. Увеличение

Пусть малый объект вблизи оси изображается системой центрированных сферических поверхностей. Построение можно выполнить при помощи параксиальных пучков (см. § 73). Поскольку доказано, что для параксиальных лучей изображение точки стигматично (т.е. гомоцентричность пучка сохраняется), то для построения ее изображения достаточно найти точку пересечения каких-либо двух лучей.

Наиболее простое построение выполняется при помощи лучей, указанных на рис. 12.19. Один из них — луч CF_2B_2, сопряженный с лучом B_1C, параллельным главной оптической оси; этот луч проходит через задний фокус F_2; другой — луч DB_2, параллельный главной оптической оси и сопряженный с лучом B_1F_1D, проведенным через передний фокус F_1. Третий луч вдоль побочной оптической оси B_1SB_2 проходит через оптический центр линзы (точку S), — он идет, не преломляясь. Построение этих лучей выполняется без затруднений. Всякий другой луч, идущий из B_1, нужно было бы строить при помощи закона преломления, что гораздо сложнее. Но из свойства гомоцентричности следует, что после выполнения построения любой преломленный луч пройдет через точку B_2. Так как построение изображения точки B_1 сводится к *геометрической* задаче отыскания точки B_2, то нет надобности, чтобы выбранные простейшие пары лучей имели *реальный* характер. В частности, когда A_1B_1 больше размеров линзы (например, фотографирование), лучи B_1C, B_1D (рис. 12.20) не проходят через линзу,

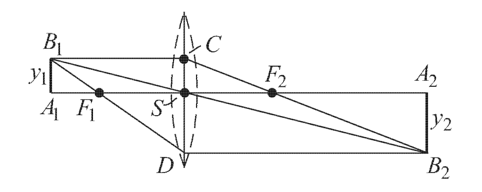


Рис. 12.19. Построение изображения в тонкой линзе

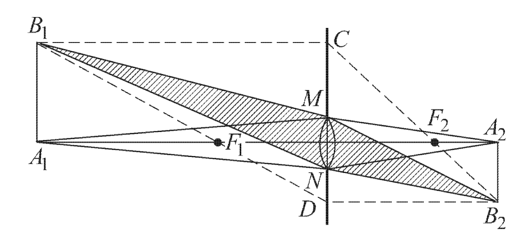


Рис. 12.20. Ограничение пучков в тонкой линзе

но могут быть использованы для построения изображения. Реальные лучи, участвующие в построении изображения, ограничены оправой

линзы MN, но сходятся, конечно, в той же точке B_2, ибо линза предполагается достаточно хорошей, так что проходящие через нее пучки остаются гомоцентрическими.

Определив поперечное *увеличение*, как и в § 74, при помощи соотношения $V = \dfrac{A_2B_2}{A_1B_1} = \dfrac{y_2}{y_1}$, найдем из рис. 12.19

$$V = \frac{SA_2}{SA_1} = \frac{a_2}{a_1}. \tag{78.1}$$

Аналогично изложенному в § 74 найдем, что для действительных изображений $V < 0$, т.е. изображение обратное, а для мнимых $V > 0$, т.е. изображение прямое.

Главными плоскостями линзы, как и всякой системы, являются те сопряженные плоскости, для которых $V = 1$. Для тонкой линзы эти плоскости сливаются в одну, проходящую через оптический центр перпендикулярно к оптической оси (т.е. $a_1 = a_2 = 0$) (см. упражнение 100). Таким образом, фокусные расстояния линзы, которые должны отсчитываться от главных плоскостей, в случае тонкой линзы могут отсчитываться от ее поверхности.

Тонкая линза как система двух центрированных поверхностей представляет простейшую оптическую систему, дающую довольно несовершенное изображение. В большинстве случаев мы прибегаем к построению более сложных систем, характеризующихся наличием большого числа преломляющих поверхностей и не ограниченных требованием близости этих поверхностей (тонкости линзы). Однако даже простые тонкие линзы имеют очень большое значение на практике, главным образом в качестве очковых стекол. В громадном большинстве случаев очки представляют собой просто тонкие линзы.

Для классификации очковых стекол обычно применяется понятие оптической силы линзы. *Оптической силой* называется величина, обратная заднему фокусному расстоянию линзы. Если фокусное расстояние измерять в метрах, то оптическую силу принято выражать в *диоптриях*, считая ее положительной или отрицательной в зависимости от того, собирательная линза или рассеивающая. Так, например, рассеивающая линза с фокусным расстоянием 20 см ($f = -1/5$ м) имеет оптическую силу в -5 диоптрий.

§ 79. Идеальные оптические системы

Гаусс (1841 г.) дал общую теорию оптических систем, получившую дальнейшее развитие в трудах многих математиков и физиков. Теория Гаусса есть теория идеальной оптической системы, т.е. системы, в которой сохраняется гомоцентричность пучков и изображение геометрически *подобно* предмету. Согласно этому определению всякой точке пространства объектов соответствует в идеальной системе точка пространства изображений; эти точки носят название *сопряженных*. Точно так же каждой прямой или плоскости пространства объектов должна соответствовать сопряженная прямая или плоскость пространства изображений. Таким образом, теория идеальной опти-

ческой системы есть чисто геометрическая теория, устанавливающая соотношение между точками, линиями, плоскостями.

Изложенное в § 75 показывает, что идеальная оптическая система может быть осуществлена с достаточным приближением в виде центрированной оптической системы, если ограничиться областью вблизи оси симметрии, т.е. параксиальными пучками. В теории Гаусса требование «тонкости» системы отпадает, но лучи по-прежнему предполагаются параксиальными. Разыскание физической системы, которая приближалась бы к идеальной даже при пучках значительного раскрытия, есть задача прикладной геометрической оптики.

Линия, соединяющая центры сферических поверхностей, представляет собой ось симметрии центрированной системы и называется *главной оптической осью* системы. Теория Гаусса устанавливает ряд так называемых *кардинальных точек* и *плоскостей*, задание которых полностью описывает все свойства оптической системы и позволяет пользоваться ею, не рассматривая реального хода лучей в системе.

Пусть MM и NN — крайние сферические поверхности, ограничивающие нашу систему, и O_1O_2 — ее главная ось (рис. 12.21). Проведем луч A_1B_1, параллельный O_1O_2; точка B_1 есть место входа этого луча

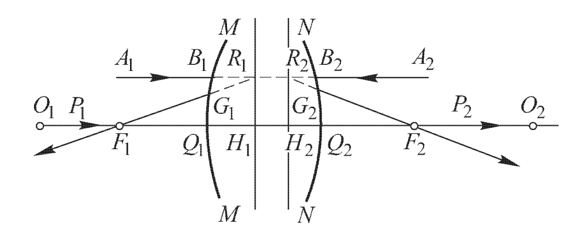


Рис. 12.21. Главные плоскости H_1R_1 и H_2R_2 и фокусы F_1 и F_2 оптической системы

в систему. Согласно свойству идеальной системы лучу A_1B_1 соответствует в пространстве изображений сопряженный луч G_2F_2, выходящий из системы в точке G_2. Как идет луч внутри системы, нас не интересует. Второй луч P_1Q_1 выберем вдоль главной оси. Сопряженный ему луч Q_2P_2 будет также идти вдоль главной оси. Точка F_2 как пересечение двух лучей G_2F_2 и Q_2P_2 есть изображение точки, в которой пересекаются лучи A_1B_1 и P_1Q_1, сопряженные с G_2F_2 и Q_2P_2. Но так как $A_1B_1 \parallel P_1Q_1$, то точка, сопряженная с F_2, лежит в бесконечности. Таким образом, F_2 есть *фокус* (второй, или задний) нашей системы. Плоскость, проходящая через фокус перпендикулярно к оси, носит название *фокальной*.

Повторяя те же рассуждения для луча A_2B_2 и осевого луча P_2Q_2, найдем точку F_1, являющуюся передним фокусом нашей системы, причем точка G_1 есть точка выхода луча, сопряженного с A_2B_2. Продолжим теперь F_1G_1 и F_2G_2 до пересечения с продолжениями A_1B_1 и A_2B_2 и отметим точки пересечения R_1 и R_2. Легко видеть, что R_1 и R_2 — сопряженные точки. Действительно, R_1 есть точка пересечения лучей $A_1B_1R_1$ и $F_1G_1R_1$, которым сопряжены соответственно лучи

$R_2G_2F_2$ и $R_2B_2A_2$, пересекающиеся в R_2. Из построения ясно также, что R_1 и R_2 лежат на одинаковом расстоянии от главной оси, т.е. $H_1R_1 = H_2R_2$, или линейное поперечное увеличение равно

$$V = \frac{H_2R_2}{H_1R_1} = +1.$$

Специальными рассуждениями можно показать, что и *любая* точка линии H_1R_1 сопряжена с точкой линии H_2R_2, лежащей на такой же высоте от O_1O_2, как и выбранная. То же относится и к плоскостям, проведенным через H_1R_1 и H_2R_2 перпендикулярно к главной оси, ибо вся система симметрична относительно оси.

Итак, мы отыскали две плоскости H_1R_1 и H_2R_2, точки которых сопряжены и изображаются с увеличением, равным +1, т.е. плоскость H_1R_1 изображается на H_2R_2 прямо и в натуральную величину (рис. 12.22). Такие плоскости называются *главными плоскостями*

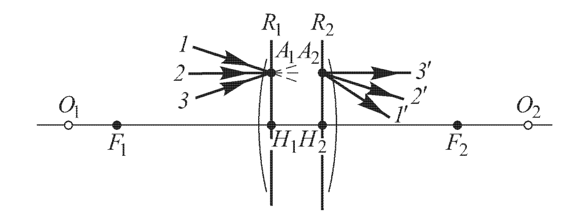


Рис. 12.22. К доказательству существования главных плоскостей (лучи *1*, *2*, *3* и *1′*, *2′*, *3′* сопряжены)

(см. § 74). Таким образом, мы показали, что идеальная система обладает главными плоскостями, и указали метод их отыскания. Точки H_1 и H_2 пересечения главных плоскостей с осью носят название *главных точек* системы. Расстояния от главных точек до фокусов называются *фокусными расстояниями* системы $f_1 = H_1F_1$ и $f_2 = H_2F_2$ [1]).

Определяя положение сопряженных точек их расстояниями (a_1 и a_2) от соответствующих главных плоскостей и сохраняя правило знаков, установленное в § 71, мы легко найдем ряд соотношений, определяющих положение сопряженных точек в данной системе и играющих роль формул системы. Важнейшие из них (см. упражнение 106) имеют вид

$$\frac{f_1}{a_1} + \frac{f_2}{a_2} = 1, \quad x_1x_2 = f_1f_2,$$
$$\frac{f_1}{f_2} = -\frac{n_1}{n_2}, \quad V = -\frac{x_2}{f_2} = -\frac{f_1}{x_1}, \tag{79.1}$$

[1]) Выше предполагалось, что луч R_2F_2 (см. рис. 12.21), сопряженный с лучом A_1B_1, параллельным оси, пересекает ось. Возможен, однако, случай, когда после прохождения системы луч остается параллельным оси. Этот исключительный случай соответствует так называемым *телескопическим системам* (см. § 92). Для них фокусы и главные точки находятся в бесконечности.

где $x_1 = a_1 - f_1$ и $x_2 = a_2 - f_2$ — расстояния сопряженных точек от соответствующих фокусов. Для распространенного случая, когда $n_1 = n_2$ (источник и его изображение лежат в одной среде, например, в воздухе), имеем

$$\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{1}{f}, \quad x_1 x_2 = -f^2, \quad f_2 = -f_1 = f. \tag{79.2}$$

Пользуясь правилом знаков, мы можем описать все свойства как собирательных, так и рассеивающих систем, ввести понятие мнимых точек и мнимых изображений и т.д.

Главные плоскости и главные точки могут лежать как внутри, так и вне системы совершенно несимметрично относительно поверхностей, ограничивающих систему, например даже по одну сторону от нее (рис. 12.23). Напоминаем еще раз, что фокусные расстояния отсчитываются от главных плоскостей; поэтому даже когда $|f_1| = |f_2|$, расстояния от фокусов до поверхностей, ограничивающих систему, могут быть весьма различны (пример: линзы-мениски, изображенные на рис. 12.23).

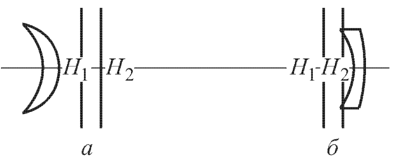


Рис. 12.23. Расположение главных плоскостей в собирающей (*а*) и рассеивающей (*б*) линзах-менисках

Кроме линейного увеличения, систему можно также охарактеризовать *угловым* увеличением. Под угловым увеличением W понимают отношение тангенсов углов u_2 и u_1, составляемых сопряженными

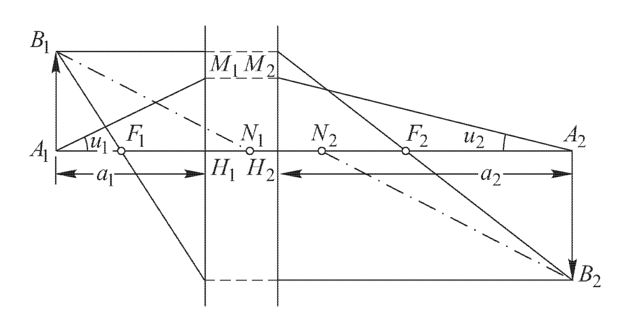


Рис. 12.24. К определению углового увеличения системы

лучами A_2M_2 и A_1M_1 с оптической осью (рис. 12.24), т.е.

$$W = \frac{\operatorname{tg} u_2}{\operatorname{tg} u_1}.$$

Из рис. 12.24 видно, что $W = a_1/a_2$ (ибо $H_1M_1 = H_2M_2$), тогда как линейное увеличение $V = \dfrac{n_1 a_2}{n_2 a_1}$ (см. § 74), т.е.

$$WV = \frac{n_1}{n_2}.$$

Для обычно встречающегося случая, когда предмет и изображение расположены в одной среде ($n_1 = n_2$), имеем

$$WV = 1.$$

Как угловое, так и линейное увеличение системы различно для разных точек оси; причем чем *больше* линейное увеличение, тем *меньше* угловое, т.е. при увеличении размеров изображения лучи, его образующие, составляют меньший угол. Это обстоятельство имеет важное значение при рассмотрении роли оптических инструментов в световом восприятии (см. § 95).

Подобно тому, как сопряженные плоскости, для которых линейное увеличение $V = 1$, имеют особое значение, сопряженные точки, в которых угловое увеличение $W = 1$, также представляют собой особенные точки системы. Точки эти называются *узлами* (или *узловыми точками*) и характеризуются тем, что сопряженные лучи, проходящие через узлы, параллельны друг другу, ибо $u_1 = u_2$. Нетрудно показать, что в каждой системе такой парой точек будут точки N_1 и N_2, отстоящие от первого и второго фокусов соответственно на расстояния, равные второму и первому фокусным расстояниям (рис. 12.25), т.е. $x_1 = F_1N_1 = f_2$ и $x_2 = F_2N_2 = f_1$. Легко видеть, что точки N_1

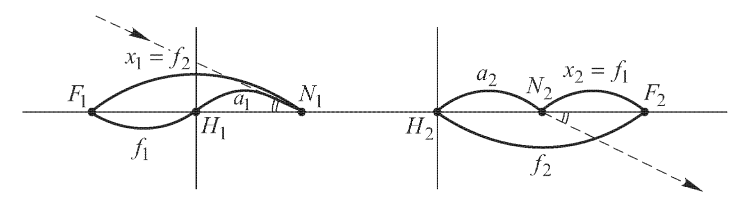


Рис. 12.25. Положение узловых точек N_1 и N_2

и N_2 — сопряженные, ибо их координаты удовлетворяют уравнению (79.1) системы $x_1x_2 = f_1f_2$. Кроме того, из рис. 12.25 видно, что их расстояния относительно главных плоскостей равны соответственно $H_1N_1 = a_1 = f_2 + f_1$ и $H_2N_2 = a_2 = f_2 + f_1$, т.е. $a_1 = a_2$ и, следовательно, для этих точек $W = a_1/a_2 = 1$. Итак, указанные нами точки N_1 и N_2 являются сопряженными и удовлетворяют требованию $W = 1$, т.е. служат узловыми точками системы.

Плоскости, проходящие через узлы перпендикулярно к оптической оси, называются *узловыми плоскостями*. Шесть плоскостей (две фокальные, две главные и две узловые) и шесть точек главной оси, им соответствующие (фокусы, главные точки, узлы), называются *кардинальными* плоскостями и точками. Общее расположение кардинальных точек F_1, N_1, H_1, F_2, N_2, H_2 показано на рис. 12.26.

Когда по обе стороны системы располагается одна и та же среда, мы получим, как сказано выше, равные по абсолютной величине фокусные расстояния $f_1 = -f_2$. Узловые точки теперь сливаются с главными, ибо $F_1N_1 = F_1H_1 = f_2$, и система характеризуется положением всего лишь четырех точек и плоскостей.

Зная свойства кардинальных плоскостей и точек, можно без труда построить изображение в любой системе, пользуясь двумя лучами, ис-

ходящими из одной точки. В частности, для линз отпадает требование тонкости. Рисунок 12.27 показывает, как можно построить изображение в толстой линзе, если дано расположение ее главных плоскостей и

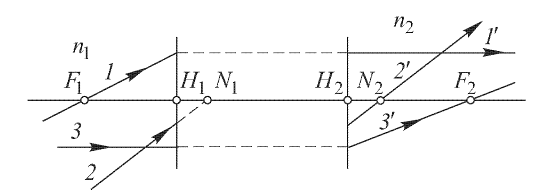


Рис. 12.26. Кардинальные точки и плоскости системы: F_1 и F_2 — главные фокусы, N_1 и N_2 — узлы, H_1 и H_2 — главные точки (главные плоскости)

фокусов. На рис. 12.27 проведены лучи, построение которых особенно просто определяет положение точки B', сопряженной с точкой B. В силу гомоцентричности пучка любой другой луч из B пройдет через B'.

Луч *1*, проведенный параллельно главной оси, имеет в качестве сопряженного луч *1*$'$, пересекающий вторую главную плоскость на высоте $H_2D_2 = H_1D_1$ и проходящий через фокус F_2. Луч *2*, идущий через узел N_1, имеет сопряженный луч *2*$'$, проходящий через второй

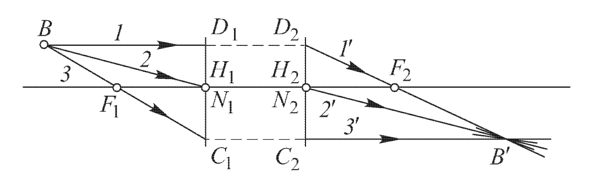


Рис. 12.27. Построение изображения в системе с использованием кардинальных точек

узел параллельно лучу *2*. Луч *3*, проходящий через фокус F_1 и пересекающий главную плоскость на высоте H_1C_1, пройдет на той же высоте ($H_2C_2 = H_1C_1$) через вторую главную плоскость и пойдет параллельно главной оси. Для построения изображения можно ограничиться двумя лучами из трех.

Легко видеть, что разобранная выше тонкая линза может рассматриваться как частный случай толстой линзы, в которой точки H_1 и H_2 совпадают и главные плоскости сливаются. Узловые точки, совмещенные с H_1 и H_2, также совпадут, образуя оптический центр линзы. Построение изображения произойдет, как и раньше, при помощи каких-либо двух простейших лучей (ср. также рис. 12.19).

Вводя понятие главных и узловых плоскостей оптической системы, мы ввели одновременно и представления о линейном *поперечном* увеличении V и *угловом* увеличении W. Обычно приходится иметь дело с изображением *пространственных* предметов, отдельные точки которых лежат на разных расстояниях от главной плоскости. По-

этому рационально ввести еще и *продольное* увеличение (U), показывающее отношение длины изображения Δx_2 к длине изображаемого малого отрезка Δx_1, если последний расположен вдоль оси. Понятно, что приходится говорить об увеличении малых по длине отрезков, ибо продольное увеличение для разных точек оси различается очень значительно. Итак,

$$U = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}\,.$$

Выражение для U легко найти, пользуясь формулами (79.1). Имеем

$$x_1\Delta x_2 + x_2\Delta x_1 = 0,$$

или

$$U = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = -\frac{x_2}{x_1} = -\frac{f_1 f_2}{x_1^2} = -\frac{x_2^2}{f_1 f_2} = -V^2\frac{f_2}{f_1} = \frac{n_2}{n_1}\,V^2,$$

так как

$$V = -\frac{x_2}{f_2} = -\frac{f_1}{x_1} \quad \text{и} \quad \frac{f_2}{f_1} = -\frac{n_2}{n_1}\,.$$

Сопоставляя значения U, V и W, находим

$$U = \frac{n_2}{n_1}\,V^2, \quad VW = \frac{n_1}{n_2}$$

и, следовательно,

$$UW = V. \tag{79.3}$$

Поперечное увеличение важно для характеристики систем, проецирующих изображение на экран или фотопластинку (проекционные и фотографические объективы). Угловое увеличение важно при рассматривании удаленных объектов, когда стремятся увеличить угловые размеры рассматриваемых объектов (телескопические системы, см. § 92). Продольное увеличение характеризует резкость изображения пространственного объекта на экран (так называемую «глубину оптической системы»). Оно всегда положительно, т.е. Δx_1 и Δx_2 совпадают по направлению.

Изложенная теория идеальной оптической системы носит совершенно общий характер, т.е. применима к аксиально симметричным системам произвольной конструкции. Система оказывается полностью заданной, если известно взаимное расположение четырех кардинальных точек. Положение этих точек в каждой конкретной системе, разумеется, зависит от ее конструкции (от кривизны преломляющих и отражающих поверхностей, их расположения, показателя преломления и т.п.). Существует несколько методов нахождения кардинальных точек. Один из них состоит в последовательном расчете хода лучей, падающих на систему слева и справа параллельно оси. При этом к каждой преломляющей поверхности применяется формула (71.2) или (71.3). Сущность другого, более употребительного метода, ясна из следующего. Пусть даны две оптические системы и для них известны фокусные расстояния и положения главных точек, причем обе системы расположены на общей оси на некотором известном расстоянии друг от друга; тогда можно вычислить фокусные расстояния и положения кардинальных точек сложной системы, состоящей из этих

систем. Таким образом, если сложная система состоит из двух или большего числа подсистем с известными кардинальными точками, то производя описанный процесс сложения несколько раз, можно определить параметры системы в целом.

Снабдим индексами 1 и 2 величины, относящиеся к двум подсистемам, причем штрихованные величины соответствуют пространству изображений, а нештрихованные — пространству объектов. В обозначениях, ясных из рис. 12.28, положение переднего фокуса F сложной системы относительно переднего фокуса F_1 первой подсистемы определяется формулой (см. упражнение 107)

$$x_F = \frac{f_1 f_1'}{\Delta}\,. \tag{79.4}$$

Аналогичная формула для заднего фокуса второй системы имеет вид

$$x'_{F'} = -\frac{f_2 f_2'}{\Delta}\,; \tag{79.5}$$

здесь отсчет ведется от заднего фокуса F_2' второй подсистемы (см. рис. 12.28). Для фокусных расстояний сложной системы получим

$$f' = -\frac{f_1' f_2'}{\Delta}\,, \qquad f = \frac{f_1 f_2}{\Delta}\,. \tag{79.6}$$

В последних трех формулах расстояние Δ между F_1' и F_2 отсчитывается от F_1', т.е. для расположения, показанного на рис. 12.28, $\Delta > 0$.

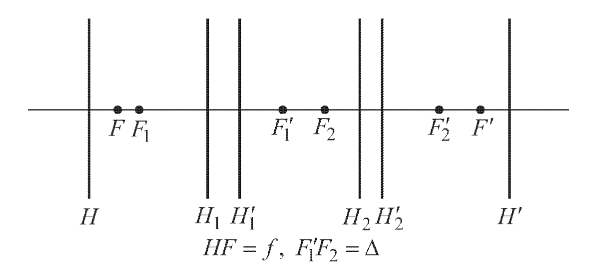


Рис. 12.28. К определению параметров сложной оптической системы

Если в качестве подсистем рассматривать преломляющие поверхности, то расчет произвольной оптической системы можно свести к последовательному применению формул сложения (79.4)–(79.6), включая на каждом этапе одну из преломляющих поверхностей. Применим эти соображения к линзе — системе, состоящей из двух преломляющих поверхностей, отстоящих на расстояние d друг от друга и обладающих радиусами кривизны R_1 и R_2. Из (79.6) и формул § 72 легко находим ее фокусное расстояние

$$\frac{1}{f'} = (N-1)\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{N-1}{N}\,\frac{d}{R_1 R_2}\right].$$

Когда толщина линзы d мала в сравнении с R_1, R_2, последний член в этом выражении можно отбросить, и мы приходим к формуле для

тонкой линзы (см. § 77). Если же d достаточно велика, фокусное расстояние линзы существенно зависит от ее толщины. В частности, можно, очевидно, подобрать условия, когда $1/f' = 0$, т.е. толстая линза оказывается телескопической системой, увеличение которой определяется отношением R_1/R_2.

Глава XIII

АБЕРРАЦИИ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

§ 80. Введение

В предыдущей главе были изложены основы построения изображения в центрированных системах, справедливые при выполнении следующих условий:

1) свет поступает в систему в виде параксиальных пучков;

2) пучки составляют небольшие углы с главной осью системы;

3) показатель преломления постоянен для всех лучей, т.е. среда не имеет дисперсии или свет достаточно монохроматичен.

Все три условия не соблюдаются в практической оптике. Мы обычно имеем дело со светом сложного спектрального состава и должны учитывать зависимость показателя преломления от длины волны (дисперсия). Ограничение пучками, слабо наклоненными к оси, означало бы отказ от получения изображения точек, лежащих в стороне от главной оси системы, а применение лишь параксиальных пучков вело бы к использованию лишь незначительных световых потоков.

Устранение всех этих крайне стеснительных для практики ограничений приводит, однако, к тому, что появляются многочисленные недостатки изображения.

Тщательное их изучение привело к чрезвычайному усовершенствованию современных оптических систем, в которых нередко почти полностью устранены многие из возможных погрешностей, или аберраций.

Главная задача оптической системы состоит в образовании *правильного* изображения объекта, который в простейшем случае представляет собой плоскую картину, расположенную перпендикулярно к оптической оси системы. Правильное изображение требует соблюдения следующих условий:

1) каждая точка плоскости должна изображаться стигматически;

2) все точки изображения должны лежать в плоскости, перпендикулярной к оси системы;

3) масштаб изображения (увеличение) должен быть постоянен на всем изображении.

Нарушение первого и второго из этих условий ведет к уменьшению резкости изображения, нарушение второго и третьего деформирует изображение.

Наконец, своеобразная трудность возникает в связи с тем, что изображаемые объекты обычно бывают пространственными, а не плос-

ками; получаемое же изображение (на фотопластинке, в глазу или в трубе) практически плоское (см. § 87).

§ 81. Каустическая поверхность. Характер ее симметрии

Поверхность, огибающая совокупность лучей преломленного пучка, носит название *каустической поверхности* (*каустики*), а ее сечение любой плоскостью, проходящей через луч, — *каустической кривой*. Если пучок при прохождении через оптическую систему сохранил гомоцентричность, то каустика вырождается в точку, представляющую вершину гомоцентрического пучка. Нарушение гомоцентричности означает большее или меньшее искажение каустической поверхности по сравнению с этим простейшим вырожденным случаем. Можно классифицировать различные аберрации по характеру понижения симметрии каустической поверхности. Так, при сферической аберрации (см. § 82) каустика приобретает вид поверхности, обладающей осью симметрии, но не имеющей центра симметрии. Рисунок 13.1 изображает одну из таких форм, где жирные линии представляют каустическую кривую в плоскости рисунка, а сама каустика получается вращением рисунка относительно оси PQ. Аберрация астигматизма (см. § 82, 83) соответствует дальнейшему понижению симметрии каустической поверхности, которая не имеет больше оси симметрии, а обладает лишь двумя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии.

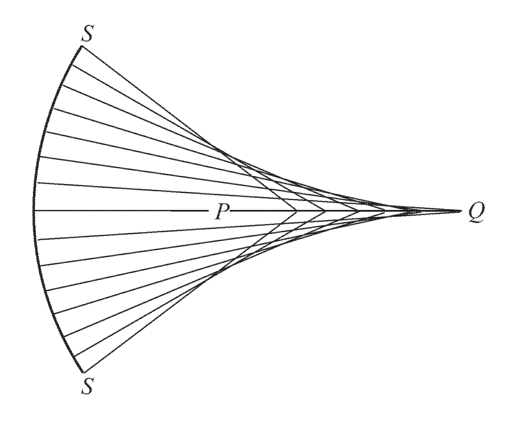


Рис. 13.1. Сечение каустической поверхности: SS — волновой фронт

Аберрация комы (см. § 82) означает, что каустическая поверхность обладает лишь одной плоскостью симметрии, проходящей через светящуюся точку и оптическую ось.

§ 82. Аберрации, обусловленные широкими пучками лучей

а. Сферическая аберрация. Предположим, что на оси оптической системы расположена светящаяся точка L, посылающая широкий пучок лучей на оптическую систему (линзу). Для того чтобы яснее проследить за действием различных зон линзы, прикроем ее картонным диском, снабженным небольшими отверстаями, расположенными по диаметру диска, как показано на рис. 13.2.

Параксиальный пучок *1* через центральное отверстие дает изображение точки в L'; пучки, проходящие через более удаленные зоны (пучки *2*, *3* и т.д.), дадут изображения в точках L'', L''', ... Явление

можно хорошо наблюдать в запыленном воздухе. Если картон с отверстиями устранить, то пучки, проходящие через промежуточные зоны, дадут изображения в промежуточных точках, так что точка L изобразится на оси линией $L' \ldots L''''$, а на любом экране, перпендикулярном к оси, получится изображение в виде диска с неоднородным распределением освещенности. Таким образом, при значительной ширине пучка стигматичность изображения не имеет места даже для точки на оси. Этот вид ошибки носит название *сферической аберрации*, хотя он характерен не только для сферических поверхностей.

За меру сферической аберрации принимают расстояние между L' и L'' для соответствующих зон (продольная аберрация). Удобное графическое изображение сферической аберрации дано на рис. 13.2, где положительные δs откладываются вправо от линии AA.

Величина сферической аберрации зависит от кривизны поверхностей линзы и показателя преломления, а также от того, какой из поверхностей несимметричная линза обращена к источнику. Так, двояковыпуклая линза из крона ($n = 1{,}5$) с отношением радиусов кривизны 1 : 6, обращенная более выпуклой стороной к параллельным

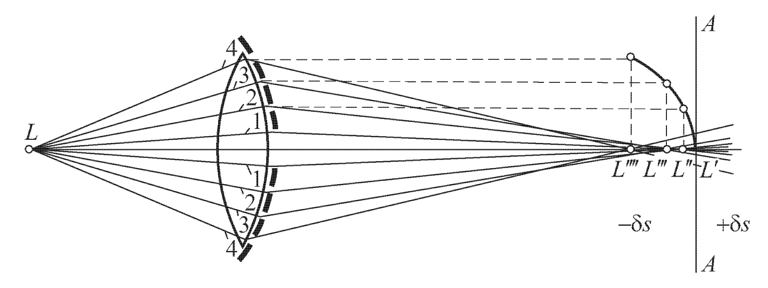


Рис. 13.2. Сферическая аберрация и ее графическое изображение

лучам, имеет минимальные аберрации. Почти так же хороша плосковыпуклая линза. Вследствие сферической аберрации светящаяся точка дает на экране изображение в виде небольшого кружка (*кружок рассеяния*), освещенного, вообще говоря, неравномерно. При перемещении экрана вдоль оптической оси размеры кружка рассеяния и распределение освещенности в нем меняются. Если экран совпадает с плоскостью AA (см. рис. 13.2), т.е. проходит через фокус L' параксиальных лучей, то кружок рассеяния имеет вид светлой точки со сравнительно большим и слабым ореолом; при перемещении экрана от L' к L'' размеры ореола уменьшаются, но освещенность его растет, а диаметр светлой точки увеличивается; при некотором положении экрана кружок рассеяния имеет наименьшие размеры (примерно в четыре раза меньше, чем в плоскости L') при почти равномерной освещенности; при дальнейшем перемещении экрана наблюдается быстрое расплывание освещенной части.

Отличительной особенностью сферической аберрации является то, что она сохраняется даже при положении светящейся точки на оси системы, когда все остальные аберрации (в монохроматическом свете) исчезают.

Положительные (собирательные) линзы создают аберрацию, изображенную на рис. 13.2, т.е. $\delta s < 0$ для всех зон; отрицательные (рассеивающие) линзы имеют аберрацию противоположного знака. Поэтому, комбинируя такие простые линзы, можно значительно исправить сферическую аберрацию. Соответствующий пример изображен на рис. 13.3. Строго говоря, сферическая аберрация может быть вполне исправлена только для какой-нибудь пары узких зон, и притом лишь для определенных двух сопряженных точек. Однако практически исправление может быть весьма удовлетворительным даже для двухлинзовых систем, упомянутых выше. Подобные двухлинзовые системы могут быть очень хорошо исправлены в отношении сферической аберрации. Так, небольшой астрономический объектив с диаметром 80 мм и фокусным расстоянием 720 мм дал максимальное значение $\delta s = -0{,}011$ мм.

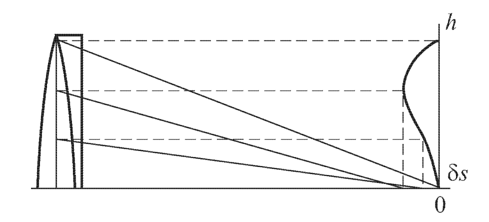


Рис. 13.3. Сферическая аберрация исправленной системы

Для исправления сферической аберрации зеркал (например, прожекторов) им обычно придают не сферическую форму, а вид параболоида вращения, располагая источник в фокусе; в таких зеркалах при тщательном их выполнении сферическую аберрацию можно сделать очень малой. Хорошо исправленными могут быть отражатели, обе поверхности которых сферические, но разной кривизны; задняя, посеребренная, имеет меньшую кривизну. Отраженный свет испытывает дополнительное преломление в стекле отражателя, который играет роль рассеивающей линзы (тоньше в середине), рассчитанной так, чтобы исправить аберрацию задней поверхности. Такие зеркала употребляются в настоящее время только в небольших сигнальных аппаратах (диаметром не свыше 100 мм).

б. К о м а. Если светящаяся точка, посылающая широкий пучок, находится не на оси системы, то каустика принимает более сложный

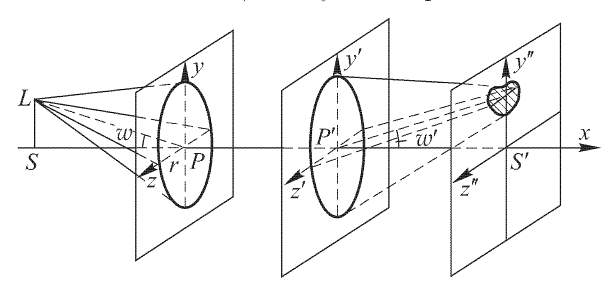


Рис. 13.4. Кома

вид. Покроем линзу экраном, в котором прорезана узкая щель в виде кольца большого диаметра с центром на оси. Светящаяся точка

L помещена вне оси. Широкий пучок, проходя через систему, дает на экране изображение L в виде довольно сложной асимметричной фигуры (рис. 13.4).

Устранив экран и заставив работать всю линзу, мы в качестве изображения точки получим неравномерно освещенное пятнышко, несколько напоминающее комету с хвостом. Отсюда произошло название этого вида аберрации (кома *κομα* — прядь волос; комета — волосатая звезда).

Нередко кома имеет и более сложный вид. Соответствующим подбором совокупности частей системы кома может быть значительно ослаблена.

§ 83. Аберрации, обусловленные тонкими внеосевыми наклонными пучками лучей

а. Астигматизм наклонных пучков. Если пучок лучей, исходящий из точки, падает на систему, составляя угол с осью, то он теряет гомоцентричность. Для того чтобы яснее представить себе характер искажения, наблюдающегося в этом случае, введем некоторые дополнительные обозначения. Плоскости, проходящие через ось системы, носят название *меридиональных* плоскостей. Предположим, что центральный луч элементарного пучка (ось пучка) находится в меридиональной плоскости. Тогда из такого пучка можно мысленно выделить плоскую ленточку лучей, лежащих в меридиональной плоскости и называемых *меридиональными*, или плоскую ленточку лучей, расположенных в перпендикулярной плоскости и называемых *сагиттальными* (рис. 13.5).

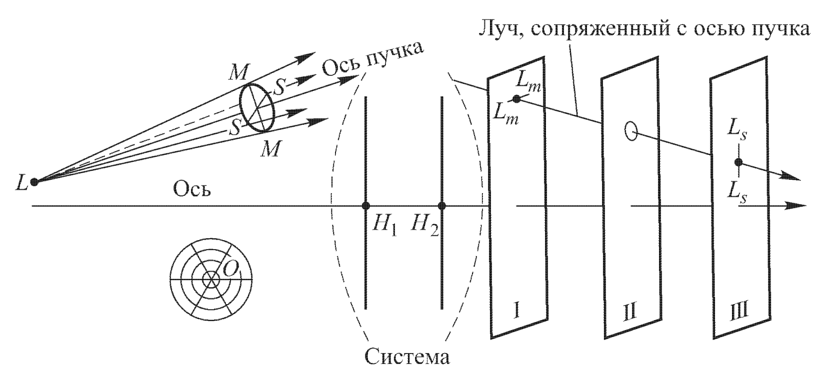


Рис. 13.5. Астигматизм наклонных пучков: LMM — меридиональное сечение, L_mL_m — меридиональная фокальная линия, LSS — сагиттальное сечение, L_sL_s — сагиттальная фокальная линия

Пучки при достаточном наклоне к оси не дают стигматического изображения точки L. Пучок после преломления имеет вид, подобный показанному на рис. 12.6. Изображением точки L служат две фокальные линии. Одна из них (L_sL_s, см. рис. 13.5) образуется в результате

преломления сагиттальных лучей и ориентирована в меридиональной плоскости; другая ($L_m L_m$), получающаяся при преломлении меридиональных лучей, ориентирована в перпендикулярной плоскости. Фокальные плоскости (I и III), в которых лежат эти два прямолинейных изображения, расположены на разных расстояниях от главной плоскости системы. Таким образом, и в этом случае точка L изображается кружком рассеяния, форма которого зависит от положения экрана. В плоскости I фигура рассеяния имеет вид отрезка прямой, лежащей перпендикулярно к меридиональной плоскости; в плоскости III фигура рассеяния вырождается в прямую, расположенную в меридиональной плоскости; в плоскости II, лежащей посредине между I и III, фигура рассеяния имеет вид круга; в промежуточных плоскостях — вид эллипсов различного эксцентриситета.

Если источником служит не точка, а отрезок линии, то изображение ее может быть вполне удовлетворительным в одной из плоскостей I или III в зависимости от ориентировки изображаемого отрезка. Изображения отрезков, расположенных в меридиональных плоскостях, будут резкими в плоскости III, где изображения каждой точки ориентированы в меридиональной плоскости, и следовательно, сольются в удовлетворительное изображение всей линии; отрезки в виде дуг (колец), лежащие в плоскости, перпендикулярной к оси (и следовательно, пересекающие все меридиональные плоскости под прямым углом), дадут по той же причине удовлетворительное изображение в плоскости I. Сетка, удобная для демонстрации описанных явлений, изображена в левом углу рис. 13.5. Расположив сетку так, чтобы точка O лежала на оси, мы получим в плоскости I более или менее удовлетворительное изображение концентрических окружностей, а в плоскости III — радиальных линий. Радиальные и круговые линии центральной части сетки изображаются одинаково резко в одной плоскости.

б. Искривление плоскости изображения. Изображение сетки, показанное на рис. 13.5, позволяет наблюдать одновременно с потерей стигматичности еще одну особенность, связанную с наклонными пучками. При определенном положении экрана резкость изображения разных колец (или резкость радиусов вдоль своей длины) может быть различна. Перемещая экран, мы можем улучшить изображение одних участков, ухудшая изображение других. Этот опыт показывает, что изображение представляет собой не плоскость, перпендикулярную к оптической оси, а изогнутую поверхность, причем степень изгиба для меридиональных пучков и для пучков сагиттальных различна. Рисунок 13.6 показывает характер этого искривления: QO — ось системы, MH_1 — оси наклонных пучков, OS — плоскость неискривленного изображения, соответствующая параксиальному пучку, OS_m и OS_s — искривленные поверхности изображения, обусловленные меридиональными и сагиттальными наклонными пучками соответственно. OS_m и OS_s, конечно, касаются линии OS в точке O, т.е. в параксиальной области.

Астигматизм системы исправляется путем специального подбора конструктивных элементов системы, т.е. радиусов поверхностей, по-

казателей преломления и расстояний между поверхностями. Одновременно с уничтожением астигматизма обычно стремятся устранить и искривление плоскости изображения, что особенно важно для фотографии, где требуется получение резкого изображения на плоской

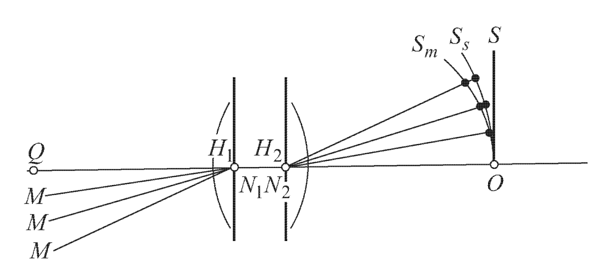


Рис. 13.6. Искривление плоскости изображения

светочувствительной поверхности. Хорошие фотографические объективы этого типа — анастигматы — имеют значительное поле зрения (свыше 50°) и дают плоское изображение.

в. Дисторсия изображений. Когда лучи, посылаемые предметом в систему, составляют большие углы с ее оптической осью, то изображение, даваемое даже узкими пучками лучей, может обнаруживать еще один вид искажения. Оно обусловлено тем, что увеличение V такой системы при больших углах зависит от угла между осями пучка и системы и, следовательно, меняется от центра изображения к периферии. Этот вид аберрации носит название *дисторсии* и ведет к тому, что изображения оказываются не подобными предмету. Типичные виды дисторсии (подушкообразная и бочкообразная) приведены на рис. 13.7.

Дисторсия обычно не очень вредит наблюдению, но становится очень опасной, если при помощи оптической системы производятся съемки, предназначенные для промеров (например, в геодезии или,

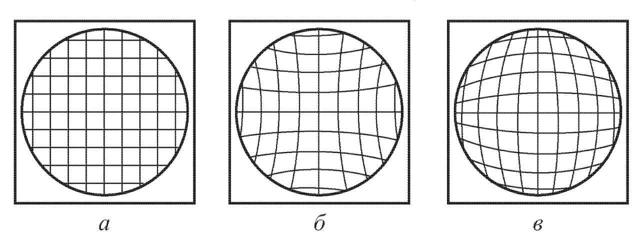


Рис. 13.7. Дисторсия изображения: *а* — неискаженное изображение, *б* — подушкообразная дисторсия, *в* — бочкообразная дисторсия

особенно, в аэрофотограмметрии). Поэтому объективы для таких работ очень тщательно исправляются на дисторсию. Так, например, хороший объектив, рассчитанный М.М. Русиновым, предназначенный для картографических аэросъемок, при поле зрения в 120° дает ошибку в определении направления на объект, не превышающую 10″.

§ 84. Астигматизм, обусловленный асимметрией системы

Очень важный для практики случай астигматизма наблюдается, когда симметрия системы по отношению к пучку нарушена в силу устройства самой системы. Представим себе пучок лучей, исходящий из L и собираемый линзой. На пути сходящегося пучка поместим *цилиндрическую линзу*, т.е. линзу, одно из сечений которой (например, вертикальное) прямоугольное, а второе — круговое. Таким образом, цилиндрическая линза имеет лишь две плоскости симметрии — вертикальную и горизонтальную, но лишена оси симметрии, которой обладает падающий световой пучок. При прохождении через такую систему осевая симметрия преломленного пучка также нарушится, и мы получим астигматическое изображение.

Характер астигматического пучка виден из рис. 13.8. Астигматический пучок при пересечении плоскостями, перпендикулярными к

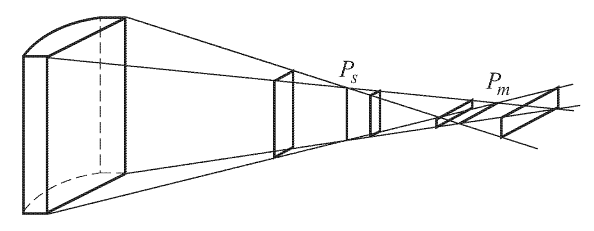


Рис. 13.8. Астигматизм цилиндрической линзы: P_s — сагиттальная фокальная линия, P_m — меридиональная фокальная линия. Если цилиндрическую линзу снабдить диафрагмой с круглым сечением, то прямоугольные сечения пучка заменяются соответствующими эллиптическими

оси, дает ряд прямоугольных сечений. В точках P_s и P_m эти прямоугольники переходят в прямые (фокальные линии), параллельные плоскостям симметрии системы.

Астигматизмом такого происхождения нередко обладает человеческий глаз, что проявляется в его неспособности видеть одинаково резко систему взаимно перпендикулярных полос на испытательных таблицах. Для исправления этого недостатка служат цилиндрические очки, компенсирующие природный астигматизм глаз.

Весьма отчетливо проявляется астигматизм при преломлении расходящегося пучка, падающего на плоскую границу (см. упражнение 108). Астигматизм проявляется также, когда на пути лучей помещена призма, которая тоже является оптической системой, не имеющей осевой симметрии. Таким образом, призма может нарушать гомоцентричность пучка. Это обстоятельство имеет большое значение при построении спектральных аппаратов. Теория показывает, что призма не вносит астигматизма, если она расположена в параллельном пучке лучей; при таком расположении исчезает и кома, вносимая призмой, если на нее падают сходящиеся или расходящиеся лучи. Когда лучи, падающие на призму, не параллельны, то астигматизм можно свести к минимуму, установив призму в положении минимального отклонения, хотя кома при этом не устраняется.

§ 85. Апланатизм. Условие синусов

Пусть для какой-нибудь точки S (рис. 13.9), лежащей на оптической оси, устранена сферическая аберрация, так что S отображается в S' резко, несмотря на применение широких пучков. Отсюда еще не следует, что небольшой участок поверхности σ, проходящий через S и перпендикулярный к оси, будет изображаться резко и без искажений. Для такого правильного изображения необходимо, чтобы различные зоны системы давали одно и то же *увеличение*. В противном случае точки участка, не лежащие на оси, будут изображаться различными частями нашего широкого пучка на различных расстояниях от оси, т.е. для этих внеосевых точек нашего элемента не будет сохраняться стигматичность изображения. Аббе нашел, что требование постоянства увеличения различными зонами системы выполняется, если удовлетворено следующее условие:

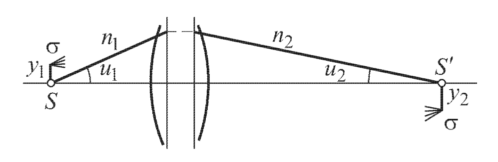


Рис. 13.9. Апланатические точки системы

$$\frac{n_1 \sin u_1}{n_2 \sin u_2} = \frac{y_2}{y_1} = V, \quad (85.1)$$

где n_1 и n_2 — показатели преломления среды со стороны объекта и изображения, $V = y_2/y_1$ — увеличение, которое должно, следовательно, оставаться постоянным для любой пары сопряженных лучей, исходящих из точки, лежащей на оси, и ограниченных углами u_1 и u_2 с осью системы.

На рис. 13.10 показано, что условие синусов Аббе есть следствие физического требования, согласно которому для получения резкого

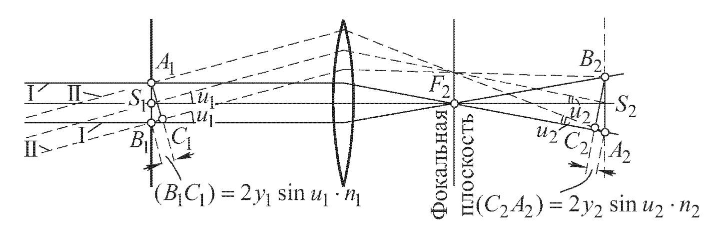


Рис. 13.10. К выводу условия синусов

изображения волны, идущие от объекта к изображению, должны проходить через разные зоны системы без разности фаз. Для простоты рассуждений выберем в качестве объекта небольшое отверстие диафрагмы радиуса $S_1A_1 = y_1$, освещаемое слева параллельными пучками. На рис. 13.10 представлены два таких пучка, дающих изображения диафрагмы через две различные зоны оптической системы: через центральную ее часть (пучок I, сплошные линии) и через периферийную область (пучок II, штриховые). Если пучки I и II отображают A_1B_1 с одинаковым увеличением, то изображение A_2B_2 будет резким; следовательно, A_2 и B_2 представляют собой точки, куда световые вол-

ны доходят через разные зоны системы в одной фазе. Точки A_1 и B_1, равно как и A_2 и B_2, лежат соответственно на поверхности волны, распространяющейся по направлению I, т.е. колебания в них находятся в одной фазе. Путь волны II от B_1 к B_2 имеет по сравнению с путем от A_1 к A_2 оптическую разность хода, равную

$$(B_1C_1) - (C_2A_2) = 2y_1 \sin u_1 \cdot n_1 - 2y_2 \sin u_2 \cdot n_2.$$

Для того чтобы и в пучке II колебания в точках A_2 и B_2 находились в одной фазе, необходимо выполнение условия

$$(B_1C_1) - (C_2A_2) = 0,$$

т.е.

$$2y_1 \sin u_1 \cdot n_1 = 2y_2 \sin u_2 \cdot n_2,$$

или

$$\frac{n_1 \sin u_1}{n_2 \sin u_2} = \frac{y_2}{y_1} = V$$

(условие синусов).

Из изложенного ясно, что при соблюдении условия синусов точки, лежащие вблизи оси, изображаются широкими пучками резко, т.е. у системы устранена аберрация комы (§ 82). При этом следует подчеркнуть, что угол u_1 может принимать большие значения, т.е. апертура пучка не ограничена, но величина y_1 предполагается малой.

Если среда по обе стороны системы одна и та же, например воздух, то $n_1 = n_2$, и условие синусов принимает вид

$$\frac{\sin u_1}{\sin u_2} = \frac{y_2}{y_1}. \qquad (85.2)$$

Две точки S и S', для которых устранена сферическая аберрация и соблюдено условие синусов, называются *апланатическими.*

На оси системы возможны не более трех пар апланатических точек [1]). Поэтому соблюдение апланатизма имеет особое значение для систем, где объект располагается всегда приблизительно около определенной точки. Такой системой является объектив микроскопа. Действительно, в микроскопе рассматриваемый объект малого размера всегда помещается вблизи фокальной плоскости объектива и посылает в объектив очень широкие пучки. Условие синусов и было сформулировано Аббе при исследовании путей улучшения объективов микроскопов.

Аббе указал также простой способ, позволяющий выяснить, в какой мере выполнено условие синусов. Для этой цели пробный рисунок (испытательный объект), изображенный на рис. 13.11, рассматривают сквозь систему глазом (или отображают на экран), расположенным в одной из апланатических точек системы A_2. Если условие синусов выполнено, то удается найти такое положение испытательного объекта за второй апланатической точкой A_1, при котором наблюдатель видит его изображение в виде прямоугольной сетки.

---

[1]) Исключение составляют лишь некоторые системы с угловым увеличением 1 (например, плоское зеркало), для которых все точки апланатические.

Испытав много микрообъективов, сделанных «наугад» старыми мастерами, Аббе обнаружил, что у всех хороших объективов условие синусов выполнено. Для малых углов u, когда можно положить $\sin u = u$, условие Аббе совпадает с теоремой Лагранжа–Гельмгольца (см. § 74) и, следовательно, всегда осуществляется. В случае же широких пучков для соблюдения условия синусов необходимо специальное осуществление оптической системы, причем условие это будет выполнено только для определенных пар точек.

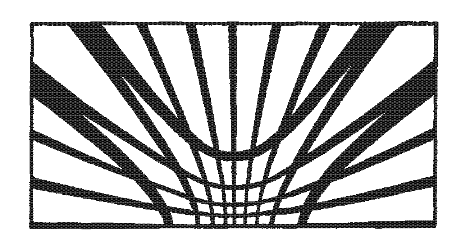


Рис. 13.11. Испытательный объект для проверки выполнения условия синусов

§ 86. Аберрации, обусловленные зависимостью показателя преломления от длины волны (хроматические аберрации)

а. З а в и с и м о с т ь п о к а з а т е л я п р е л о м л е н и я о т ц в е т а. При всех предшествующих построениях лучевой оптики мы считали показатель преломления величиной постоянной, тогда как в действительности он зависит от цвета, т.е. от длины волны света.

Первые экспериментальные исследования этой зависимости принадлежат Ньютону, который произвел (1672 г.) знаменитый опыт с разложением белого света на цвета (спектр) при преломлении в призме. Наблюдение преломления в призме и доныне остается одним из удобных способов определения показателя преломления вещества призмы и изучения зависимости показателя преломления от цвета (дисперсия).

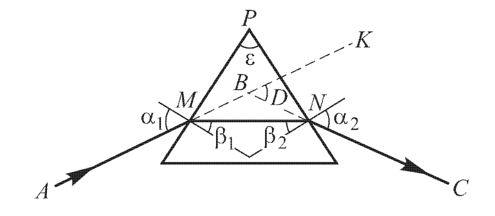


Рис. 13.12. Преломление в призме

1. *Преломление в призме.* Пусть преломляющий угол призмы равен ε (рис. 13.12); угол отклонения луча $\angle KBC = D$. Из треугольника MBN имеем

$$D = \alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) - (\beta_1 + \beta_2);$$

из треугольника MNP находим

$$\varepsilon = \beta_1 + \beta_2.$$

Поэтому

$$D = \alpha_1 + \alpha_2 - \varepsilon.$$

При симметричном ходе лучей ($\alpha_1 = \alpha_2$) угол D принимает мини-

мальное значение (см. упражнение 112). В этом случае

$$n = \frac{\sin [(D_{\min} + \varepsilon)/2]}{\sin (\varepsilon/2)}\,. \tag{86.1}$$

Последнее соотношение обычно применяется для определения n по измеренным с помощью гониометра углам ε и $D_{\min}$.

Мы рассматривали ход лучей, плоскость падения которых перпендикулярна к ребрам призмы; эта плоскость носит название *главного сечения* призмы. Если лучи падают под углом к главному сечению, то они преломляются тем сильнее, чем больший угол составляет плоскость падения с главным сечением.

2. *Зависимость n от λ (дисперсия).* В прозрачных средах показатель преломления n растет с уменьшением длины волны λ. Для прозрачных тел зависимость (в видимой части спектра) имеет вид

$$n_\lambda = a + \frac{b}{\lambda^2} + \frac{c}{\lambda^4} + \ldots \tag{86.2}$$

Для многих тел можно ограничиться соотношением

$$n_\lambda = a + \frac{b}{\lambda^2} \tag{86.3}$$

(формула Коши); a, b, c, ... — постоянные, характеризующие вещество. Для окрашенных тел формула Коши теряет силу, нарушается даже ход зависимости n от λ (см. гл. XXVIII).

Мерой дисперсии служит разность показателей преломления $(n_{\lambda_1} - n_{\lambda_2})$ для различных значений λ_1 и λ_2. Преломление характеризуют обычно значением показателя преломления для $\lambda = 589{,}3$ нм (среднее из длин волн двух близких желтых линий натрия), обозначая его символом n_D. Мерой дисперсии служит *средняя дисперсия*, определяемая как разность

$$n_F - n_C,$$

где n_F — относится к $\lambda = 486{,}1$ нм (синяя линия водорода, F), а n_C — к $\lambda = 656{,}3$ нм (красная линия водорода, C).

Нередко преломляющее вещество характеризуют величиной *относительной дисперсии*, под которой понимают отношение

$$\frac{n_F - n_C}{n_D - 1}\,,$$

где n_D относится к $\lambda = 589{,}3$ нм. В практических каталогах обычно фигурирует величина, обратная относительной дисперсии, т.е.

$$\nu = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C}$$

— так называемый *коэффициент дисперсии* или *число Аббе*. Вещества с малой дисперсией характеризуются большим значением ν (например, для флюорита $\nu = 95$); вещества с большой дисперсией имеют малое ν (для тяжелых сортов стекла $\nu = 20$). Обычно (*но не всегда*) дисперсия растет вместе со средним значением показателя преломления.

Для стекол возрастание дисперсии идет обычно параллельно с увеличением удельного веса стекла. Тяжелые сорта стекол (флинты) характеризуются большой дисперсией, легкие (кроны) — малой. В настоящее время имеется очень много разных сортов стекол (см. упражнение 114).

б. Ахроматические призмы и призмы прямого зрения. Пользуясь различием в дисперсии, можно скомпенсировать хроматизм, не уничтожая преломления (ахроматические призмы), и уменьшить или полностью скомпенсировать для одного из лучей отклонение, не уничтожая дисперсии (сложные призмы и призмы прямого зрения). Устройство таких призм показано на рисунках 13.13–13.15.

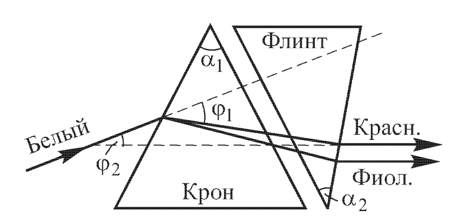


Рис. 13.13. Ахроматическая пара призм

У ахроматической призмы дисперсия компенсирована, отклонение, хотя и уменьшенное, $\varphi_2 - \varphi_1$, осталось (см. рис. 13.13). У сложной спектральной призмы, изображенной на рис. 13.14, дисперсия остается очень значительной благодаря большому преломляющему углу внутренней призмы из флинта; отклонение

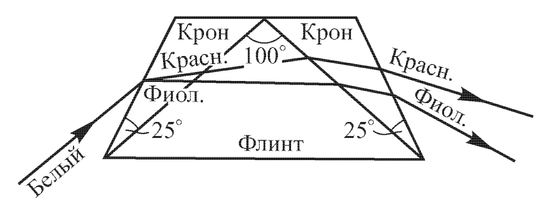


Рис. 13.14. Сложная спектральная призма

же вследствие сравнительно небольшого угла между внешними гранями уменьшено по сравнению с простыми трехгранными призмами. Наличие накладок из крона позволяет увеличивать преломляющий угол внутренней призмы, который лимитируется явлением полного внутреннего отражения.

Призма прямого зрения показана на рис. 13.15. Соответствующим подбором углов α_1 и α_2 и показателей преломления n_1 и n_2 можно добиться, чтобы какой-либо луч, соответствующий определенной длине

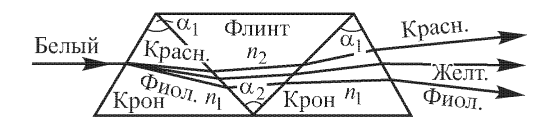


Рис. 13.15. Спектральная призма прямого зрения

волны, проходил без преломления (см. упражнение 113), а дисперсия осталась значительной.

в. Хроматическая аберрация и ахроматизация линз. Фокусное расстояние линзы определяется соотношением

$$\frac{1}{f} = (N - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right), \tag{86.4}$$

где N — относительный показатель преломления.

Таким образом, f для данной линзы (т.е. для определенных R_1 и R_2) тем меньше, чем больше N; отсюда возникает хроматическая аберрация положения, или *продольная хроматическая аберрация*, т.е. искажение, в силу которого даже для параксиальных лучей немонохроматический пучок имеет целую совокупность фокусов вдоль отрезка оси O_1O_2 (рис. 13.16, сильно утрирован). В соответствии с этим точка на оси изображается цветными кружками, относительные размеры

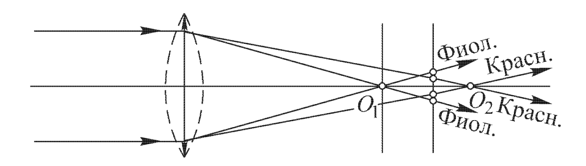


Рис. 13.16. Хроматическая аберрация простой линзы

которых зависят от местоположения экрана. Чем меньше дисперсия стекла, тем меньше продольная хроматическая аберрация O_1O_2.

Ньютон на основании своих опытов ошибочно полагал, что величина относительной дисперсии, входящая в расчет ахроматизированной системы, не зависит от материала линз, и пришел отсюда к выводу о невозможности построения ахроматических линз. В соответствии с этим Ньютон считал, что для астрономической практики большое значение должны иметь рефлекторы, т.е. телескопы с отражательной оптикой. Однако Эйлер, основываясь на отсутствии заметной хроматической аберрации для глаза[1]), высказал мысль о существовании необходимого разнообразия преломляющих сред и рассчитал, каким образом можно было бы коррегировать хроматическую аберрацию линзы. Доллон построил (1757 г.) первую ахроматическую трубу. В настоящее время имеются десятки сортов стекол с разными показателями преломления и разной дисперсией, что дает очень широкий простор расчету ахроматических систем. Труднее обстоит дело с ахроматизацией систем, предназначенных для ультрафиолетового света, ибо разнообразие веществ, прозрачных для ультрафиолета, ограничено. Удается все же строить ахроматические линзы, комбинируя кварц и флюорит или кварц и каменную соль.

Обычное устройство простой ахроматической линзы показано на рис. 13.17. К двояковыпуклой линзе из крона присоединяется (приклеивается) соответствующим образом рассчитанная рассеивающая линза из флинта (см. упражнение 114). Добавочная линза удлиняет фокусные расстояния первой линзы. При этом больше увеличивается

[1]) Впрочем, хроматическая аберрация глаза не так мала (ср. § 91).

фокусное расстояние лучей, сильнее преломляемых (короткой длины волны), так что фокус $O_{ф}$ отодвигается больше, чем фокус $O_{кр}$. Выбирая соответствующим образом параметры, мы заставляем *совпадать* фокусы двух (или даже трех) длин волн. Однако при современных сортах стекол не удается добиться совпадения фокусов для всех видимых лучей, в результате чего возникает остаточный хроматизм, называемый *вторичным спектром*. Для тонких линз совпадение положения фокуса для разных длин волн означает также уравнивание фокусных расстояний, т.е. полную ахроматизацию. Для

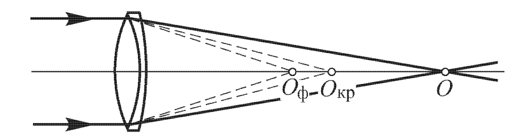


Рис. 13.17. Ахроматическая линза

толстых же линз (систем) совпадение фокусов еще не означает совпадения фокусных расстояний, ибо последние отсчитываются от главных плоскостей, положения которых для разных длин волн могут быть различными. А различия в величине фокусных расстояний означают различие в увеличении для разных длин волн, вследствие чего предметы конечных размеров дают изображения с цветной каймой. Эта вторая хроматическая ошибка носит название *хроматической разности увеличений*, и для ее устранения необходим специальный расчет. Системы, у которых исправлены обе хроматические погрешности для всех расстояний объекта, носят название *стабильно ахроматизированных*.

Ахроматизация для визуальных наблюдений (труба) выполняется так, что совпадают фокусы красного и синего лучей ($\lambda_C = 656{,}3$ нм, и $\lambda_F = 486{,}1$ нм); ахроматизация систем, предназначенных для фотографирования (фотографические объективы), выполняется с расчетом соединения фокусов для длин волн $\lambda_{G'} = 434{,}1$ и $\lambda_D = 589{,}3$ нм, сильно действующих на сенсибилизированную фотографическую пластинку.

Аббе (1886 г.) ввел для микроскопии *апохроматы*, т.е. объективы, где соединены фокусы для трех сортов лучей и вместе с тем устранена сферическая аберрация для разных цветов (уничтожена *хроматическая разность сферической аберрации*, называемая обычно *сферохроматической аберрацией*). Апохроматы Аббе имеют большие преимущества перед ахроматами, где коррегированы два сорта лучей. Остающаяся в апохроматах хроматическая разность увеличений устраняется в микроскопе путем применения специальных окуляров (компенсационные окуляры).

Из изложенного ясно, что устранение многочисленных аберраций возможно лишь путем устройства специально рассчитанных сложных оптических систем. Однако одновременное исправление всех недостатков может оказаться крайне сложной и даже неразрешимой задачей. Поэтому нередко идут на компромисс, рассчитывая оптику, пред-

назначенную для определенной цели. При этом устраняют те недостатки, которые особенно опасны для поставленной задачи, и мирятся с неполным устранением других.

Так, для объективов астрономических труб, где источником служат точки, расположенные вблизи оси, важно соблюдение условий синусов и устранение сферической и хроматической аберраций для точек в центре поля; для микрообъективов и фотообъективов, предназначенных для фотографирования широкого поля зрения, необходимо, кроме соблюдения условия синусов, устранение аберраций, искажающих поле (дисторсия, искривление поля и т.д.), а также хроматической аберрации. Объективы, предназначенные для наблюдения объектов малой яркости, должны иметь возможно большее относительное отверстие, и это вынуждает мириться с некоторыми аберрациями, неизбежными при работе с очень широкими пучками. Исправление хроматизма в приборах, предназначенных для визуальных наблюдений и для фотографии, рассчитано на разные спектральные области применительно к тому обстоятельству, что максимум чувствительности глаза лежит в желто-зеленой части спектра, а чувствительность фотопластинок обычно сдвинута в более коротковолновую область. Объектив коллиматора спектрального аппарата должен быть очень хорошо исправлен на хроматическую аберрацию, тогда как объектив камеры может быть совсем не ахроматизован, но в нем весьма вредны астигматизм наклонных пучков и кома; впрочем обычно оптика спектрографа рассчитывается как целое, так что недостаток одной ее части в большей или меньшей степени компенсируется за счет другой части.

Глава XIV

ОПТИЧЕСКИЕ ИНСТРУМЕНТЫ

§ 87. Роль диафрагм

Реальные оптические системы дают удовлетворительное изображение только при известном ограничении ширины действующих пучков лучей. Но даже и для идеальных систем, которые могли бы давать правильные изображения плоского предмета при любом угле раскрытия пучков, их ограничение имеет существенное значение.

Любая оптическая система — глаз вооруженный и невооруженный, фотографический аппарат, проекционный аппарат — в конечном счете рисует изображение практически на плоскости (экран, фотопластинка, сетчатка глаза); объекты же в большинстве случаев трехмерны. Однако даже идеальная система, не будучи ограниченной, не давала бы изображений трехмерного объекта на плоскости. Действительно, отдельные точки трехмерного объекта находятся на различных расстояниях от оптической системы, и им соответствуют *различные* сопряженные плоскости. Светящаяся точка O (рис. 14.1) дает резкое изображение O' в плоскости MM, сопряженной с EE. Но точ-

ки A и B дают резкие изображения в A' и B', а в плоскости MM проецируются светлыми кружками, размер которых зависит от *ограничения* ширины пучков. Если бы система не была ничем ограничена, то пучки от A и B освещали бы плоскость MM равномерно, т.е. не получилось бы никакого изображения предмета, а лишь изображение отдельных точек его, лежащих в плоскости EE.

Чем у́же пучки, тем отчетливее изображение пространственного предмета на плоскости. Точнее, на плоскости изображается не сам пространственный предмет, а та *плоская картина*, которая является

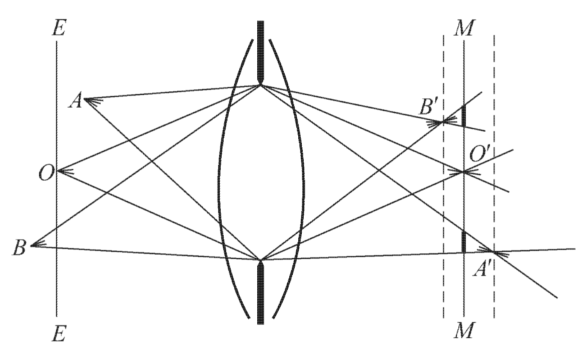


Рис. 14.1. Влияние диафрагмы на глубину резкого изображения

проекцией предмета на некоторую плоскость EE (плоскость установки), сопряженную относительно системы с плоскостью изображения MM. Центром проекции служит одна из точек системы (центр входного зрачка оптического инструмента).

§ 88. Апертурная диафрагма, входной и выходной зрачки

Таким образом, наличие ограничивающих диафрагм, роль которых может играть край (оправа) линзы, существенно для всякого оптического инструмента: от величины и положения диафрагм зависят отчетливость изображения, правильность рисунка и светосила инструмента.

Ограничение пучков в оптических системах, вообще говоря, различно для лучей, идущих от разных точек предмета. Рассмотрим сначала ограничение пучков от осевых точек предмета. Диафрагма, которая ограничивает пучок действующих лучей, исходящих из точки объекта, расположенной на оси системы, носит название *апертурной диафрагмы*. Как уже указывалось, ее роль может выполнять оправа какой-либо линзы или специальная диафрагма BB, если эта диафрагма сильнее ограничивает пучки света, чем оправы линз (рис. 14.2). Апертурная диафрагма BB нередко располагается между отдельными компонентами (линзами) сложной оптической системы, но ее можно поместить и перед системой или после нее.

Если BB — действительная апертурная диафрагма (см. рис. 14.2), а B_1B_1 и B_2B_2 — ее изображения в передней и задней частях систе-

мы, то все лучи, прошедшие через BB, пройдут через B_1B_1 и B_2B_2 и наоборот, т.е. любая из диафрагм BB, B_1B_1, B_2B_2 ограничивает

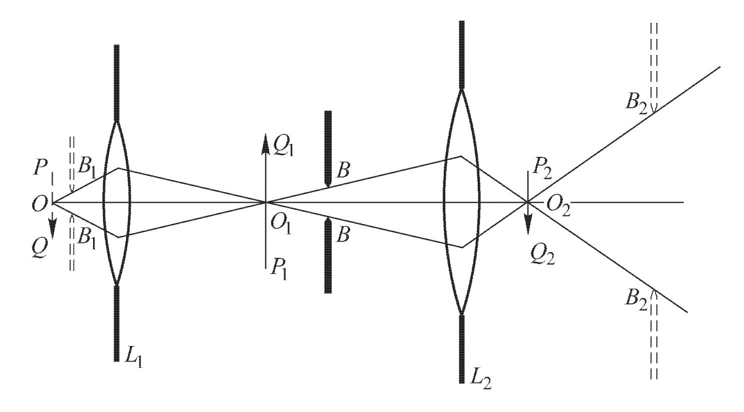


Рис. 14.2. Ограничение пучков от осевых точек предмета: BB — апертурная диафрагма, B_1B_1 — входной зрачок, B_2B_2 — выходной зрачок системы

активные пучки. Действительно, луч, прошедший через край B_1, обязательно пройдет через соответствующий край B, ибо эти точки сопряжены.

Входным зрачком называется то из действительных отверстий или их изображений, которое сильнее всего ограничивает входящий пучок, т.е. видно под наименьшим углом из точки пересечения оптической оси с плоскостью предмета. *Выходным зрачком* называется отверстие или его изображение, ограничивающее выходящий из системы пучок. Очевидно, входной и выходной зрачки являются сопряженными по отношению ко всей системе.

Роль входного зрачка может играть то или иное отверстие (оправа оптики, специальная диафрагма) или его изображение (действительное или мнимое). В некоторых важных случаях изображаемый предмет есть освещенное отверстие (например, щель спектрографа), причем освещение обеспечивается непосредственно источником света, расположенным недалеко от отверстия, или при помощи вспомогательного конденсора. В таком случае в зависимости от расположения роль входного зрачка может играть граница источника (рис. 14.3) или его изображения (рис. 14.4), или граница конденсора (рис. 14.5) и т.д.

Если апертурная диафрагма лежит перед системой, то она совпадает со входным зрачком, а выходным зрачком явится ее изображение в этой системе (рис. 14.5). Если она лежит сзади системы, то она совпадает с выходным зрачком, а входным зрачком явится ее изображение в системе. Если апертурная диафрагма BB лежит внутри системы (см. рис. 14.2), то ее изображение B_1B_1 в передней части системы служит входным зрачком, а изображение B_2B_2 в задней части системы — выходным. Угол, под которым виден радиус входного зрачка из точки пересечения оси с плоскостью предмета, называется

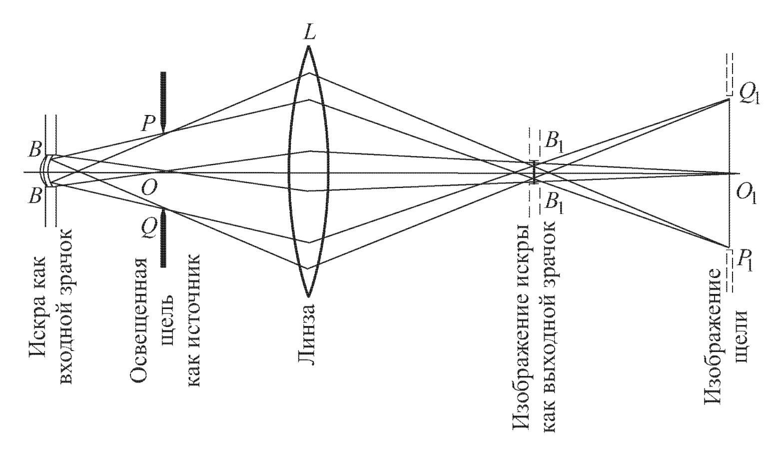


Рис. 14.3. Граница источника света играет роль входного зрачка системы

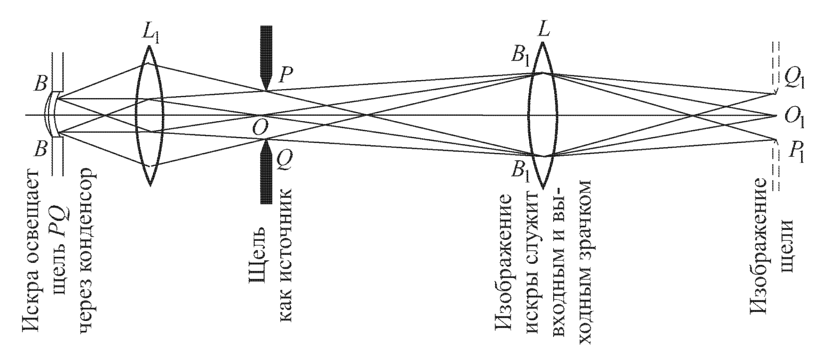


Рис. 14.4. Граница изображения источника света играет роль входного и выходного зрачков системы

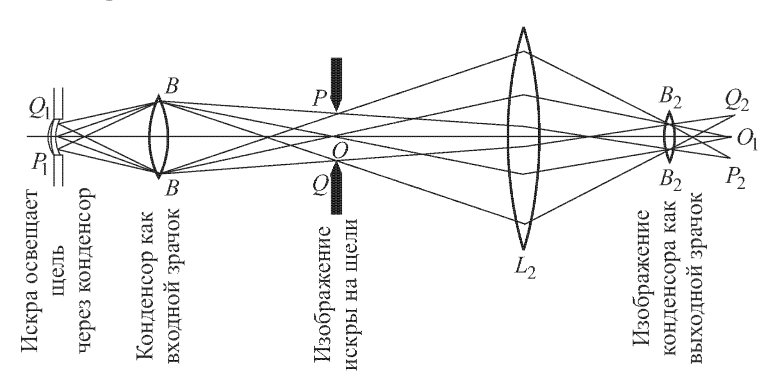


Рис. 14.5. Граница конденсорной линзы играет роль входного зрачка системы

«апертурным углом», а угол, под которым виден радиус выходного зрачка из точки пересечения оси с плоскостью изображения, есть угол *проекции* или *выходной апертурный угол.*

§ 89. Диафрагма поля зрения. Люки

Апертурная диафрагма, а следовательно, и выходной и входной зрачки определяют ширину (отверстие) активных пучков, т.е. влияют на резкость изображения и светосилу инструмента. Однако *не от всякой точки* предмета лучи, прошедшие через входной зрачок, пройдут через оптическую систему и, следовательно, изобразятся ею. Действительно, пучок от точки M (рис. 14.6) целиком минует переднюю

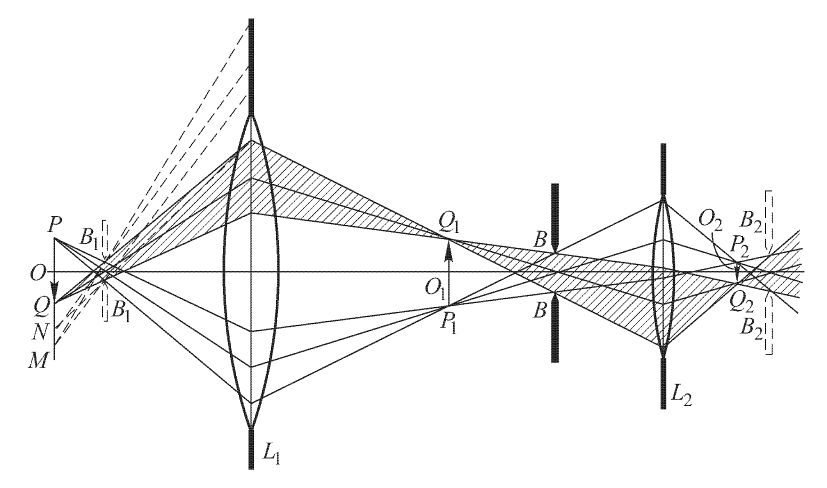


Рис. 14.6. Ограничение пучков лучей от внеосевых точек предмета

линзу системы, и точка M не будет ею изображена. Пучок от точки N частично пройдет через систему и даст изображение, но освещенность его будет уменьшена, ибо часть пучка задержится оправой линзы L_1 (*виньетирование*). От точки же Q через систему пройдет пучок такой же ширины, как и от осевой точки O.

В рассмотренном случае поле зрения системы было ограничено оправой передней линзы L_1; в других случаях ограничение поля зрения создается другими частями системы или специальной *диафрагмой поля зрения.* Поле зрения определится контуром передней линзы или контуром изображения какой-либо из диафрагм в зависимости от того, какой из них виден из центра входного зрачка под наименьшим углом. Этот контур, реальный или изображенный, носит название *входного окна* или *люка* (S_1S_1 на рис. 14.7), а диафрагма, изображением которой он является, и будет служить диафрагмой поля зрения (SS на рис. 14.7).

Изображение входного люка в оптической системе называют *выходным люком* (S_2S_2).

Лучи, проходящие через центр апертурной диафрагмы, носят название *главных лучей*. Главный луч проходит и через центры входного и выходного зрачков, ибо эти точки сопряжены с центром апертурной диафрагмы.

Главный луч является осью конуса лучей, опирающегося на входной зрачок и имеющего вершину в точке предмета (заштрихованная область на рис. 14.6). Если главный луч от внеосевой точки предмета касается края входного люка, то через систему пройдет примерно половина лучей в сравнении с пучком от осевой точки. Из рис. 14.7

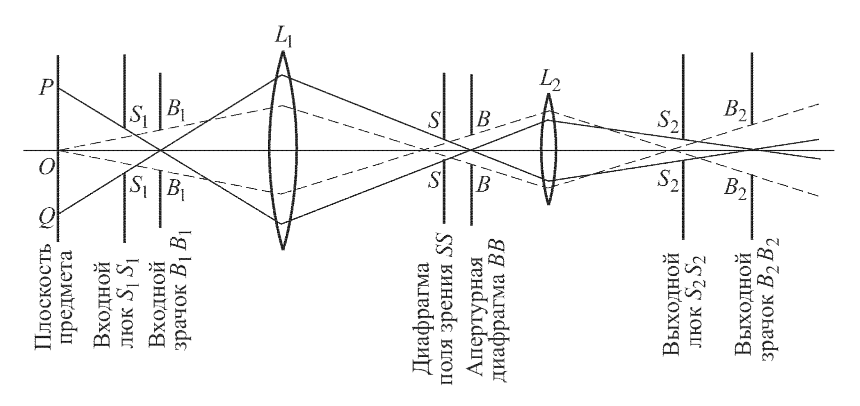


Рис. 14.7. Диафрагма поля зрения SS, входной S_1S_1 и выходной S_2S_2 люки системы

видно, что входной люк S_1S_1 задержит все лучи от точки P, которые в его отсутствие прошли бы через верхнюю половину входного зрачка B_1B_1. Поэтому освещенность изображения точки P будет примерно в два раза меньше освещенности вблизи изображения осевой точки. Следовательно, главные лучи, касающиеся краев входного люка (на рис. 14.7 они изображены сплошными линиями), определяют величину поля зрения (PQ).

Для резкого ограничения поля необходимо, чтобы S_1S_1 совпадало с плоскостью объекта, т.е. SS лежало в плоскости, сопряженной с объектом относительно L_1; в частности, для труб, предназначенных для рассмотрения далеких объектов, SS должно лежать в главной фокальной плоскости объектива L_1.

Перейдем теперь к рассмотрению важнейших оптических инструментов. *Оптическим инструментом* называется сочетание линз, зеркал, диафрагм и других вспомогательных частей, предназначенное для решения той или иной задачи.

§ 90. Фотографический аппарат

Фотообъектив и камера аппарата конструируются так, чтобы можно было получить резкое изображение предметов, находящихся на том или ином расстоянии от объектива, в плоскости светочувствительной

пластинки или пленки. Для наводки применяются разные приспособления (перемещение объектива или его отдельных частей, перемещение пластинки). Уменьшение апертурной диафрагмы позволяет улучшить «глубину» фокусировки, т.е. резко отобразить на плоскость различно удаленные части объекта (см. § 87). Изменение апертурной диафрагмы служит в то же время для изменения количества света, поступающего в аппарат (светосила). Обычно в фотоаппарате получается уменьшенное изображение объекта; в современных аппаратах стремятся к получению хорошей резкости с тем, чтобы иметь возможность последующего увеличения снимка.

Объективы непрерывно совершенствуются в смысле сочетания хороших качеств изображения со светосилой, т.е. возможно большей *освещенностью* изображения. Освещенность изображения равна световому потоку, деленному на площадь изображения, т.е. для удаленных объектов пропорциональна *площади* апертурной диафрагмы, деленной на *квадрат* фокусного расстояния объектива. Это отношение и называется *светосилой* объектива. Нередко светосилой называют отношение *диаметра* максимальной диафрагмы к фокусному расстоянию и считают освещенность пропорциональной квадрату светосилы. Правильнее называть это отношение *относительным отверстием*. Таким образом, светосила измеряется квадратом относительного отверстия.

§ 91. Глаз как оптическая система

Глаз по своему устройству (рис. 14.8) является в известном смысле аналогом фотоаппарата. Роль объектива играет совокупность преломляющих сред, состоящих из водянистой влаги A, хрусталика L и стекловидного тела Q.

Наводка на различно удаленные предметы, носящая название *аккомодации*, достигается путем мышечного усилия, изменяющего кривизну хрусталика. Пределы расстояний, на которые возможна аккомодация, носят название *дальней* и *ближней* точек. Для нормального глаза дальняя точка, фиксируемая без усилий, лежит в бесконечности, а ближняя — на расстоянии, зависящем от возраста (от 10 см для двадцатилетних до 22 см к сорока годам). В более пожилом возрасте пределы аккомодации сужаются еще более (старческая дальнозоркость). Нередко встречаются глаза с ненормальными пределами аккомодации уже в молодом

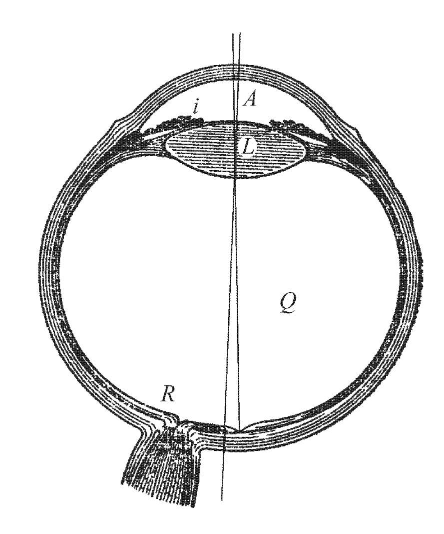


Рис. 14.8. Схематический разрез глаза

возрасте: близорукие, для которых дальняя точка лежит на конечном расстоянии, иногда на очень небольшом, и дальнозоркие, с увеличенным расстоянием до ближней точки. Эти недостатки могут быть исправлены применением дополнительных линз, рассеивающих или собирательных (очки).

На рис. 14.9 заштрихованные места показывают, как расположены области, ясно различаемые глазом в пределах доступной ему аккомодации, т.е. области от ближней точки A_p до дальней точки A_r. Нормальный глаз в состоянии аккомодировать область от $A_p = 10 - 22$ см

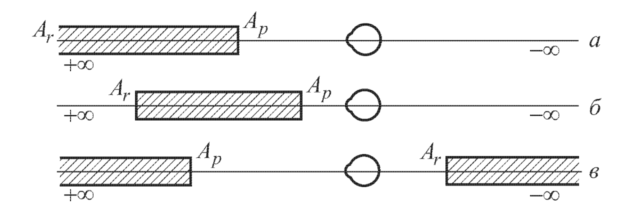


Рис. 14.9. Ближние A_p и дальние A_r точки аккомодации для глаза нормального (*а*), близорукого (*б*) и дальнозоркого (*в*)

до бесконечности. Для близорукого глаза область аккомодации приближена и ограничена на своей дальней границе. Для дальнозоркого глаза начало области аккомодации отодвинуто, а дальняя точка лежит на *отрицательном расстоянии*, т.е. за глазом. Это значит, что дальнозоркий глаз способен рассматривать *мнимые точки*, т.е. сводить на сетчатую оболочку не только параллельные, но и сходящиеся пучки. Таким образом, оптическая сила близорукого глаза больше, а дальнозоркого меньше, чем нормального.

Апертурная диафрагма осуществляется в глазу радужной оболочкой i (*ирис*) (см. рис. 14.8), определяющей «цвет глаза» и обладающей отверстием переменной величины (зрачок глаза). Изображение зрачка в передней оптической части глаза (камера с водянистой влагой) определяет собой входной зрачок; он почти совпадает с реальным зрачком. Изменение диаметра зрачка играет ту же роль, что изменение апертурной диафрагмы в фотообъективе: регулирует доступ света в глаз и изменяет глубину фокусировки. Фотографической пластинке аппарата соответствует *сетчатая оболочка* глаза R, сложное устройство и функции которой описаны ниже (см. § 193).

Для многих чисто оптических задач преломляющая система глаза может быть заменена *приведенным глазом*, построенным из однородного прозрачного вещества и имеющим следующие постоянные (по Гульстранду):

Преломляющая сила в диоптриях	58,48
Длина глаза	22 мм
Радиус кривизны преломляющей поверхности	5,7 мм
Показатель преломления среды	1,33
Радиус кривизны сетчатки	9,7 мм

Так как изображение в глазу получается внутри среды, отличной от воздуха, то переднее и заднее фокусные расстояния глаза не равны между собой (17,1 и 22,8 мм) и, следовательно, узловые точки глаза не совпадают с главными. Впрочем, ввиду близости всех этих точек их можно практически объединить в *оптический центр* глаза.

Здоровый глаз в общем можно рассматривать как центрированную систему поверхностей вращения. Строго говоря, это не очень совершенная система, ибо в ней ясно выражены и сферическая аберрация, и астигматизм наклонных пучков, и значительная хроматическая аберрация. Однако все эти недостатки очень мало чувствуются благодаря ряду особенностей глаза. Так, сферическая аберрация не очень заметна, потому что распределение освещенности в пятнах рассеяния неравномерно, а самая светлая и самая важная для зрительного ощущения часть пятна очень мала; при сильном же освещении, когда боковые части кружка рассеяния могли бы дать себя знать, сильно уменьшается диаметр зрачка, что улучшает дело. Астигматизм наклонных пучков почти незаметен, ибо способность сетчатки к хорошему распознаванию быстро понижается от центра к краям; поэтому изображение каждой фиксируемой точки бессознательно приводится на ось глаза, проходящую через самую выгодную часть сетчатки («центральная ямка», см. § 193). Недостаточность поля зрения этой малой рабочей части превосходно компенсируется подвижностью глаза. Хроматическая аберрация практически незаметна, потому что глаз очень чувствителен лишь к сравнительно узкой части спектра.

Комбинация указанных факторов приводит к тому, что нормальный глаз позволяет очень хорошо судить о внешнем виде предметов. Однако вследствие характера структуры сетчатой оболочки, состоящей из отдельных элементов, глаз воспринимает как единую две точки объекта, если они настолько близки, что обе изображаются на одном элементе сетчатки (*колбочке*). Таким образом, участок предмета,

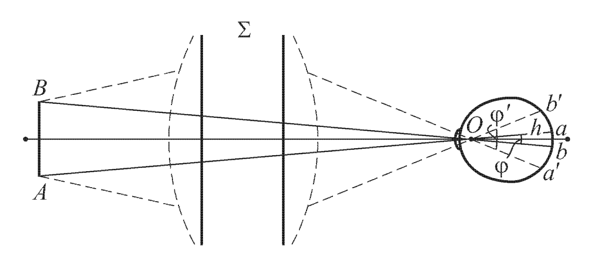


Рис. 14.10. Действие оптической системы на видимый угловой размер изображения: O — оптический центр глаза; h — глубина глаза; AB — предмет; ab — его изображение в невооруженном глазу; φ — угол зрения невооруженного глаза; $a'b'$ — изображение предмета в глазу, вооруженном оптической системой Σ; φ' — угол зрения вооруженного глаза

изображение которого лежит внутри границ, определяемых структурой сетчатки, воспринимается как точка (так называемая *физиологическая* точка), и никакое распознавание деталей в пределах этого

участка невозможно. Величина такого участка зависит, конечно, от расстояния объекта до глаз и может быть определена *углом зрения*, обусловливающим соответственный размер изображения (рис. 14.10), ибо диаметр изображения $ab = \varphi h$, где φ — угол зрения, h — глубина глаза (от оптического центра O до сетчатки), равная для среднего глаза 15 мм. Минимальный угол зрения, необходимый для различения деталей, носит название *физиологического предельного угла* и равен для невооруженного глаза приблизительно *одной минуте*. Однако такое значение угла разрешения деталей невооруженным глазом имеет место при условии, что наблюдаемый объект хорошо освещен.

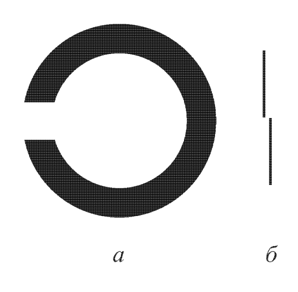


Рис. 14.11. Тест-объекты для исследования остроты зрения: *а* — кружок Ландольта, *б* — объект для испытания повышенной разрешающей силы глаза

Обычно испытание разрешающей способности глаза производится с помощью тест-объекта, имеющего вид, показанный на рис. 14.11 *а* (кружок Ландольта). Углом разрешения считается тот угол, под которым виден разрыв, еще отчетливо устанавливаемый испытуемым. За единицу остроты зрения принимают остроту зрения, которой соответствует угол разрешения в $1'$. Острота зрения равна $1/2$, если минимальный разрешаемый угол равен $2'$, и т.д. Зависимость угла разрешения от освещенности тест-объекта для нормального глаза приведена в табл. 14.1. Из нее видно, что при хорошей освещенности (свыше 100 лк) острота зрения нормального глаза несколько больше единицы.

Таблица 14.1

Зависимость угла разрешения от освещенности для нормального глаза

Освещенность фона, лк	Угол разрешения, мин	Освещенность фона, лк	Угол разрешения, мин
0,0001	50	0,5	2
0,0005	30	1	1,5
0,001	17	5	1,2
0,005	11	10	0,9
0,01	9	100	0,8
0,05	4	500	0,7
0,1	3	1000	0,7

Таким образом при малых освещенностях разрешающая способность глаза может быть гораздо хуже $1'$ и доходить до 1°.

Приближая предмет к глазу, мы уменьшаем ту часть предмета, которая вырезается предельным физиологическим углом, и, следовательно, получаем возможность различать более мелкие детали. Однако приближение объекта ограничено способностью к аккомодации,

и для нормального глаза наиболее удобным оказывается расстояние 25 см (*расстояние наилучшего зрения*). Делая усилие, нормальный молодой глаз может рассматривать предмет и с расстояния до 10 см. Близорукий глаз допускает уменьшение этого расстояния и поэтому может различать более мелкие детали. Дальнозоркий глаз, в частности глаз пожилых людей, затрудняется в различении деталей (например, чтение).

Дальнейшее улучшение распознавания деталей возможно с помощью оптических приборов, дающих совместно с глазом изображение на сетчатке. Отношение длин этого изображения на сетчатке в случае вооруженного и невооруженного глаза и называется видимым *увеличением* оптического инструмента. Согласно рис. 14.10 оно равно отношению $\operatorname{tg}\varphi'/\operatorname{tg}\varphi$, где φ' и φ — соответственно углы зрения, под которыми предмет виден через инструмент и без него.

§ 92. Оптические инструменты, вооружающие глаз

а. Лупа — простая система (одна или несколько линз) с небольшим фокусным расстоянием (примерно от 100 до 10 мм), располагаемая между рассматриваемым предметом и глазом. Мнимое увеличенное изображение предмета получается на расстоянии наилучшего зрения (250 мм для нормального глаза) или в бесконечности, т.е. рассматривается глазом без усилия аккомодации. При обоих способах применения лупы видимое увеличение, ею даваемое, практически одно и то же и равно

$$\mathscr{N} = \frac{\operatorname{tg}\varphi'}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{D}{f} \tag{92.1}$$

(см. упражнение 115), где D — расстояние наилучшего зрения и f — фокусное расстояние лупы. Так как $D = 250$ мм, то обычно применяемые лупы дают увеличение от 2,5 до 25 раз. Для близорукого глаза D меньше и, следовательно, лупа оказывает меньшую помощь в распознавании деталей.

б. Микроскоп. Для получения больших увеличений применяют микроскоп, представляющий в принципе комбинацию двух оптических систем — объектива и окуляра, — разделенных значительным расстоянием. Если фокусные расстояния объектива и окуляра соответственно f_1 и f_2, то фокусное расстояние всей системы есть $f = f_1 f_2/\Delta$, где Δ — расстояние между фокусами обеих систем (см. упражнение 107). Увеличение, даваемое микроскопом

$$\mathscr{N} = \frac{D}{f} = \frac{D\Delta}{f_1 f_2}, \tag{92.2}$$

может быть сделано очень значительным. Так, например, при $f_1 = 2$ мм, $f_2 = 15$ мм, $\Delta = 160$ мм имеем $f = 0{,}19$ мм и $\mathscr{N} = 1330$. Впрочем, полезному увеличению, даваемому микроскопом, кладут предел дифракционные явления (см. гл. XV), и поэтому приведенный расчет имеет лишь ориентировочное значение.

Схема оптической системы микроскопа показана на рис. 14.12. Малый объект AB помещается вблизи главного фокуса F_1 объектива S_1,

дающего его увеличенное действительное изображение $A'B'$, которое рассматривают через окуляр S_2 так, чтобы увеличенное мнимое изображение $A''B''$ получалось на расстоянии наилучшего зрения от глаза или в бесконечности (наблюдение спокойным глазом). Оба способа наблюдения одинаково пригодны.

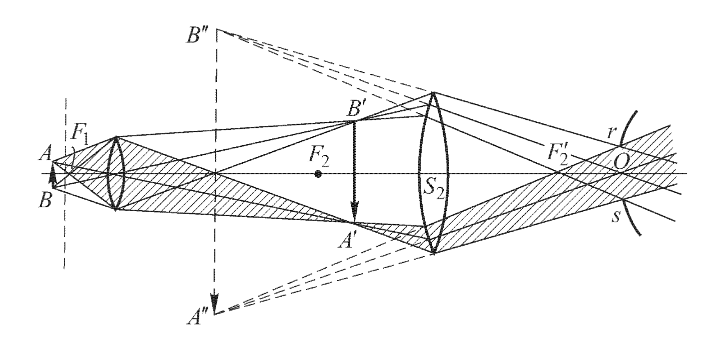


Рис. 14.12. Схематическое изображение хода лучей в микроскопе: S_1 — объектив; S_2 — окуляр; AB — предмет; $A'B'$ — дейсвительное изображение, даваемое объективом; $A''B''$ — мнимое изображение, видимое в окуляр

От предмета к объективу свет поступает *широкими* пучками, что важно для использования больших световых потоков и улучшения разрешающей способности микроскопа (см. гл. XV). Так как обычно в микроскопе наблюдаются несветящиеся объекты, то для обеспечения широких пучков важно иметь специальное осветительное устройство (конденсор). Объектив микроскопа, работающий с широкими пучками, должен удовлетворять условию апланатизма для точки вблизи фокуса; требуется также высокая ахроматизация (ахроматы и апохроматы). Хороший объектив состоит из многих линз (иногда свыше 10).

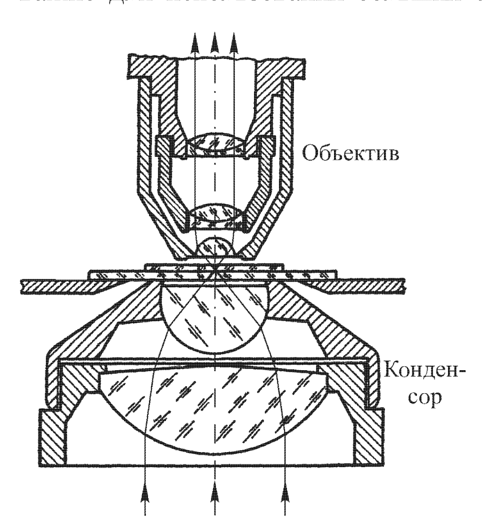


Рис. 14.13. Разрез конденсора и несложного объектива микроскопа

Рисунок 14.13 показывает разрез конденсора и сравнительно простого объектива микроскопа. Свет от препарата достигает объектива, проходя через покровное стекло. Благодаря явлению полного внутреннего отражения до объектива могут дойти лишь те лучи, которые

составляют внутри стекла конус с апертурой около 42°. Этот угол может быть увеличен, а следовательно, увеличен и световой поток, поступающий в объектив, если вместо сухих объективов применять *иммерсионные*, при которых просвет между покровным стеклом и объективом заполняется жидкостью — водой или маслом. При сухих системах наличие покровного стекла имеет существенное значение и в другом отношении, ибо толщина стекла влияет на величину сферической аберрации. Поэтому все расчеты объективов делаются в предположении, что толщина покровного стекла равна 0,17 мм (0,15–0,20 мм). Во всех сильных сухих объективах применяют в настоящее время *коррекционную оправу*, позволяющую несколько изменять расстояние между верхними и нижними линзами объектива, что дает возможность уничтожить сферическую аберрацию при покровном стекле несоответствующей толщины. В случае *гомогенной* иммерсии, когда покровное стекло, иммерсионная жидкость и фронтальная линза объектива имеют одинаковый показатель преломления, толщина покровного стекла не имеет никакого значения, так как ее можно компенсировать изменением толщины иммерсионного слоя между покровным стеклом и объективом. Иммерсионные системы имеют важное значение также для повышения разрешающей способности микроскопа (см. § 97).

Окуляр работает с узкими пучками, но при этом приходится иметь дело и с наклонными пучками. Поэтому в окуляре стремятся к исправлению астигматизма, кривизны поля и хроматической аберрации (см. § 86). Объектив и окуляр микроскопа делаются сменными, так что можно применять различные их комбинации в зависимости от задачи. Массивный штатив и тщательно выполненные приспособления для передвижения подвижных частей микроскопа составляют существенную часть хороших аппаратов.

в. Зрительные трубы. Зрительные трубы (телескопы) вооружают глаз для рассматривания деталей удаленного предмета.

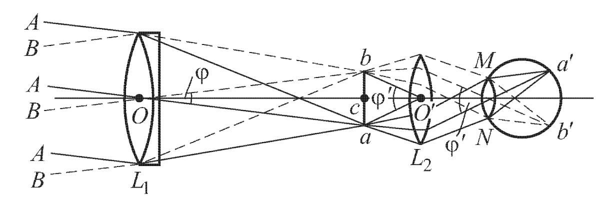


Рис. 14.14. Схематическое изображение хода лучей в зрительной трубе: сплошные линии — лучи, идущие от верхнего края (точка A) удаленного объекта; штриховые — лучи от нижнего его края (точка B); $Oc = f_1$ — фокусное расстояние объектива L_1; $cO' = f_2$ — фокусное расстояние окуляра L_2; MN — зрачок глаза, аккомодированного на бесконечность

Они также состоят (рис. 14.14) из объектива L_1 и окуляра L_2; действительное (уменьшенное и перевернутое) изображение отдаленного предмета, даваемое объективом, рассматривается в окуляр, как в лупу. В зависимости от расстояния предмета до объектива изображение

получается в задней фокальной плоскости объектива или несколько дальше. В соответствии с этим нужно несколько передвигать окуляр (фокусировка).

На рис. 14.14 φ есть угол зрения, под которым виден отдаленный предмет; φ' — угол зрения, под которым видно изображение. Действительно, в глаз попадают параллельные пучки, и оси пучков, идущих от краев изображения, составляют угол $\varphi' = bO'a$, ибо a и b лежат в фокальной плоскости окуляра.

Увеличение системы, как видно из рис. 14.14, есть

$$\mathcal{N} = \frac{\operatorname{tg}(\varphi'/2)}{\operatorname{tg}(\varphi/2)} = \frac{f_1}{f_2}, \tag{92.3}$$

т.е. равно отношению фокусных расстояний объектива и окуляра.

Нормальный глаз в спокойном состоянии воспринимает параллельные лучи (визирует бесконечно удаленную точку); поэтому передняя фокальная плоскость окуляра должна быть совмещена с изображением объекта. В частности, если объект бесконечно далек, то задний фокус объектива приводится в совпадение с передним фокусом окуляра (телескопическая система) (рис. 14.15). Рисунок показывает, что увеличение телескопической системы можно выразить также как отношение диаметров сечения пучков, входящих в объектив и выходящих из окуляра, т.е. как отношение диаметров входного и выходного зрачков системы D_1/D_2 (см. также упражнение 110).

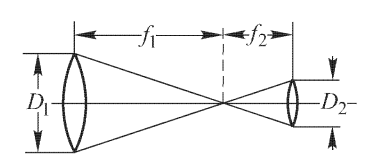


Рис. 14.15. Ход лучей в телескопической системе: увеличение системы $\mathcal{N} = \varphi'/\varphi = f_1/f_2 = D_1/D_2$

Изображение, даваемое объективом, перевернутое. Окуляр в некоторых случаях оставляет изображение перевернутым (астрономические трубы), в иных переворачивает еще раз, давая в конечном счете прямое изображение. Получение прямого изображения, важное для земных наблюдений, достигается разными способами (устройство окуляра, дополнительно переворачивающие призмы — призматические бинокли). Для каждой реальной трубы важно установить расположение диафрагм и оправ, определяющих апертурную диафрагму (входной и выходной зрачки) и диафрагму поля зрения.

Так как зрительные трубы любого типа предназначены, прежде всего, для вооружения глаза, то их выходной зрачок не должен превосходить размеров зрачка глаза. В противном случае часть светового потока, выходящего из трубы, будет задержана радужной оболочкой и не будет участвовать в построении изображения. Это значит, что внешние зоны объектива будут выключены из работы, причем действующей апертурной диафрагмой явится зрачок глаза наблюдателя. Таким образом, для правильного использования всей поверхности объектива необходимо так согласовать подбираемый к нему окуляр, а следовательно, и увеличение трубы, чтобы выходной зрачок имел нужные размеры. При ночных наблюдениях зрачок глаза не превос-

ходит 6–8 мм; при хорошем дневном освещении он равняется примерно 2–3 мм.

Так как увеличение равно $\mathcal{N} = D_1/D_2$, то *минимальное* увеличение, которое рационально применять для полного использования диаметра трубы, определится в зависимости от назначения трубы (дневные или ночные наблюдения) и размеров объектива. Так, для трубы с объективом $D = 50$ мм увеличение при ночных наблюдениях должно быть не меньше 7–8-кратного ($\mathcal{N} = 50/7$), а при дневных — не меньше 20-кратного ($\mathcal{N} = 50/2{,}5$). Для большого же телескопа ($D = 500$ мм) минимальные увеличения должны лежать в пределах от 75 (звездные наблюдения) до 200 (солнечные наблюдения). Вредным оказывается также и применение слишком больших увеличений, ибо когда выходной зрачок инструмента становится меньше зрачка глаза, резко уменьшается освещенность изображения на сетчатке. Различение же деталей не улучшится, поскольку с увеличением размеров изображения на сетчатке растет и ширина дифракционного распределения в изображении каждой точки предмета (ср. § 96).

Нижним пределом диаметра выходного зрачка можно считать значение около 1 мм. В соответствии с этим *максимальное* полезное увеличение трубы с объективом 50 мм будет около 50, а для трубы с полуметровым объективом — около 500. Таким образом, для каждого диаметра объектива трубы можно указать сравнительно ограниченный диапазон рациональных увеличений, которые должны быть обеспечены подходящим выбором окуляров.

Зрительные трубы имеют очень широкое распространение и существуют в виде разнообразных вариантов, начиная от биноклей разного типа и кончая астрономическими телескопами. Главное внимание при коррекции объективов этих инструментов направляется на исправление сферической и хроматической аберраций и выполнение условия синусов, чего можно добиться применением двулинзовых систем (см. § 82). Впрочем, современные трубы нередко делаются с более сложными объективами, позволяющими отчетливо видеть обширные участки горизонта. Окуляры труб должны обладать значительным углом зрения (от 40 до 70°) и, следовательно, в них надлежит устранять астигматизм наклонных пучков, кривизну поля и хроматизм. Поэтому окуляры изготовляют всегда сложными, по крайней мере из двух линз.

Наиболее высокие требования предъявляются к зрительным трубам, предназначенным для астрономических наблюдений (телескопы). Для того чтобы обеспечить возможно большее увеличение при допустимом размере выходного зрачка и, следовательно, хорошем различении деталей, необходимо, как мы увидим, применение телескопов с возможно бо́льшими диаметрами объективов (ср. § 96). То же требование возникает и в связи с задачей наблюдения очень слабых звезд (см. § 95). Наиболее сильными трубами являются в настоящее время *рефлекторы*, т.е. телескопы с отражательным объективом. Первый отражательный телескоп был построен Ньютоном (1672 г.), обратившимся к зеркалам в предположении, что линзовые объективы неизбежно страдают хроматической аберрацией. Известно, что заключе-

ние Ньютона было ошибочно (см. § 86), и построение ахроматических объективов возможно. В настоящее время имеются первоклассные *рефракторы*; однако технически легче изготовить зеркало большого диаметра, чем однородный стеклянный диск, пригодный для изготовления большого линзового объектива. Поэтому, хотя требования к точности изготовления отражающей поверхности примерно в четыре раза выше, чем для преломляющей, изготовление очень больших зеркальных объективов оказалось более легкой задачей. Так, в настоящее время существует рефлектор с диаметром зеркала около 5 м (обсерватория Маунт-Паломар) и вступает в строй рефлектор диаметром 6 м (СССР), тогда как диаметр объектива наибольшего из существующих рефракторов достигает всего 1 м.

Схема рефрактора в принципе такая же, как на рис. 14.14.

Схема рефлектора простейшего типа в том виде, в каком она была предложена Ньютоном, изображена на рис. 14.16. B — отражательное зеркало. Плоское отклоняющее зеркало S служит для того, чтобы иметь возможность помещать окуляр и голову наблюдателя вне основного пучка и не вносить слишком большого диафрагмирования. Для огромных современных рефлекторов помещение наблюдателя целиком внутри трубы привело бы к относительно небольшому и вполне допустимому экранированию. Однако тепловые токи от тела наблюдателя в области основного хода световых лучей приводят к сильному понижению качества изображения. Поэтому сохраняют отклоняющее зеркало.

На рис. 14.17 изображена схема отражательного телескопа (рефлектора), изобретенного Ломоносовым, а позднее осуществленного также и Гершелем. Характерной особенностью этой схемы является отсутствие вспомогательного зеркала S (что было особенно важным,

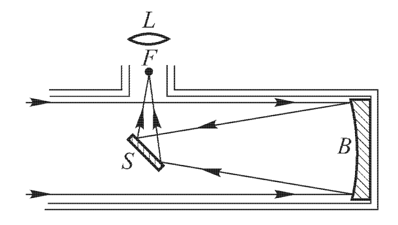


Рис. 14.16. Схема рефлектора Ньютона

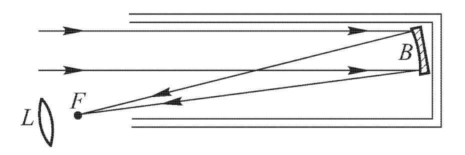


Рис. 14.17. Схема рефлектора Ломоносова–Гершеля

так как в то время еще не умели делать хорошие зеркала) и наклон отражательного зеркала B, позволяющий устранить экранирующие препятствия на пути главного хода лучей. Необходимость работать с пучками, наклоненными к оси, ведет к ухудшению качества изображений в этих рефлекторах.

Хотя рефлекторы свободны от хроматической аберрации, однако при сферической форме зеркал весьма значительной помехой является сферическая аберрация. Поэтому в хороших рефлекторах приходится пользоваться асферическими зеркалами, например, в виде параболоида вращения, которые технически значительно сложнее

изготовлять. Обычно применяют сложные системы из двух неплоских асферических зеркал (главного и вторичного), подобные изображенной на рис. 14.18 (система Кассегрена). Дальнейшее усовершенствование подобных рефлекторов может быть получено за счет взаимной компенсации аберраций, вносимых каждым из зеркал.

Таким образом, удается создать, применяя эллиптические и гиперболические зеркала, системы, в которых исправлена не только сферическая аберрация, но и кома. На этом пути, по-видимому, можно будет получить наиболее совершенные гигантские телескопы.

Весьма удачным решением задачи получения превосходных в оптическом отношении и сравнительно недорогих систем являются смешанные системы, где зеркальная оптика сочетается с линзовой, приводя к весьма полному устранению ряда вредных аберраций. Наиболее совершенной системой этого рода являются менисковые системы Д.Д. Максутова (рис. 14.19), где отражательное сферическое зеркало B сочетается с мениском M (см. § 77), также ограниченным

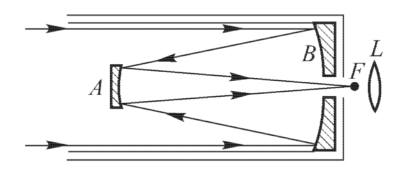


Рис. 14.18. Схема рефлектора Кассегрена

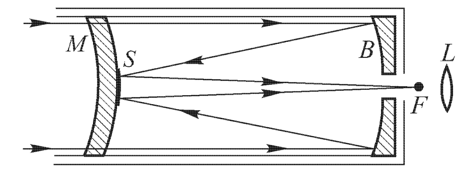


Рис. 14.19. Схема одного из менисковых телескопов Д.Д. Максутова

сферическими поверхностями. Применяя соответственно рассчитанный мениск так, чтобы его аберрации компенсировали аберрации зеркала, удается получить систему, главные аберрации которой во много раз меньше соответствующих аберраций линзовой системы того же относительного отверстия. Так, по данным Д.Д. Максутова, при относительном отверстии 1 : 5 у менисковой системы сферическая аберрация меньше в 11 раз, кома — в 11 раз, сферохроматическая аберрация — в 124 раза, вторичный спектр — в 640 раз и хроматизм увеличения — в 3,8 раза, чем у эквивалентного линзового объектива. Эти огромные преимущества в соединении с относительной простотой расчета и изготовления (сферические поверхности!) делают менисковые системы замечательным достижением оптотехники. На этом принципе можно построить любой тип рефлектора и притом с большим совершенством. Например, рис. 14.19 иллюстрирует осуществление по принципу Максутова телескопа типа Кассегрена. По тому же принципу строятся в настоящее время как превосходные астрономические инструменты, так и скромные бытовые приборы (очки-бинокли, фотообъективы и т.д.).

§ 93. Проекционные устройства

Оптические инструменты, рассмотренные в предыдущем параграфе, предназначены в помощь глазу и дают *мнимые* изображения,

которые может воспринимать лишь один наблюдатель, смотрящий в окуляр (субъективное наблюдение). Другой тип приборов дает действительные изображения, которые отбрасываются на экран и могут поэтому одновременно рассматриваться целой аудиторией (объективное наблюдение). Эти инструменты носят название *проекционных*; они получили особое распространение в последнее время (проекционный фонарь, киноаппарат).

Назначение проекционной системы — давать увеличенное действительное изображение светящегося или освещенного предмета. Для этого его располагают около главной фокальной плоскости проекционного объектива, могущего перемещаться для резкой наводки. Наиболее распространена проекция диапозитива или чертежа, размеры которых обычно больше размеров проекционного объектива. Последний должен быть исправлен на сферическую и хроматическую аберрации, на астигматизм и кривизну поля. Хороший проекционный объектив приближается по своим данным к фотографическому.

При больших увеличениях очень важной задачей является хорошее использование идущего от объекта светового потока, ибо он должен распределяться по большой поверхности увеличенного изображения. Так как размеры объекта значительны, то необходимо специальное осветительное устройство, позволяющее направить весь идущий от объекта свет в сравнительно небольшой проекционный объектив. Это достигается при помощи короткофокусного конденсора C значительного размера, расположенного, как показано на рис. 14.20,

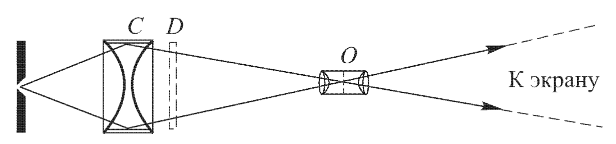


Рис. 14.20. Схематическое изображение хода лучей в проекционном устройстве. Конденсор C проецирует источник света на входной зрачок объектива O; объектив O проецирует диапозитив D на удаленный экран

с таким расчетом, чтобы свет от него сходился на входном зрачке проекционного объектива O. Так как, с другой стороны, расстояние от объектива до предмета D должно соответствовать резкой наводке, то конденсор и объектив должны быть согласованы друг с другом.

Современные светосильные объективы сделали возможным удобное проецирование и непрозрачных объектов (*эпипроекция*). В этом случае объект (чертеж) сильно освещается сбоку при помощи ламп и зеркал, и светосильный объектив проецирует освещенный предмет на экран. Во многих приборах скомбинировано устройство для проецирования прозрачных (диа) и непрозрачных (эпи) объектов. Приборы этого типа носят название *эпидиаскопов*.

Для проецирования микроскопических объектов применяют микроскоп, окуляр которого заменяют специальным проекционным устройством; впрочем, можно получить действительное изображение на экране и с обычным окуляром, смещенным соответствующим образом, или даже совсем без окуляра.

Основная трудность при микропроецировании с большим увеличением состоит в недостатке освещенности изображения. Несмотря на ряд усовершенствований в осветительных устройствах, применение микропроекции в больших аудиториях до сих пор удается плохо.

§ 94. Спектральные аппараты

Несколько особое место среди оптических инструментов занимают спектральные аппараты, предназначенные не для получения изображения светящегося объекта, а для исследования спектрального состава посылаемого им света. В соответствии с этим существенную часть спектрального аппарата составляет приспособление для разложения света по длинам волн. Такую роль исполняет призма, выполненная из материала со значительной дисперсией, дифракционная решетка или какой-либо интерференционный прибор. Последние служат для детального анализа света, довольно близкого к монохроматическому, ибо дисперсионная область этих приборов весьма ограничена. Поэтому их нередко употребляют в соединении с призматическими или дифракционными спектральными аппаратами, которые являются наиболее распространенными инструментами этого рода.

Схематическое устройство призменного спектрографа показано на рис. 14.21. Получение чистого спектра возможно, если аппарат обеспечивает изображение в спектральных цветах очень узкого светящегося объекта, так что даже близкие по длине волны изображения не

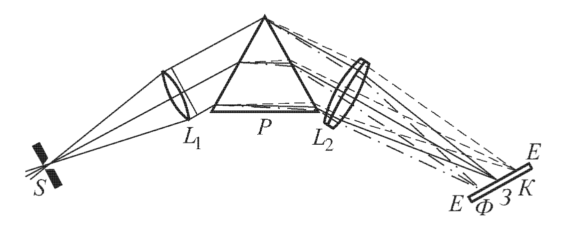


Рис. 14.21. Схематическое изображение хода лучей в спектрографе: S — щель; L_1 — объектив коллиматора; P — призма; L_2 — объектив камеры; EE — фотопластинка

налагаются друг на друга. Поэтому существенной частью прибора является щель S, состоящая из двух ножей, которые можно сближать и раздвигать при помощи винта. Рабочая ширина щели меняется от нескольких тысячных до нескольких десятых миллиметра; для специальных целей применяют и более широкие щели.

Система объективов и призм обеспечивает резкое изображение щели в плоскости EE, где помещается фотографическая пластинка. Так как свет от щели должен проходить через призму, то для устранения астигматизма пучок падающих на нее лучей делается параллельным (см. § 84). Для этой цели служит передняя труба (коллиматор), где щель S располагается в фокальной плоскости линзы L_1. Так как щель имеет малые размеры (несколько сотых миллиметра по ширине и 3–4 мм по высоте) и помещается на оси объектива L_1, то последний

должен быть исправлен главным образом на сферическую и хроматическую аберрации, чтобы обеспечить параллельность пучков для разных длин волн. Поэтому обычно объектив коллиматора изготовляется в виде склеенной ахроматической линзы.

Параллельные пучки, выходящие из призмы, имеют для разных длин волн различное направление, составляя несколько градусов между собой в зависимости от материала призм и их числа. Однако даже при значительной дисперсии различие направлений не превышает нескольких градусов. Поэтому объектив камеры может иметь небольшое поле зрения; зато в современных аппаратах нередко требуются объективы с большими относительными отверстиями[1]). Они должны быть исправлены на сферическую аберрацию и кому. Коррекция на хроматическую аберрацию не обязательна, ибо лучи разных длин волн дают изображение в разных точках пластинки. Поэтому резкость изображения для разных длин волн достигается соответствующим наклоном пластинки. Желательно, однако, рассчитать систему так, чтобы получить спектр, лежащий в одной плоскости. В противном случае фотопластинку приходится соответствующим образом выгибать, что достигается при помощи кассеты специальной формы.

Размеры объективов выбираются в соответствии с размерами призмы так, чтобы не диафрагмировались пучки разных направлений, соответствующие разным длинам волн. При увеличении размеров призмы не только увеличивается количество света, поступающего в прибор (светосила аппарата), но увеличивается и разрешающая способность его, т.е. возможность различения близких длин волн (см. § 100).

Параллельный пучок, исходящий из центра щели, лежащей на оптической оси коллиматора, имеет плоскостью падения главное сечение призмы; пучки, исходящие от других точек щели, падают под углом к главному сечению и преломляются тем сильнее, чем дальше от центра отстоит соответствующая точка щели. Поэтому прямолинейная щель изображается в виде дуги, обращенной выпуклостью к красному концу спектра. Это *искривление* спектральных линий тем значительнее, чем выше щель и короче фокус объектива коллиматора.

Материалом призм (и линз) в приборах, предназначенных для работы с видимым светом, служит стекло с большой дисперсией (флинт), в приборах для ультрафиолета — кварц или сильвин (для $\lambda > 200$ нм) и флюорит (для $\lambda < 200$ нм). Инфракрасные спектрографы снабжаются оптикой из каменной соли или сильвина, а также из кварца, флюорита и других специальных материалов.

Угол между направлением лучей различных длин волн (угловая дисперсия $\Delta\varphi/\Delta\lambda$) определяется числом призм, их материалом и величиной преломляющих углов. Некоторые из призм описаны в § 86. Дисперсия в призме зависит также от ее положения в параллельном пучке лучей. Дисперсия сильно возрастает, если угол падения лучей становится меньше угла, соответствующего положению минимального

---

[1]) Существуют спектрографы, объектив которых имеет относительное отверстие 1 : 0,7 при диаметре около 15 см.

отклонения (см. § 86). Однако при таком положении ширина выходящего пучка становится значительно меньше ширины падающего, и призма действует как телескопическая система, дающая увеличение (см. упражнение 111). Это обстоятельство невыгодно отзывается на светосиле спектрального аппарата. Впрочем, благодаря значительному увеличению угловой дисперсии при такой установке призм можно применять более короткофокусные и, следовательно, более светосильные камерные объективы. Поэтому такие системы иногда применяются (В.М. Чулановский), хотя в большинстве спектрографов призму располагают в минимуме отклонения. Расстояние на пластинке между линиями разной длины волны (линейная дисперсия $\Delta l/\Delta\lambda$) зависит от фокусного расстояния f' объектива камеры:

$$\frac{\Delta l}{\Delta\lambda} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\lambda}\, f'. \qquad (94.1)$$

Величина изображения щели на фотопластинке зависит от фокусных расстояний объективов коллиматора f и камеры f'. Пусть щель имеет ширину b и высоту h, а ее изображение соответственно b' и h'. Нетрудно видеть, что при положении призм в минимуме отклонения

$$b' = \frac{bf'}{f} \quad \text{и} \quad h' = \frac{hf'}{f}.$$

Отношение площадей щели S и ее изображения S' при установке на минимум отклонения и для монохроматического света равно

$$\frac{S}{S'} = \frac{f^2}{f'^2}. \qquad (94.2)$$

Это отношение имеет значение при расчете светосилы спектрографа, которая оказывается тем меньше, чем больше f'^2 (см. упражнение 135).

Таким образом, увеличение фокусного расстояния камерного объектива (f'), понижая светосилу спектрографа, увеличивает его линейную дисперсию. Последнее обстоятельство может быть весьма полезным, ибо вследствие зернистой структуры фотоэмульсий близкое положение изображений двух линий на фотопластинке затрудняет их различение.

Для наилучшего использования света прибором нередко между щелью и источником света располагают вспомогательную линзу (конденсор), с тем чтобы свет *заполнил* весь объектив коллиматора. Увеличение размера конденсора, при котором апертура выходящего из него пучка превысит апертуру коллиматора, бесполезно с точки зрения использования светового потока, однако некоторое перезаполнение коллиматора представляет известные преимущества, так как позволяет получить условия освещения, легче поддающиеся теоретическому анализу (уменьшение степени когерентности освещения, см. § 22). При больших линейных размерах источника света, расположенного на соответствующем расстоянии от щели, необходимое заполнение коллиматора осуществляется чисто геометрически, без помощи конденсора. Однако и в этих случаях, равно как и при малых размерах источника, нередко применяют конденсоры даже более сложного

устройства, с тем чтобы выделить ту или иную часть источника света и обеспечить равномерность освещения щели и равномерность освещенности изображения (устранение виньетирования, см. § 89).

§ 95. Восприятие света. «Ночезрительная труба» М.В. Ломоносова

Рассмотрим теперь, как реагируют на свет наши приемные аппараты и какова роль оптических инструментов при восприятии света.

Световое восприятие глаза обусловлено раздражением зрительного нерва, которое вызывается освещением сетчатой оболочки глаза. Так как отдельные элементы сетчатки реагируют на раздражение независимо, то увеличение освещенной поверхности сетчатки не усиливает светового раздражения отдельных элементов, а осознается как увеличение освещенного поля. Поэтому световое ощущение будет определяться *освещенностью* сетчатки, т.е. величиной светового потока, приходящегося на единицу поверхности сетчатки. В этом отношении глаз подобен фотоаппарату, где также почернение пластинки в каждом данном месте зависит от ее освещенности, а увеличение размеров освещенной части только увеличивает поле изображения [1]).

Однако в отличие от глаза фотопластинка *интегрирует* световой поток по времени, так что удлинение времени освещения приводит к увеличению почернения в каждом участке пластинки; благодаря этому фотопластинка может быть использована для регистрации крайне слабых потоков, если заставить их действовать достаточное время. Наоборот, продолжительность светового действия не увеличивает, вообще говоря, светового восприятия глаза, и если освещенность сетчатки столь мала, что мы не ощущаем света (ниже порога раздражения), то удлинение раздражения не улучшает дела. Впрочем, элемент времени играет известную роль в зрительном восприятии в связи со способностью глаза приспособляться к изменениям условия освещения (адаптация) и другими физиологическими процессами (см. § 193).

Фотоэлемент, в отличие от глаза и фотопластинки, реагирует не на освещенность чувствительной поверхности, а на световой поток, ибо фототок, т.е. число электронов, освобождаемых в единицу времени действием света, пропорционален количеству световой энергии, поглощаемой за секунду всей освещенной поверхностью. Поэтому чувствительность фотоэлемента обычно выражают в микроамперах на люмен. Фотоэлемент может работать и как прибор, интегрирующий световое действие по времени, если измеряется количество выделившихся зарядов (электрометр с емкостью); если же измеряется сила возникающего тока (гальванометр), то интегрирование по времени не имеет места.

---

[1]) Впрочем, существуют наблюдения, показывающие, что при неизменной освещенности сетчатки световое ощущение зависит в известных пределах от размера изображения, достигая максимума при угловом размере изображения примерно в $5-7^\circ$. Это явление еще не получило своего объяснения и, вероятно, связано с физиологическими особенностями глаза.

В соответствии с указанным различием перечисленные приборы по-разному отзываются на приближение светящегося объекта. В случае фотоэлемента приближение светящейся поверхности увеличивает световой поток и, следовательно, усиливает действие. Для глаза же и фотокамеры дело обстоит иначе, ибо при этом меняется не только поток, но и размер изображения.

Пусть PQ (рис. 14.22) есть светящаяся поверхность, воспринимаемая камерой или глазом, O — оптический центр системы, $P'Q'$ — изображение, $r = OM \approx OP \approx OQ$ — расстояние до предмета, $ON = h$ — расстояние до изображения (глубина камеры или глаза). Обозначим

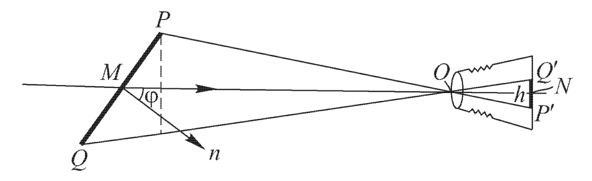


Рис. 14.22. К выводу зависимости освещенности изображения от яркости предмета и параметров оптической системы

через S площадь входного зрачка системы (диафрагмы объектива или зрачка глаза), через σ — площадь PQ и через σ' — площадь $P'Q'$. Нетрудно видеть, что

$$\sigma' = \sigma \cos\varphi \, \frac{h^2}{r^2} \, .$$

Если яркость светящейся поверхности есть B (для простоты расчета предположим, что поверхность удовлетворяет закону Ламберта, т.е. B не зависит от направления), то поток, поступающий в систему, равен

$$\Phi = B\sigma \cos\varphi \cdot \Omega = B\sigma \cos\varphi \, \frac{S}{r^2} \, , \tag{95.1}$$

так как телесный угол потока, направляемого в систему, есть

$$\Omega = \frac{S}{r^2} \, .$$

Итак, освещенность фотопластинки (сетчатки) равна

$$E = \frac{\Phi}{\sigma'} = \frac{BS}{h^2} \, . \tag{95.2}$$

Как мы видим, при заданном S/h^2 освещенность пропорциональна яркости источника. Для глаза, таким образом, зрительное восприятие не зависит от расстояния, ибо h практически не меняется с изменением r. Так, например, рассматривая ряд фонарей вдоль длинной улицы, мы по зрительному ощущению правильно оцениваем их одинаково яркими, несмотря на различие в их удаленности (конечно, в случае вполне прозрачной атмосферы) (см. упражнение 10). Для фотокамеры это также справедливо, если только предмет не приближается настолько близко, что приходится увеличивать h. Для удаленных предметов h практически равно фокусному расстоянию объектива f. Таким образом, освещенность в фотокамере пропорциональна светосиле объектива $(D/f)^2$. Соотношение $E = BS/h^2$ показывает, почему

при рассматривании (фотографировании) предметов малой яркости мы расширяем зрачок глаза (или увеличиваем апертурную диафрагму объектива).

Так как освещенность сетчатки пропорциональна яркости объекта, то рассматривание слишком ярких объектов может вызывать болезненные явления. Исследования показывают, что верхний предел яркости, безболезненно переносимый глазом, — около $16 \cdot 10^4$ кд/м^2. Следовательно, рассматривание спирали лампы накаливания уже непосильно для глаза. Если же эта спираль заключена в матовую колбу, то тот же (практически) поток посылается гораздо большей поверхностью и яркость сильно падает. Таким образом, одна из задач, преследуемая разнообразными арматурами освещения (см. также § 7), состоит в уменьшении яркости источников света без заметного ослабления светового потока и, следовательно, освещенности предметов.

При рассматривании очень удаленных предметов размер их изображения падает до предельного значения, обусловливаемого разрешающей способностью глаза. В таком случае средняя освещенность уже не будет определяться яркостью объекта. Так как размер изображения постоянен, то освещенность пропорциональна потоку, поступающему в глаз, а этот последний зависит от силы света источника и его расстояния до глаза. Поэтому, например, звезды, угловой диаметр которых меньше секунды, не производят слепящего действия, хотя их истинная яркость нередко больше яркости Солнца, слепящее действие которого огромно благодаря заметному угловому диаметру ($32'$), значительно превосходящему предел разрешения глаза (около $1'$).

Применяя оптический инструмент, мы заменяем предмет его изображением, которое в конечном счете и рассматривается глазом или действует на какой-либо иной приемник. Для определения яркости этого изображения надо рассчитать идущий от него световой поток, площадь изображения и величину телесного угла, ограничивающего поток.

Пусть источник, яркость которого B не зависит от направления, отображается без искажения (апланатически, ср. § 85) с помощью

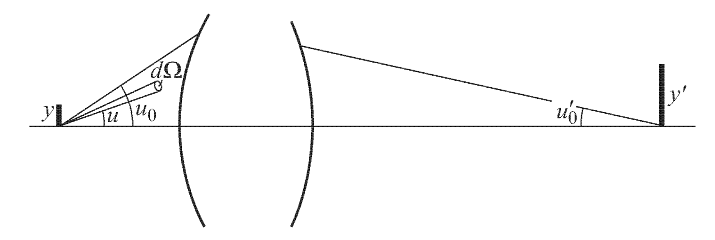


Рис. 14.23. К расчету яркости изображения в оптической системе

какой-либо оптической системы (рис. 14.23). Найдем яркость изображения B'.

Обозначим через y, σ и u_0 линейные размеры, площадь и апертуру источника, а через y', σ', u_0' — размеры, площадь и апертуру изображения; σ пропорционально y^2, а σ' пропорционально y'^2. Для

вычисления полного потока, идущего от источника, вычислим поток через элементарный телесный угол $d\Omega$ и проинтегрируем его по всей апертуре. Нетрудно видеть (ср. § 7), что $d\Omega = \sin u\, du\, d\theta$, где u — угол между осью элементарного пучка и осью системы, а θ — азимутальный угол (вокруг оси системы). Так как u в то же время есть угол элементарного пучка с нормалью к площадке σ, то элементарный поток от σ есть $d\Phi = B\sigma \cos u\, d\Omega = B\sigma \cos u \sin u\, du\, d\theta$ (ср. § 7), а полный поток в пределах апертуры u_0 —

$$\Phi = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{u_0} B\sigma \cos u \sin u\, du = \pi B\sigma \sin^2 u_0.$$

Аналогично, поток от изображения равен

$$\Phi' = \pi B'\sigma' \sin^2 u_0'.$$

Условие апланатизма (условие синусов) есть

$$ny \sin u_0 = n'y' \sin u_0'$$

или

$$n^2\sigma \sin^2 u_0 = n'^2\sigma' \sin^2 u_0',$$

где n и n' — показатели преломления сред, в которых лежат источник и изображение. Пренебрегая потерями в системе, имеем

$$\Phi = \Phi'.$$

Таким образом, окончательно получим

$$B' = B\,\frac{n'^2}{n^2}\,.$$

Если $n = n'$, т.е. источник и изображение находятся в одной среде, например в воздухе, то

$$B' = B.$$

Таким образом, при образовании изображения в любой системе яркость изображения равняется яркости источника, если пренебречь потерями на отражение и поглощение в системе и если изображение получается в той же среде, в которой расположен источник.

Указанный результат есть следствие того обстоятельства, что оптическая система, уменьшая размеры изображения, в то же время увеличивает телесный угол, в который направляется световой поток (см. § 79). Таким образом, при наблюдении объекта через оптическую систему мы ничего не выигрываем в яркости. Однако это справедливо лишь при наблюдении объектов, превышающих по размерам предел разрешения инструмента. В противном случае изображение неизменной величины, образуемое на сетчатке глаза, вооруженного инструментом, будет получать тем больший световой поток, чем больше диаметр объектива. Таким образом, в большой телескоп можно наблюдать звезды, недоступные невооруженному глазу, ибо они не видны на фоне небесного свода. При наблюдении в телескоп яркость небесного свода как объекта протяженного остается неизменной (если отвлечься от потерь в инструменте), яркость же изображения звезды (освещенность соответствующего места на сетчатке) возрастает в отношении

площади объектива к площади зрачка, т.е. в несколько тысяч раз. Хотя оптическая система не повышает яркости изображения, она может значительно изменить *освещенность* его, сосредоточивая поток, поступающий в систему, на большей или меньшей площади изображения. Отсюда видно значение фотообъективов большой светосилы при фотографировании предметов малой яркости (см. упражнение 135).

Следует также заметить, что опасность ослепления при рассматривании яркого источника (Солнца) в трубу сильно возрастает, хотя яркость изображения может только уменьшаться. Причина лежит в том, что чем больше площадь сетчатки, подвергающаяся слепящему действию, тем значительнее ее разрушение, ибо организм не успевает нейтрализовать это разрушающее действие.

Таким образом, оптическая система не может увеличить яркости протяженного объекта и практически всегда несколько уменьшает ее вследствие неизбежных потерь на отражение света от поверхностей линз и поглощение в стекле. Тем не менее, оптическая система может оказаться полезной для *улучшения видимости* объектов при слабой освещенности. Причина лежит в возможности лучшего различения деталей. Как указывалось в § 91, разрешающая способность глаза ухудшается при малых освещенностях. В ночных условиях, когда освещенность падает до десятитысячных долей люкса, разрешающая способность глаза изменяется примерно от величины в $1'$ до 1°, даже если освещенность предмета будет раз в десять больше освещенности фона. В таких условиях увеличение угла зрения, обеспечиваемое трубой, представляет очень большие преимущества для различения контура и крупных деталей объекта, практически неразличимых невооруженным глазом. В этом именно смысле оптические трубы и бинокли оказываются полезными в ночных условиях, что впервые было учтено М.В. Ломоносовым, который в 1756 г. построил первую «ночезрительную трубу».

Трубы, предназначенные для ночных наблюдений, должны обладать возможно бо́льшим увеличением при условии использования всего поступающего в них светового потока. Поэтому в них должны быть максимально снижены потери на отражение (малое число отражающих поверхностей или просветленная оптика, см. § 135). Для того чтобы весь световой поток поступал в глаз, выходной зрачок трубы не должен превышать зрачка глаза (6–8 мм). Максимальное увеличение можно обеспечить возможно бо́льшими размерами объектива, при которых выходной зрачок еще соответствует зрачку глаза (см. § 92).

Глава XV

ДИФРАКЦИОННАЯ ТЕОРИЯ ОПТИЧЕСКИХ ИНСТРУМЕНТОВ

Изображение, даваемое любой оптической системой, есть результат интерференции, ибо все законы лучевой оптики (прямолинейное распространение, преломление, отражение) суть, в конечном счете,

законы, вытекающие из взаимной интерференции различных частей световой волны. Мы использовали это соображение, например, при выводе условия синусов (см. § 85). Поэтому полная теория оптического изображения, а следовательно, и теория оптических инструментов любого типа, должна быть интерференционной теорией. В частности, дифракция световой волны, связанная с ограничением конуса лучей, вырезаемого входным зрачком (краями линз, зеркал и диафрагм, составляющих оптическую систему), принципиально ведет к нарушению стигматичности изображений. В силу указанных дифракционных явлений идеальной стигматичности быть не может: точка изображается дифракционным кружком, и это обстоятельство ограничивает возможность различения тончайших деталей изображения. Таким образом, вопрос о пределе различимости деталей изображения (разрешающая сила оптического инструмента) есть вопрос, для решения которого необходимо рассмотреть дифракционные процессы в оптической системе.

§ 96. Разрешающая сила объектива

Пусть на объектив трубы или фотоаппарата падает плоская волна от бесконечно удаленного источника света, например от звезды. Дифракция на краях круглой оправы, ограничивающей отверстие трубы, приведет к тому, что в фокальной плоскости объектива получится не просто стигматическое изображение точки, а более сложное распределение освещенности: центральный максимум, интенсивность которого быстро спадает, переходя в темное кольцо; второй, более слабый кольцевой максимум и т.д. (см. § 42, рис. 9.7 *б*). Радиус первого темного кольца стягивает угол φ (с вершиной в центре объектива). Величина этого угла определяется из условия

$$D\sin\varphi = 1{,}22\lambda, \qquad (96.1)$$

если падающий свет монохроматичен и имеет длину волны λ, а D — диаметр объектива. В случае белого света картина будет представлять собой наложение таких монохроматических изображений.

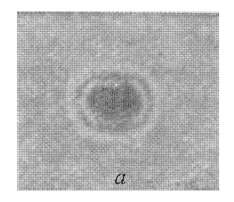
Радиус первого темного кольца r в фокальной плоскости есть $r = f\,\mathrm{tg}\,\varphi$, где f — фокусное расстояние объектива. Так как угол φ мал, то $r = 1{,}22 f\lambda/D$, т.е. тем меньше, чем больше диаметр объектива[1]).

Если объектив направлен на две удаленные звезды S_1 и S_2, разделенные угловым расстоянием ψ, то каждая из них даст в фокальной плоскости дифракционные кружки с центрами в точках, соответствующих изображениям S_1 и S_2 (рис. 15.1 *а*).

Так как источники S_1 и S_2 испускают некогерентное излучение, то картина, видимая наблюдателем, представляет собой просто наложение светлых и темных колец обоих кружков. Если центры кружков близки, а радиусы кружков значительны, то система перекрывающихся колец может не дать впечатления двух раздельных изображений: объектив не в состоянии различить (разрешить) две светящиеся

[1]) Изложенное относится к тонкому объективу. В общем случае следует говорить не об объективе, а об его выходном зрачке.

точки. Степень взаимного наложения, препятствующего различению деталей, зависит от чувствительности глаза или фотопластинки к контрастам, т.е. является несколько неопределенной величиной. По Рэлею для определенности принимают за предел разрешения такое положение, при котором первое темное кольцо одного кружка проходит через светлый центр второго (см. также § 50). В этом случае ординаты кривых, дающих распределение освещенности (рис. 15.1 *б*), в точке их пе-



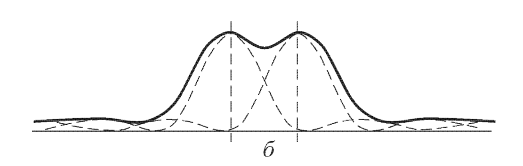


Рис. 15.1. Общий вид дифракционной картины при наблюдении двух удаленных звезд, находящихся на небольшом угловом расстоянии (*а*); предел разрешения при изображении двух точек (критерий Рэлея) (*б*)

ресечения составляют меньше 0,4 от ординаты в максимумах, так что в результирующей кривой ордината места провала составляет 75 % от ординаты максимумов [1]). Нормальный глаз или фотопластинка в состоянии, вообще говоря, обнаружить провал, даже если он отличается от максимума меньше чем на 25 %.

При расположении, соответствующем критерию Рэлея, угловой радиус первого темного кольца φ равен угловому расстоянию между звездами ψ. Итак, разрешаемое угловое расстояние определяется условием

$$\sin\psi = \sin\varphi = 1{,}22\,\frac{\lambda}{D} = 0{,}61\,\frac{\lambda}{R}, \tag{96.2}$$

т.е. тем меньше, чем больше диаметр (или радиус) объектива. Так как обычно угол φ (и ψ) мал, то можно написать

$$\psi = \varphi = 0{,}61\,\frac{\lambda}{R}. \tag{96.3}$$

Величина, обратная предельному углу, носит название *разрешающей силы*

$$\mathscr{A} = \frac{1}{\psi} = \frac{R}{0{,}61\lambda}. \tag{96.4}$$

Аналогично, небольшой источник, угловой размер которого равен (или меньше) ψ, определяемого последним соотношением, представляется наблюдателю точкой, т.е. дает при наблюдении в трубу картину, практически не зависящую от формы источника и близкую к картине, вызываемой светящейся точкой. Таким образом, разрешающая сила объектива тем больше, чем больше его диаметр.

[1]) При равной интенсивности источников S_1 и S_2 и круглой оправе объектива.

Разрешающая сила глаза также ограничена дифракционными явлениями и связана с размерами зрачка. При хорошей освещенности диаметр зрачка равняется примерно 2 мм, чему соответствует, согласно (96.3), предельный угол разрешения около $1'$. Это согласуется с той величиной разрешения, которая обусловлена структурой сетчатой оболочки (см. § 91). При пониженной освещенности зрачок глаза увеличивается (до 8 мм), однако при этом сильнее сказываются недостатки глаза как оптической системы, так что улучшение условий разрешения, связанное с увеличением диаметра системы, не проявляется. Более того, как уже упоминалось в § 91, разрешающая способность глаза при пониженной освещенности падает вследствие физиологических причин.

§ 97. Разрешающая сила микроскопа

Дифракция, возникающая вследствие ограничения пучка лучей, имеет место и в микроскопе и также приводит к ограничению его разрешающей силы. Для микроскопа обычно выражают его способность к разрешению деталей не величиной угла, а *линейными* размерами мельчайшей разрешимой детали или минимальным расстоянием между двумя точками, различимыми с помощью микроскопа. В том случае, когда две такие точки испускают некогерентные волны (самосветящиеся точки), задача вполне аналогична рассмотренной в предыдущем параграфе.

Как и в случае трубы (телескопа), нас интересует дифракционная картина в плоскости изображения предмета. Легко видеть, что в этой плоскости всегда применимы формулы фраунгоферовой дифракции, если под углом дифракции понимать угол, под которым видна точка плоскости изображений из центра апертурной диафрагмы (см. § 39 и упражнение 119). Кроме того, следует принять во внимание, что плоскость изображения EE объекта (рис. 15.2) лежит на расстоянии

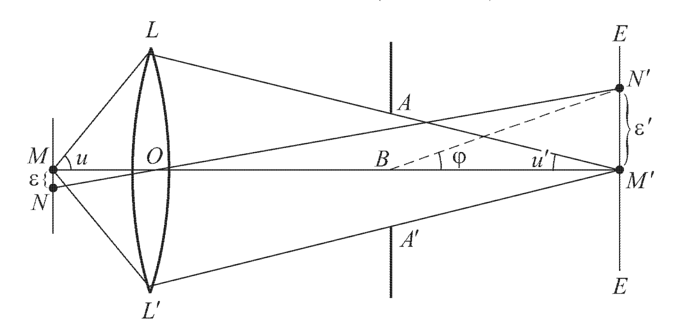


Рис. 15.2. К вычислению разрешающей силы микроскопа: LL' — объектив; AA' — его апертурная диафрагма; на рисунке масштаб искажен: расстояние OM' примерно в 100 раз больше LL' (или AA')

(около 160 мм), гораздо большем диаметра объектива (или апертурной диафрагмы), и поэтому угол u' можно считать малым.

Минимальное разрешаемое микроскопом расстояние между двумя самосветящимися (испускающими некогерентное излучение) точками M и N будет найдено из условия, что центры двух независимых дифракционных картин, получаемых в плоскости изображения EE, окажутся на расстоянии, удовлетворяющем условию Рэлея, т.е. $\varepsilon' = M'N'$ равно радиусу первого темного дифракционного кольца, окружающего изображение M' или N'. Соответствующие дифракционные картины получаются в результате фраунгоферовой дифракции на круглой апертурной диафрагме AA'. Поэтому *угловой* радиус φ первого темного кольца определится из условия

$$AA' \sin\varphi = 1{,}22\lambda, \quad \text{или} \quad \varphi = 1{,}22\,\frac{\lambda}{AA'}$$

(ибо угол φ мал), причем AA' есть диаметр апертурной диафрагмы. *Линейный* радиус первого темного кольца равен $\varphi BM'$, где BM' — расстояние от диафрагмы до плоскости EE.

Итак, условие разрешения будет иметь вид

$$\varepsilon' = \varphi BM' = 1{,}22\,\frac{\lambda BM'}{AA'}\,.$$

Из рис. 15.2 видно, что

$$\frac{AA'}{BM'} = 2u',$$

ибо угол u' мал. Таким образом, $\varepsilon' = 0{,}61\lambda/u'$, т.е.

$$\varepsilon' u' = 0{,}61\lambda. \tag{97.1}$$

Для нахождения связи между ε' и ε вспомним, что для правильного отображения элемента с помощью микроскопа должно быть соблюдено условие синусов (см. § 85). Итак,

$$\varepsilon n \sin u = \varepsilon' n' \sin u'. \tag{97.2}$$

Показатель преломления среды в пространстве изображений n' равен единице, ибо изображение расположено в воздухе; n может быть и больше единицы, ибо пространство между предметом и объективом нередко заполнено каким-либо веществом (иммерсия). Хотя угол u может быть значительным, угол u' очень мал, ибо $OM' \gg OL$, так что $u' \approx \sin u'$. Из (97.1) и (97.2) имеем

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon' u'}{n \sin u} = \frac{0{,}61\lambda}{n \sin u}\,.$$

Таким образом, разрешающая сила микроскопа тем больше, чем больше значение $n \sin u$. Эта последняя величина получила название *числовой апертуры* объектива и обычно обозначается буквой A.

Мы нашли выражение для разрешающей силы микроскопа, исходя из предположения, что точки объекта посылают некогерентные волны (объект самосветящийся), так что дифракционные картины просто накладываются одна на другую. Однако обычно в микроскоп рассматривают объекты *освещенные*, а не самосветящиеся. Это значит, что

отдельные точки объекта рассеивают падающие на них волны, исходящие из одной и той же точки источника, и, следовательно, свет, идущий из разных точек объекта, оказывается *когерентным.* К такому случаю, гораздо более распространенному, наш вывод разрешающей силы микроскопа непосредственно неприложим (см. упражнение 120). Аббе указал весьма интересный прием определения разрешающей силы для случая освещенных объектов и нашел, что и в данном случае разрешающая сила также определяется числовой апертурой объектива. Метод рассмотрения Аббе состоит в следующем.

Свет, освещающий объект, попадает на линзу микроскопа, претерпев рассеяние (дифракцию) на деталях объекта, так что структура светового пучка зависит от этого объекта. Рассмотрим для простоты случай, когда освещение производится параллельным пучком (дифракция Фраунгофера), а объект имеет простую форму [1]), например, представляет собой правильную решетку, т.е. последовательность прозрачных полосок, разделенных непрозрачными. Период решетки d и является в этом случае характеристикой детали, а разрешающая сила микроскопа определяет возможность различить при помощи микроскопа более или менее мелкую решетку, т.е. минимальное значение d.

Дифракция параллельного пучка на рассматриваемой структуре дает в фокальной плоскости FF объектива (рис. 15.3) ряд главных

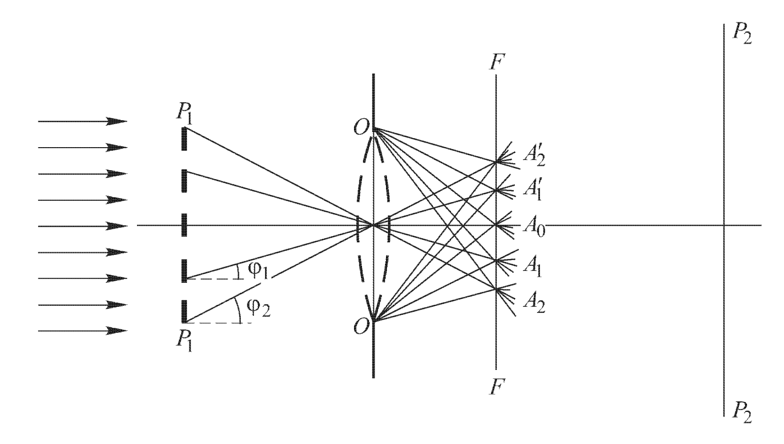


Рис. 15.3. К дифракционной теории микроскопа Аббе (масштаб рисунка искажен — расстояние от FF до P_2P_2 значительно больше фокусного расстояния объектива)

максимумов, угловые расстояния между которыми определяются периодом решетки. Если падающие пучки нормальны к поверхности объекта и направлены вдоль оси системы, то положение этих мак-

[1]) Все выводы, полученные с такими простыми объектами, можно перенести и на объекты любого вида, пользуясь соображениями, изложенными в § 52, 53.

симумов задается условием $d \sin \varphi = m\lambda_0$, где m — целое число, определяющее порядок максимумов. На оси микроскопа лежит нулевой максимум A_0 ($m = 0$), максимумы первого порядка A_1 и A_1' лежат по направлениям, определяемым из соотношения $\sin \varphi_1 = \pm\lambda_0/d$, максимумы второго порядка A_2 и A_2' — по направлениям, определяемым из соотношения $\sin \varphi_2 = \pm 2\lambda_0/d$, и т.д. Так как все эти дифракционные максимумы соответствуют когерентным лучам, то за фокальной плоскостью объектива эти лучи, встречаясь, интерферируют между собой, давая в плоскости P_2P_2, сопряженной с плоскостью предмета P_1P_1 относительно объектива OO, изображение самого предмета. Таким образом, и совокупность дифракционных максимумов в плоскости FF, и окончательная картина в плоскости P_2P_2, даваемая объективом, зависят от предмета и служат его изображением.

Аббе называет картину в фокальной плоскости объектива *первичным изображением*, а картину в плоскости P_2P_2 — *вторичным изображением* предмета. Иногда картину в FF называют *спектром* (по аналогии с обычным применением решеток или структур), а картину в P_2P_2 — просто *изображением* объекта.

Нетрудно видеть, что для получения правильного изображения предмета надо, чтобы изображение в плоскости P_2P_2 образовывалось в результате взаимодействия лучей, идущих от *всех* максимумов A_1, A_1', A_2, A_2' и т.д. Действительно, предположим, что какое-либо препятствие задержало все лучи, идущие от A_1, A_1', A_2, A_2' и т.д., оставив лишь свет от A_0. В таком случае изображение на экране P_2P_2 должно было бы передавать такой объект, дифракционный спектр которого (первичное изображение) сведется к одному центральному максимуму. Но такой случай может иметь место, лишь если параллельный пучок не претерпел никакой дифракции на предмете, т.е. если предмет отсутствует, и в плоскости P_2P_2 получится равномерная освещенность без всякого изображения. Если бы мы задержали все дифракционные максимумы нечетных порядков (например, A_1, A_1', A_3, A_3' и т.д.), то вторичное изображение соответствовало бы тому первичному, которое состоит из A_0, A_2, A_2', A_4, A_4' и т.д., т.е. совокупности максимумов, которые были бы обусловлены наличием в P_1P_1 решетки с периодом, в два раза меньшим; мы увидели бы на экране P_2P_2 изображение более *частой* решетки, чем имеющаяся в действительности.

Только полная совокупность дифракционных максимумов определит вторичное изображение в соответствии с объектом. Впрочем, совокупность максимумов, расположенных по одну сторону от центра (например соответствующих положительным m), достаточна для передачи всех деталей, ибо остальные лишь усиливают яркость, не меняя подробностей картины. Особое значение имеют максимумы первых порядков, расположенные под малыми углами и обусловленные более крупными и обычно более важными деталями строения, определяющими в основном вид реального объекта. Максимумы, лежащие под большими углами, определяются главным образом более мелкими деталями предмета, могущими, впрочем, быть очень характерными. Так, например, в случае объекта в виде бесконечной решетки спектры первого порядка достаточны для образования изображения в виде пе-

риодической структуры правильного периода, но с плавным переходом от светлых мест к темным [1]). Для правильной передачи не только периодичности структуры, но и характерного для нашей решетки резкого перехода от света к темноте, необходимо, чтобы в образовании изображения участвовали и спектры высших порядков. Очень мелкие детали (элементы структуры меньше длины волны) вообще не могут быть наблюдаемы, ибо волны, дифрагировавшие на таких деталях, не доходят до экрана P_2P_2 даже при максимально возможной апертуре объектива $u = 90°$. Этим соображением можно воспользоваться, чтобы установить предел разрешения деталей $d \geqslant \lambda = \lambda_0/n$, где λ_0 — длина волны в вакууме, а n — показатель преломления среды, в которую погружен объект.

Помещая в плоскости FF экраны с соответственно расположенными отверстиями, т.е. пропуская только A_0 или только четные максимумы и т.д., мы можем без труда наблюдать в плоскости P_2P_2 описанные искажения изображения или даже равномерное освещение без изображения. Эти опыты, осуществленные Аббе, очень помогают уяснению его способа рассуждения.

Из изложенного ясно, что для получения правильного изображения надо, чтобы через объектив микроскопа и далее проникали дифракционные пучки всех направлений. Обычно внутри микроскопа не ставится препятствий, так что опасность представляет лишь входной зрачок, которым служит оправа объектива, ограничивающая его рабочее отверстие [2]). Чем меньше предмет или его деталь d, тем бóльшие углы дифракции он обусловливает и тем шире должно быть отверстие объектива. Отверстие объектива определяется углом $2u$ между крайними лучами, идущими от объекта (расположенного у фокуса) к краям объектива. Половина этого угла носит название *апертуры*. Если апертура меньше φ_1 — угла дифракции, соответствующего спектрам первого порядка, т.е. $\sin u < \sin\varphi_1 = \lambda_0/d$, то в микроскоп проникнут только лучи от центрального максимума и мы не увидим изображения, соответствующего деталям, определяемым величиной d, т.е. в случае нашей решетки будем иметь равномерное освещение. Таким образом, условие $\sin u \geqslant \lambda_0/d$ есть условие, необходимое для разрешения деталей d. В крайнем случае ($\sin u = \lambda_0/d$) мы жертвуем максимумами высших порядков, т.е. как сказано, несколько ухудшаем качество изображения. Чем больше $\sin u$ по сравнению с λ_0/d, тем больше спектров высших порядков участвует в построении изображения, т.е. тем точнее передается наблюдаемый объект.

Если между предметом и объективом находится среда с показателем преломления n, то вместо λ_0 войдет $\lambda = \lambda_0/n$ и условие разреше-

[1]) Так как спектры только первого порядка получаются в случае дифракции на решетке Рэлея (см. § 51 и упражнение 76). При наблюдении соответствующего объекта глазом мы можем судить только о плавном изменении коэффициента пропускания; эффект же, связанный с обращением фазы, ускользает от непосредственного наблюдения.

[2]) Впрочем, у сильных объективов нередко применяется специальная апертурная диафрагма, которая и определяет размер зрачка.

ния будет

$$d \geqslant \frac{\lambda_0}{n \sin u}. \tag{97.3}$$

Обычно при освещении объекта используются не только пучки, идущие вдоль оси, но и пучки, наклонные к ней. Это обстоятельство улучшает условие разрешения.

Если освещающий пучок идет под углом α к оси микроскопа и дифрагирует под углом α_0 (рис. 15.4), то условие максимумов (см. § 47) есть

$$\sin \alpha_0 - \sin \alpha = \frac{m\lambda}{d}. \tag{97.4}$$

Условие, при котором хотя бы первый спектр попадает в объектив, имеет вид

$$\alpha = -u, \quad \alpha_0 = u, \quad m = +1. \tag{97.5}$$

Условие разрешения записывается в виде

$$2 \sin u \geqslant \frac{\lambda}{d} = \frac{\lambda_0}{nd}, \tag{97.6}$$

или

$$d \geqslant \frac{\lambda_0}{2n \sin u} = \frac{0{,}5\lambda_0}{n \sin u}. \tag{97.7}$$

Итак,

$$d \geqslant \frac{0{,}5\lambda_0}{n \sin u} = \frac{0{,}5\lambda_0}{A}, \tag{97.8}$$

где $A = n \sin u$ означает, как и выше, числовую апертуру объектива.

Таким образом, как для освещенных, так и для самосветящихся объектов разрешающая сила микроскопа зависит от числовой апертуры A.

Для повышения разрешающей способности микроскопа выгодно применение более коротких волн (ультрафиолет) и увеличение числовой апертуры. Для последней цели служит применение *иммерсионных* систем, в которых пространство между предметом и объективом заполняется средой с показателем преломления $n > 1$. Подбирая n около 1,5 (кедровое масло), мы не только увеличиваем числовую апертуру, но и получаем ряд других преимуществ (см. § 92). В объективах современных микроскопов числовая апертура достигает значительных величин. Для «сухих» систем $n = 1$ и $\sin u$ практически доходит до 0,95, так что возможно разрешение деталей, имеющих размеры около половины длины световой волны. С иммерсионными системами достигается разрешение в полтора раза большее.

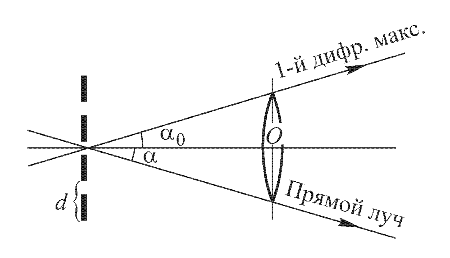


Рис. 15.4. Значение косых пучков для повышения разрешающей способности микроскопа

Метод Аббе не только позволяет вывести значение разрешающей способности для освещенных объектов, но и показывает, что результаты наблюдения в микроскоп могут сильно зависеть от условий на-

блюдения. Выводы Аббе получают особое практическое значение, так как Л.И. Мандельштаму удалось показать, что они сохраняют свою силу не только для освещенных (когерентность), но и для самосветящихся объектов. Рассматривая дифракцию на выходном зрачке объектива, Мандельштам показал, что от размеров и формы зрачка или от внесения каких-либо новых ограничительных диафрагм зависят те искажения, которые иногда обнаруживает изображение по сравнению с очертаниями объекта, совершенно так же, как это имеет место в теории Аббе для освещенных объектов. Мандельштам установил, что при грубых по сравнению с длиной волны структурах *самосветящиеся* объекты вполне эквивалентны освещенным равномерно со всех сторон. Опыты с накаленными и освещенными сетками в качестве объектов, выполненные Л.И. Мандельштамом, подтверждают эти заключения.

Распространение указанных выводов на самосветящиеся объекты (отсутствие когерентности) особенно важно потому, что и при освещенном объекте далеко не всегда имеет место полная когерентность. Точки освещенного объекта посылают вполне когерентный свет только в том случае, если угловые размеры источника настолько малы, что угол, под которым он виден из места расположения предмета, мал по сравнению с λ/d, где λ — длина световой волны, а d — расстояние между освещаемыми точками объекта. Действительно, в этом случае волны, доходящие от *разных* точек источника до освещаемых точек, имеют различие в фазах, малое по сравнению с 2π (см. упражнение 129), так что интерференция волн, рассеиваемых нашими точками, даст практически один и тот же эффект, от какой бы точки источника ни пришла освещающая волна (когерентность). Наоборот, когда угловые размеры источника велики по сравнению с λ/d, то свет, приходящий к освещаемым точкам от *разных* точек источника, будет иметь всевозможные разности фаз от нуля до 2π, и, следовательно, рассеянные нашими точками волны могут давать самые разнообразные интерференционные картины (некогерентность). При промежуточных размерах источника когерентность будет осуществляться в большей или меньшей мере. В реальных условиях освещение объекта в микроскопе производится широкими пучками лучей, и полная когерентность, как правило, не имеет места.

Сказанное подтверждается расчетами, проведенными в § 22, согласно которым размер области когерентности в плоскости освещаемого объекта есть $2l_{\text{ког}} = \lambda/\theta$, где θ — угловые размеры источника. Если $2l_{\text{ког}}$ меньше минимально разрешаемого интервала d, то мы имеем дело с некогерентным освещением; в противоположном случае $2l_{\text{ког}} = \lambda/\theta \gg d$ разрешаемое расстояние находится внутри области когерентности, и освещение следует считать когерентным. Следовательно, и при таком способе рассуждений мы приходим к сделанным выше заключениям.

Вопрос о роли частичной когерентности освещения объектов в микроскопе был обстоятельно исследован Д.С. Рождественским [1]), который

[1]) Д. С. Р о ж д е с т в е н с к и й. Избранные труды.– М.: Наука, 1964, с. 197.

рый дал количественное описание явлений с помощью фактора, называемого степенью пространственной когерентности γ_{12} (см. § 22), крайние значения которого — нуль и единица. Рассмотрев с указанной точки зрения вопрос о рациональном освещении при микроскопических наблюдениях, Рождественский разъяснил этот важный вопрос и даже осуществил осветитель, дающий при малой мощности источника наивыгоднейшие условия ярко освещенного поля зрения при самых сильных объективах.

Прекрасный пример значения правильного истолкования результатов микроскопического наблюдения приводит Я.Е. Элленгорн [1]). На

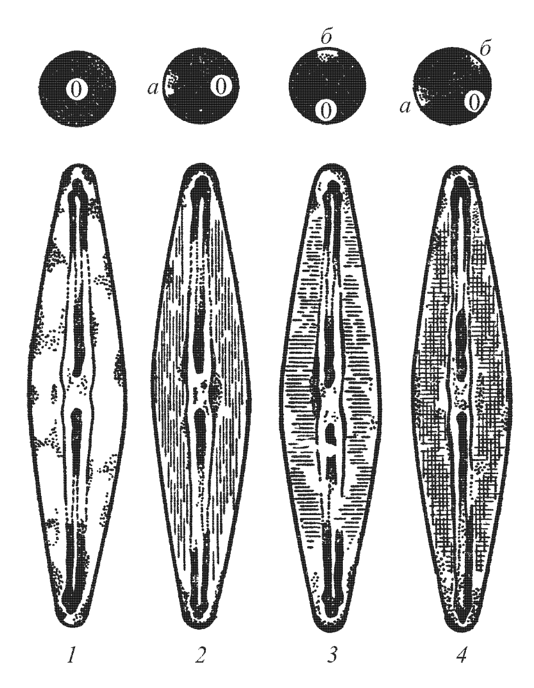


Рис. 15.5. Влияние характера освещения на изображение в микроскопе

рис. 15.5 изображены четыре микрозарисовки одного и того же препарата (панцирь диатомовой водоросли) при различных способах освещения.

Над каждой зарисовкой показано, какой вид имеет световой пучок, проходящий через фокальную плоскость объектива. Зарисовка *1* — проходит только центральный максимум 0, панцирь кажется гладким, без деталей; *2* — центральный 0 и один боковой дифракционный максимум *а* — панцирь имеет продольную структуру; *3* — центральный 0 и один верхний дифракционный максимум *б* — панцирь имеет

[1]) Я. Е. Элленгорн. Ботанический журнал, 1940.

поперечную структуру; *4* — центральный 0 и по одному максимуму *а* и *б* — панцирь имеет структуру в виде сетки.

Таким образом, очевидно, что структура панциря напоминает сетку, но в зависимости от метода наблюдения может казаться гладкой или снабженной продольными или поперечными полосами. Между тем раньше ботаники полагали, что они имеют дело с различными разновидностями диатомовой водоросли.

§ 98. Электронный микроскоп

Так как числовую апертуру нельзя значительно повысить, то единственный способ увеличения разрешающей способности микроскопа состоит в переходе к более коротким волнам.

Применение ультрафиолетовых лучей, требующее изготовления оптики микроскопа из соответствующих материалов (кварц, флюорит) или использования отражательной оптики, ограничено длинами волн 250–200 нм, ибо большинство объектов, подлежащих наблюдению, сильно поглощает короткий ультрафиолет. Таким образом, на этом пути возможно увеличение разрешающей силы примерно в два раза, что и осуществлено в современных ультрафиолетовых микроскопах, причем, конечно, необходимо применять фотографический метод наблюдения.

Использование ультрафиолета дает еще одно важное преимущество. Многие объекты, особенно биологические, во всех своих частях одинаково прозрачны для видимого света, вследствие чего их наблюдение в видимом свете затруднено. Но для ультрафиолетового света обнаруживается значительное различие в показателе поглощения разных частей объекта, так что соответствующие микрофотографии оказываются достаточно контрастными. Е.М. Брумберг разработал весьма остроумную систему, позволяющую превосходно использовать различие в поглощении разных длин волн. Снимая препарат в трех группах длин волн и рассматривая все три фотографии одновременно в специальном приборе, снабженном тремя светофильтрами, соответственно передающими различие в этих трех группах длин волн, мы получаем по методу Брумберга очень богатое деталями изображение с разрешением, соответствующим короткой длине волны, примененной при фотографировании.

Для дальнейшего увеличения разрешающей способности микроскопа следовало бы перейти к рентгеновским лучам. Но изготовление соответствующей оптики для получения изображения в рентгеновских лучах встречает весьма большие затруднения.

Однако развитие современной теоретической физики привело к мысли, что распространение потока любых материальных частиц управляется волновыми законами, так же как и в случае светового потока. Это значит, что строгое решение задачи о движении частиц под действием сил может быть получено лишь путем рассмотрения распространения соответствующих волн. Не останавливаясь на природе таких волн, укажем лишь, что длина их связана с массой m и скоростью v движущихся частиц формулой $\lambda = h/mv$ (де Бройль, 1923 г.),

где $h = 6{,}624 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка. Отсюда видно, что чем больше масса частицы и чем больше ее скорость, тем меньше длина волны. Но даже для частиц с наименьшей известной массой, для электронов ($m \approx 0{,}9 \cdot 10^{-27}$ г), движущихся с умеренной скоростью, соответствующая длина волны очень мала. Так, например, для электронов, ускоряемых разностью потенциалов в 150 В, $\lambda = 1$ Å [1]). Для более быстрых электронов, а также для атомов, молекул или же тел еще большей массы длина волны будет гораздо более короткой. Таким образом, законы распространения даже наиболее легких частиц (электронов) соответствуют законам распространения очень коротких волн.

В этом случае строгое решение задачи, основанное на волновой теории, практически не отличается от решения, найденного методом геометрической (лучевой) оптики. Установив, как зависит показатель преломления от свойств среды, т.е. от силовых полей, в которых движется электрон, мы можем рассчитать его движение по правилам геометрической оптики. С другой стороны, можно рассчитать движение электрона по обычным законам механики, зная силы, действующие на электрон. На возможность рассмотрения механической задачи с оптической точки зрения указывалось уже давно. Более 100 лет назад Гамильтон (около 1830 г.) показал, что уравнениям механики можно придать вид, вполне аналогичный уравнениям геометрической оптики. Первые можно представить в виде соотношения, выражающего принцип наименьшего действия (принцип Мопертюи, из которого можно получить уравнения ньютоновой механики), а вторые — в виде соотношения, выражающего принцип наименьшего оптического пути (принцип Ферма, из которого следуют законы геометрической оптики, см. § 69). Оба эти принципа имеют вполне тождественное выражение, если *подходящим образом ввести понятие* показателя преломления. Блестящим результатом современной теории является то обстоятельство, что устанавливаемый ею показатель преломления связан с параметрами, характеризующими силовые поля, в которых движется частица, *именно так*, как требуется для отождествления принципа наименьшего действия с принципом Ферма. Так, например, для частицы, движущейся в силовом поле, характеризуемом потенциалом W, показатель преломления среды согласно современной теории имеет вид

$$n = \sqrt{\frac{2(E-W)}{mc^2}}\,,$$

где E — энергия движущейся частицы, m — ее масса и c — скорость света; именно при такой связи траектория частицы, по Гамильтону, идентична световому лучу.

Способы расчета электронных путей в электромагнитных полях (независимо от того, применяются ли методы механики или геомет-

[1]) Для численных расчетов длины волны, связанной с электроном, формуле де Бройля удобно придать вид $\lambda = 12{,}24/\sqrt{V}$ ангстремов, где разность потенциалов V выражена в вольтах.

рической оптики) позволяют установить условия, при которых электроны, вышедшие из какой-либо точки (источник), соберутся вновь в какой-то точке (стигматическое изображение). Совокупность электрических или магнитных полей, в которых должен двигаться электрон для получения такого изображения, представляет собой «электронные линзы» (магнитные или электростатические), играющие в электронной оптике такую же роль, как обычные линзы в геометрической оптике[1]). При подходящих условиях (параксиальные пучки или соответствующим образом рассчитанные «исправленные» электронные линзы) источник электронов может дать достаточно хорошее изображение.

Изображение это можно сфотографировать (если электроны попадают на фотопластинку) или наблюдать непосредственно глазом (если электроны падают на флуоресцирующий экран, светящийся под действием их ударов). На этом принципе построены многочисленные электронно-оптические системы, играющие важную роль в современной технике. Одной из таких систем является электронный микроскоп, схематически изображенный на рис. 15.6. Как мы видим, электронный микроскоп состоит из элементов, вполне эквивалентных элементам, составляющим обычный оптический микроскоп. Объект может быть «самосветящимся» — сам служить источником электронов (накаленный катод или освещаемый фотокатод), или «освещенным», представляя собой препарат, на который падает поток электронов (обычно от накаленного катода); конечно, препарат должен быть достаточно тонким, а электроны достаточно быстрыми, чтобы они

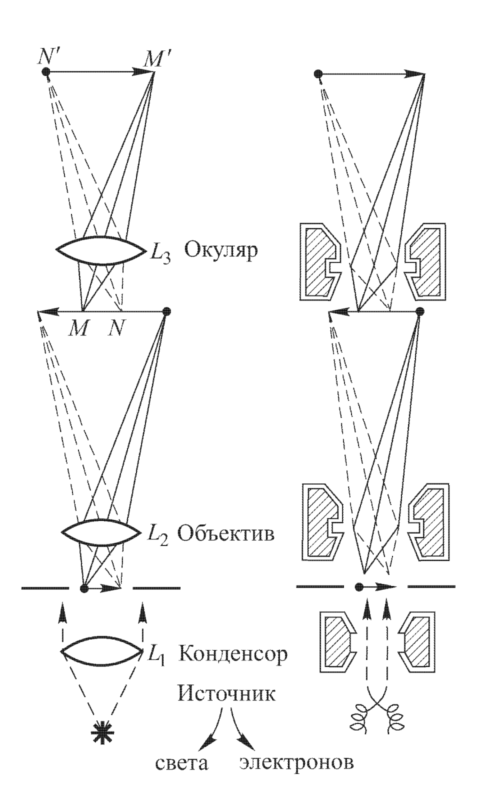


Рис. 15.6. Схема устройства электронного микроскопа (для сравнения рядом изображена схема оптического микроскопа)

[1]) Влияние электрических и магнитных полей на путь электронов (фокусирующее действие) рассматривается в курсах электричества (см., например, С. Г. Калашников. Электричество.– М.: Физматлит, 2003, § 208–210).

проходили сквозь препарат и проникали в «оптическую» систему. Впрочем, подобное же требование «прозрачности» мы предъявляем и к препаратам, рассматриваемым в обычном оптическом микроскопе.

Расчет электронного микроскопа по правилам геометрической оптики является вполне естественным, ибо, как мы видели, длина волны, соответствующая электронам, очень мала. Она имеет порядок нескольких тысячных нанометра, ибо обычно применяются электроны с довольно большими скоростями (соответствующими ускоряющей разности потенциалов 40–60 кВ). Тем не менее, как мы видели в § 97, для рассмотрения основного вопроса о разрешающей силе микроскопа надо принять во внимание, что длина волны не бесконечно мала. Применяя формулу $d \geqslant \lambda_0/A$, найдем, что разрешающая сила электронного микроскопа может быть сделана несравненно большей, чем у обычного микроскопа. Действительно, длина волны в случае электронного микроскопа в 10 000–100 000 раз меньше, чем для обычного; поэтому, хотя числовая апертура для электронных «объективов» пока еще невелика ($A \approx 0{,}01 - 0{,}1$), все же теоретическая разрешающая сила электронного микроскопа превосходит разрешающую силу оптического микроскопа в несколько тысяч раз. Другими словами, если в оптическом микроскопе мы в состоянии различать детали порядка 200–300 нм, то с помощью электронного микроскопа можно надеяться иметь изображения объектов порядка 0,1 нм, т.е. увидеть атомы и молекулы.

Лучшие из существующих в настоящее время электронных микроскопов обладают разрешающей способностью около 0,1 нм.

В СССР первые весьма совершенные электронные микроскопы были построены под руководством акад. А.А. Лебедева.

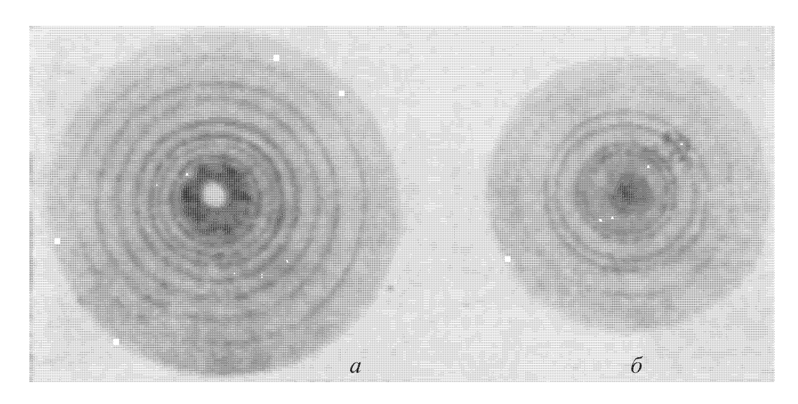


Рис. 15.7. Дифракционные кольца, получаемые при прохождении через металлическую фольгу рентгеновских лучей (*а*) и электронного пучка (*б*)

Принципиальное ограничение разрешающей силы электронного микроскопа лежит, конечно, так же как и в случае обычного оптического микроскопа, в дифракционных явлениях, обусловливаемых волновой природой электронов. Такую дифракцию электронов мож-

но наблюдать непосредственно, если подобрать условия опыта в соответствии с изложенным выше, т.е. так, чтобы линейные размеры пространственных неоднородностей среды, сквозь которую проходит пучок электронов, были сравнимы с длиной волны этих электронов. Последняя близка к длине волны рентгеновских лучей, и поэтому условия наблюдения дифракции электронов и рентгеновских лучей сходны друг с другом. Действительно, Девиссон и Джермер (1927 г.) и Г.П. Томсон (1928 г.) осуществили опыты по дифракции электронов, вполне аналогичные опытам по дифракции рентгеновских лучей.

На рис. 15.7 приведены изображения дифракционной картины, возникающей при прохождении рентгеновских лучей (*а*) и электронного пучка (*б*) через тонкую золотую фольгу (кольца Дебая–Шерера, см. § 118). Подобные дифракционные опыты были осуществлены также с пучками молекул и с пучками нейтронов.

§ 99. Метод темного поля (ультрамикроскопия). Метод фазового контраста

Формула, определяющая разрешающую способность микроскопа, показывает предельный размер частицы, которую можно увидеть или сфотографировать при помощи микроскопа, т.е. частицу, изображение которой передает без искажения ее действительные очертания. Правильные изображения частиц меньших размеров получить нельзя. Однако само существование таких малых, ультрамикроскопических частиц, их положение и движение можно установить при помощи микроскопа при специальном способе наблюдения. Способ этот основан на явлении рассеяния света на малых частицах.

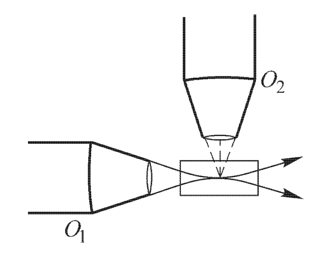


Рис. 15.8. Схема простейшего ультрамикроскопа

Схема расположения приборов изображена на рис. 15.8. Интенсивный пучок света концентрируется при помощи объектива O_1 на камере, где подозревают наличие ультрамикроскопических объектов. Если таких объектов или более крупных частиц в камере нет, то свет от объектива O_1 проходит по горизонтальному направлению, не попадая в верхний объектив [1]). Если же на пути лучей имеются частицы, то свет рассеивается ими, попадает в объектив O_2 и дает в вертикальном микроскопе дифракционную картину, позволяющую определить положение и перемещение ультрамикроскопической частицы, но дающую лишь весьма несовершенное представление о ее форме. Очень малые частицы (например, коллоидальные частицы металлов размером около $5 \cdot 10^{-6}$ мм) наблюдаются в виде блестящих звездочек на черном фоне.

[1]) Молекулярное рассеяние света, имеющее место даже и во вполне чистой, лишенной посторонних частиц однородной среде настолько слабо, что мы его в расчет не принимаем.

В ультрамикроскопе осуществляется принцип *темного* поля, состоящий в том, что мы устраняем из поля зрения прямые лучи и наблюдаем лишь лучи дифрагировавшие. Этот принцип реализуется в целом ряде приспособлений. В частности, на нем основано применение специальных конденсоров (рис. 15.9), создающих такое освещение препарата на микроскопическом столике, при котором на него падает интенсивный пучок косо направленных лучей, непосредственно в объектив не попадающих. Центральные лучи задерживаются специальной непрозрачной ширмой, а боковые лучи претерпевают полное внутреннее отражение, отражаются от зеркальной поверхности и концентрируются на объекте. Направление их таково, что в объектив они не попадают; только лучи, претерпевшие дифракцию на объекте (рассеянные объектом), могут попасть в объектив. Если объекты довольно значительны (больше $\lambda/2$), то в объектив попадают одновременно дифракционные спектры разных порядков и мы увидим изображение, имеющее форму объекта. Если же значительная часть дифрагировавших пучков не попадает в объектив, то может наблюдаться изображение, заметно отличное по форме от объекта, или даже просто светлая точка на черном фоне, не дающая никакого представления о форме объекта. Подобные конденсоры разных систем (параболоид-конденсор, кардиоид-конденсор) находят широкое применение в микроскопии. Об усовершенствовании ультрамикроскопического метода наблюдения говорилось в § 45.

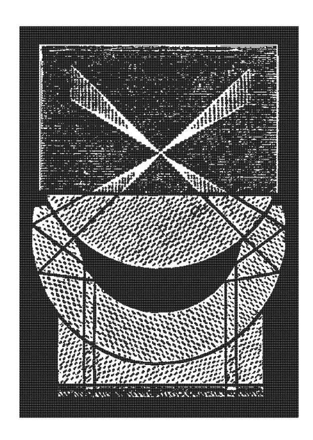


Рис. 15.9. Разрез специального конденсора для осуществления метода темного поля

Описанные микроскопические методы могут быть весьма полезными для таких объектов, которые выделяются на фоне всего поля зрения вследствие своей способности иначе поглощать свет, чем окружающая среда (абсорбционные структуры). В микроскопической же практике (например, в биологии) очень распространено наблюдение объектов, отличающихся от окружающей среды главным образом по своему показателю преломления (рефракционные структуры). Этот метод заслуживает специального рассмотрения.

Как уже указывалось в § 48, рефракционные структуры, вносящие изменение не в амплитуду, а в фазу проходящей волны, дают прекрасно выраженную дифракцию (например, фазовые дифракционные решетки). Однако такие структуры нельзя непосредственно рассматривать или сфотографировать, ибо наши приемники реагируют не на фазу, а на амплитуду (интенсивность), которая остается неизменной при прохождении через разные участки рефракционной структуры. Может показаться, что этот результат опровергает пригодность метода рассмотрения Аббе: при одинаковых первичных изображениях (спектрах) мы получаем совершенно различные вторичные изображе-

ния. Затруднение объясняется просто: дифракционные спектры тех и других структур могут не отличаться по амплитудам, но фаза нулевого спектра в случае рефракционных структур отличается на $\pi/2$ от фазы спектров остальных порядков. Это и приводит к различию во вторичных изображениях, где происходит суммирование всех спектров. Если, однако, изменить фазу нулевого спектра на $\pi/2$, то мы устраним различие между тем, что дают абсорбционные и рефракционные структуры, и сможем увидеть эти последние. Те места структуры, которые дают большее изменение в фазе, можно сделать темными или светлыми в зависимости от того, будет ли добавочная разность фазы в нулевом спектре равна $+\pi/2$ или $-\pi/2$.

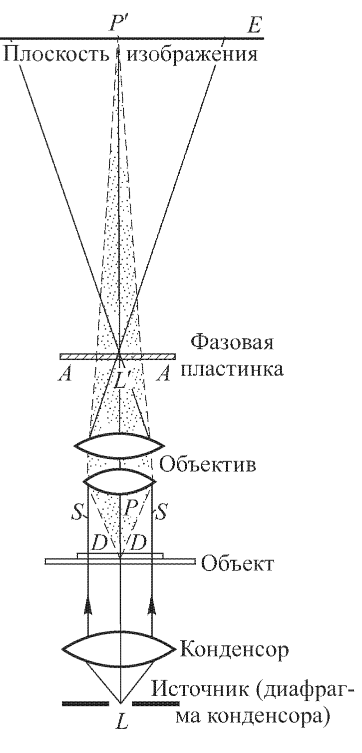


Рис. 15.10. Схема наблюдения рефракционной структуры

Следующие элементарные рассуждения позволяют понять различие в фазе между прямым светом (нулевой максимум) и рассеянным (свет дифракции остальных порядков).

Представим себе объект в виде однородной прозрачной среды, отдельные участки которой, будучи также прозрачными, слегка отличаются по показателю преломления (рефракционная структура). Объект освещен с помощью конденсора параллельным пучком света (рис. 15.10). Если бы различия в показателе преломления участка объекта и окружающей среды не было, то свет сквозь препарат прошел бы без отклонения, давая неотклоненную волну (P). При наличии указанного различия в показателе преломления часть света испытает рассеяние (дифракцию), давая отклоненную волну D, а большая часть S пройдет по первоначальному направлению (спектр нулевого порядка), но испытает по сравнению с волной P некоторое смещение по фазе, например запаздывание, если показатель преломления этого участка больше, чем показатель преломления окружающей среды.

График на рис. 15.11 показывает этот небольшой сдвиг фазы между неотклоненной волной P и «запоздавшей» волной S. Разность обеих волн и представляет собой дифрагировавшую волну D. Так как P и S близки по амплитуде и немного отличаются по фазе, то, как легко видеть из графика или убедиться расчетом (см. упражнение 123), волна D будет иметь небольшую амплитуду и *смещена по фазе* на $\pi/2$ (на четверть волны) по отношению к S (а следовательно, и к P).

В обычном микроскопе в построении изображения участвуют и S, и D, давая в совокупности волну P, не отличающуюся от того, что дают места, соседние со структурой (ибо предполагается, что абсорбция отсутствует). Таким образом, обычный микроскоп не позволяет отличать разные участки рефракционной структуры. Задержав S, мы получим микроскоп с темным полем, в котором структура уже может наблюдаться благодаря наличию дифрагировавшей волны D. Изменив же фазу S на $\pm\pi/2$, мы заставим S и D складываться так, чтобы дать усиление по сравнению с P (если фазы S и D уравниваются) или ослабление по сравнению с P (если фазы S и D делаются противоположными), т.е. получаем более *контрастное изображение*, светлое или темное на окружающем поле (рис. 15.12 *а*, *б*).

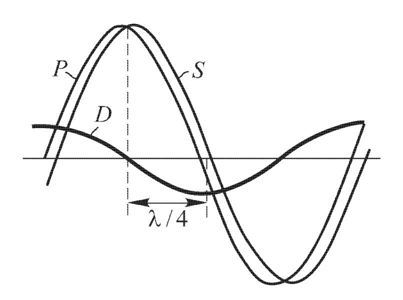


Рис. 15.11. Образование дифрагировавшей волны D при наблюдении рефракционной структуры

Так как S и D сильно отличаются по амплитуде, то для получения наибольшего контраста полезно с помощью поглощающего фильтра ослабить интенсивность S (а вместе с тем и P) до интенсивности D.

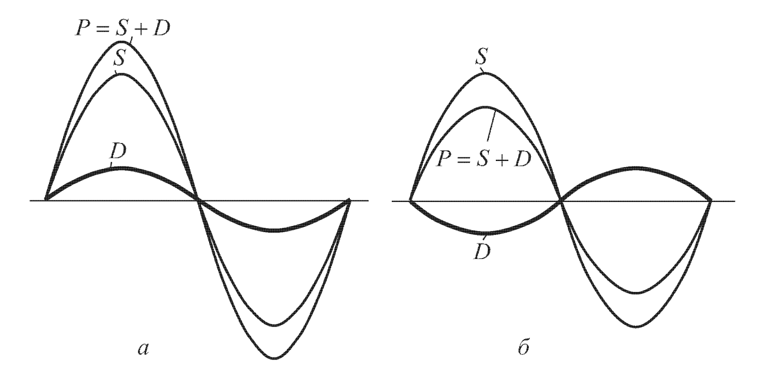


Рис. 15.12. Принцип метода фазового контраста: *а* — волны S и D в фазе; *б* — волны S и D противоположны по фазе

Тогда интерференционный эффект даст заметное усиление или почти полное ослабление в изображении объекта на фоне, обусловленном уменьшенной интенсивностью волны P. Поэтому пластинка, предназначенная для изменения фазы S на $+\pi/2$ или $-\pi/2$, обычно одновременно используется и для соответствующего ослабления S. Имея набор таких пластинок с разными коэффициентами ослабления, можно подобрать наивыгоднейшие практические условия наблюдения. Место расположения такой ослабляющей и изменяющей фазу пластинки нетрудно видеть из рис. 15.10. Если препарат освещен параллельным

пучком, то неотклоненная волна (S или P) собирается в фокальной плоскости объектива AA и далее расходится по всей плоскости изображения EE. Дифрагировавшая (отклоненная) волна D дает изображение в плоскости EE, которая является сопряженной с плоскостью объекта по отношению к объективу микроскопа.

В фокальной плоскости объектива AA и должна быть расположена фазовая пластинка, ослабляющая S (и P) и сообщающая добавочную разность фаз.

Фазовая пластинка представляет собой пластинку из прозрачного материала, имеющую соответствующее утолщение или утоньшение на месте нулевого максимума. Эта же часть пластинки покрывается поглощающим слоем с той или иной абсорбционной способностью.

Нулевой максимум есть изображение источника света, образуемое конденсором и объективом. Обычно источником служит диафрагма, расположенная в фокальной плоскости конденсора. Форма выреза этой диафрагмы и определяет форму нулевого максимума, а следовательно, и форму утолщения (утоньшения) фазовой пластинки. Из ряда соображений она делается обычно в виде небольшого кольца.

Описанный метод улучшения контрастности изображения прозрачных объектов получил название метода *фазового контраста* (Цернике, 1935 г.). Микроскопы, использующие метод фазового контраста, выпускаются промышленностью и широко применяются в биологических исследованиях.

§ 100. Дифракционные явления в спектрографах (хроматическая разрешающая сила)

Очень большое значение имеют дифракционные явления в спектрографах. Если узкая щель аппарата освещена небольшим удаленным источником света (т.е. почти параллельным пучком), то на объектив коллиматора падает очень узкий пучок света. В таком случае работала бы очень небольшая часть объектива, что соответствовало бы очень малой разрешающей способности его и, следовательно, могло бы повести к нерезкому изображению щели на фотопластинке. Однако на щели происходит дифракция света, ведущая к тому, что коллиматор заполняется светом в соответствии с размерами щели.

При узкой щели апертура коллиматорного объектива должна быть достаточно велика для того, чтобы объектив пропускал как центральный максимум дифракционной картины, так и достаточное число побочных максимумов; вследствие неизбежного дифрагмирования высших дифракционных максимумов изображение щели окажется более или менее расширенным, и притом тем больше, чем меньше апертура коллиматорного объектива. Обычно, однако, объективы спектрографа (и коллиматорный, и камерный) делаются большего размера, чем поперечное сечение призменной системы. Поэтому главную роль в дифракционном расширении изображения щели играет ограничение, обусловливаемое призмой. С другой стороны, призменная система благодаря значительной дисперсии приводит к тому, что фронт немонохроматической падающей плоской волны после прохождения призмы поворачивается для разных длин волн на разный угол, при-

водя к образованию призматического спектра (Ньютон). Угловое расстояние между двумя близкими длинами волн, обусловленное дисперсией, позволяет различить их, пока дифракционное расширение изображения линий не вызовет их достаточно полного перекрытия. Таким образом, дифракция и в этом случае накладывает ограничения на способность спектрального аппарата различать близкие длины волн, т.е. кладет предел *хроматической разрешающей способности* аппарата.

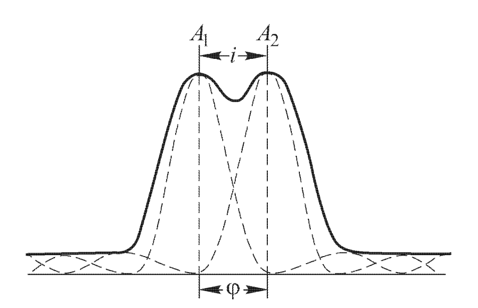


Рис. 15.13. Распределение интенсивности при наложении двух близких спектральных линий

Распределение интенсивности при наложении двух близких монохроматических линий одинаковой интенсивности изображено схематически на рис. 15.13 сплошной линией.

Возможность различения в этой картине двух дискретных длин волн до известной степени условна (ср. § 50, 96). Согласно Рэлею две линии считаются разрешенными, если расстояние между их максимумами A_1A_2, выражаемое в угловой мере через i, больше или равно расстоянию от максимума до ближайшего минимума (угловое расстояние φ), т.е. $i \geqslant \varphi$. Разрешающей способностью аппарата называют величину $\mathscr{A} = \lambda/\delta\lambda$, где $\delta\lambda$ — различие в длинах волн двух ближайших линий, удовлетворяющих приведенному выше условию.

Для простоты расчетов ограничимся наиболее употребительным расположением, когда призма стоит в положении минимального отклонения, т.е. пучок света внутри призмы идет параллельно основанию. На рис. 15.14 A_0B_0 означает положение волнового фронта для

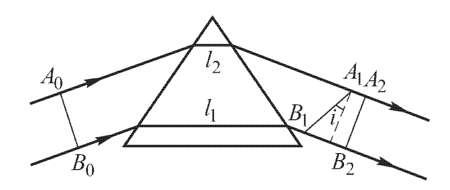


Рис. 15.14. К расчету разрешающей силы спектрографа

обеих длин волн до падения на призму, стоящую *в положении минимального отклонения*, а A_1B_1 и A_2B_2 — положения волновых фронтов для λ_1 и λ_2 после преломления. Угол i есть угол между A_1B_1 и A_2B_2.

Из рис. 15.14 следует, что

$$i \approx \operatorname{tg} i = \frac{B_1B_2 - A_1A_2}{A_2B_2},$$

но

$$A_1A_2 = l_2(n_1 - n_2) = l_2\delta n,$$
$$B_1B_2 = l_1(n_1 - n_2) = l_1\delta n,$$

где l_1 и l_2 — длины пути в верхней и нижней частях призмы и $\delta n = n_1 - n_2$ — разность показателей преломления для λ_1 и λ_2, ибо фронт волны λ_1 отстает от фронта λ_2 вследствие запаздывания в веществе призмы, обусловленного различием в показателях преломления n_1 и n_2 и толщиной проходимого слоя призмы.

Таким образом, $(l_1 - l_2)\delta n$ есть разность хода между волнами λ_1 и λ_2, возникающая вследствие дисперсии в толще призмы на длине $(l_1 - l_2)$. Обозначив *ширину* светового пучка $A_0B_0 = A_2B_2$ через h, найдем

$$i = \frac{l_1 - l_2}{h}\,\delta n.$$

Ширина пучка h определяет дифракционное расширение линии. Так как λ_1 и λ_2 близки между собой, то это расширение для обеих линий можно считать одинаковым и определяемым из условия $h\sin\varphi = \lambda$ (φ — угол дифракции) или

$$\varphi = \frac{\lambda}{h}\,.$$

Итак, условие разрешения двух линий, близких к λ, гласит:

$$i = \varphi$$

или

$$\lambda = \delta n(l_1 - l_2). \qquad (100.1)$$

Наиболее благоприятен случай, когда пучок света захватывает всю призму. При этом $l_2 = 0$ и $l_1 = b$, где b — ширина основания, вдоль которого идет свет при минимуме отклонения. Для этого случая

$$\lambda = b\delta n \quad \text{и} \quad \mathscr{A} = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = b\,\frac{\delta n}{\delta\lambda}\,. \qquad (100.2)$$

Таким образом, хроматическая разрешающая способность призмы равна произведению ее основания на относительную дисперсию показателя преломления.

В случае спектрографов с несколькими призмами из одного материала ($\delta n/\delta\lambda$ одинаково) b равно сумме оснований всех призм. Так, небольшой трехпризменный спектрограф ИСП-51, каждая из призм которого имеет основание около 7 см, в фиолетовой части спектра, где дисперсия $\delta n/\delta\lambda = 0{,}0001$ нм$^{-1}$, имеет теоретическую разрешающую силу $\mathscr{A} = 20\,000$, т.е. на приборе нельзя разрешить две фиолетовые линии, различающиеся меньше чем на 0,02 нм. Реальная разрешающая сила несколько ниже из-за влияния конечной ширины щели, а также вследствие несовершенства оптики спектрографа и зернистой структуры фотоэмульсий.

ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА

Глава XVI

ЕСТЕСТВЕННЫЙ И ПОЛЯРИЗОВАННЫЙ СВЕТ

§ 101. Поперечность световых волн

При изучении явлений интерференции и дифракции вопрос о том, являются ли световые волны продольными или поперечными, имел второстепенное значение (см. § 18).

Из электромагнитной теории света вытекает непосредственно, что световые волны поперечны. Действительно, вся совокупность законов электромагнетизма и электромагнитной индукции, краткое математическое выражение которой заключено в уравнениях теории Максвелла, приводит к выводу, что изменение во времени электрической напряженности **E** сопровождается появлением переменного магнитного поля **H**, направленного перпендикулярно к вектору **E**, и обратно. Такое переменное электромагнитное поле не остается неподвижным в пространстве, а распространяется со скоростью света вдоль линии, перпендикулярной к векторам **E** и **H**, образуя электромагнитные, в частности световые, волны. Таким образом, три вектора: **E**, **H** и скорость распространения волнового фронта **v** взаимно перпендикулярны и составляют правовинтовую систему; т.е. электромагнитная волна поперечна[1]).

Если заданы направление распространения и направление одного из векторов, например **E**, то направление другого (**H**) определяется однозначно. Однако крест векторов **E** и **H** может быть *произвольно* ориентирован относительно направления распространения волнового фронта (или луча).

В каждом отдельном случае имеется *та* или *иная* ориентация векторов **E** и **H** по отношению к волновой нормали и она (или луч) не является осью симметрии электромагнитных волн. Такая асимметрия характерна для *поперечных* волн, продольные же волны всегда симметричны по отношению к направлению распространения. Таким образом, асимметрия относительно луча и является одним из признаков, который отличает поперечную волну от продольной. Этот признак и

[1]) См. сноску на с. 37. Направление распространения потока энергии (вектора Умова–Пойнтинга) совпадает с направлением волновой нормали в средах оптически изотропных. В средах анизотропных несовпадение между волновой нормалью и лучом имеет принципиально важное значение. В данной главе нет различия между направлениями волновой нормали и луча.

был использован для экспериментального доказательства поперечности световых волн задолго до того, как была установлена их электромагнитная природа, делающая эту поперечность самоочевидной.

Орудием опытного исследования асимметрии может, очевидно, служить только система, которая в свою очередь обладает свойством асимметрии. Такой системой, пригодной для исследования свойств светового луча, может служить кристалл, атомы которого располагаются в виде пространственной решетки так, что свойства кристалла по различным направлениям оказываются различными (анизотропия). И действительно, прохождение света через кристаллы и было первым явлением, послужившим к установлению поперечности световых волн.

Еще Гюйгенс (1690 г.), изучая открытое Бартолином (1670 г.) свойство исландского шпата раздваивать проходящие через него световые лучи (двойное лучепреломление), нашел, что каждый из полученных таким образом лучей ведет себя при прохождении через второй кристалл исландского шпата иначе, чем обычные лучи; а именно, в зависимости от ориентации кристаллов друг относительно друга каждый из лучей, раздваиваясь во втором кристалле, дает два луча различной *интенсивности*, а при некоторых ориентировках — только один луч (интенсивность другого падает до нуля). Гюйгенс не нашел объяснения открытому им явлению. Ньютон (1704 г.), обсуждая открытие Гюйгенса, обратил внимание на то, что здесь проявляются основные свойства света («изначальные», как называет их Ньютон), в силу которых луч имеет как бы четыре стороны, так что направление, соединяющее одну пару сторон, неравноправно с перпендикулярным направлением. В силу этого Ньютон видел в световых корпускулах некоторое внешнее сходство с магнитиками, обладающими полюсами, благодаря чему направление вдоль магнитика неравноправно с перпендикулярным направлением.

Много лет спустя Малюс (1808 г.), открывший сходные особенности в свете, отраженном от стекла, ввел для обозначения их термин *поляризация*, по-видимому, под влиянием ньютонова представления.

После установления волновой природы света явление поляризации света подверглось дальнейшему тщательному изучению. Опыты Френеля и Араго по интерференции поляризованных лучей (1816 г.) побудили Юнга высказать догадку о *поперечности световых волн.* Френель, независимо от Юнга, также выдвинул концепцию поперечности световых волн, всесторонне обосновал ее многочисленными важными опытами и положил в основу объяснения явления поляризации света и двойного лучепреломления в кристаллах.

Трудности, связанные с этим, состояли в том, что поперечные колебания и волны не могут иметь места в жидкостях и газах. Упругие же колебания в твердых телах еще не были исследованы к тому времени. Учение Френеля о поперечных световых волнах дало толчок к исследованию свойств упругих твердых тел. Применение полученных знаний к оптике повело к ряду принципиальных затруднений, связанных с несовместимостью механических законов колебаний упругой среды и наблюдаемых на опыте законов оптических явлений. Эти затруднения были устранены только с появлением электромагнитной

теории света. Однако для интересующего нас вопроса о поперечности световых волн механические теории света дали очень много, и плодотворность их для того времени стоит вне сомнения.

§ 102. Распространение света через турмалин

Произведем следующий опыт. Вырежем из кристалла турмалина пластинку T_1 (рис. 16.1), плоскость которой будет параллельна одному из определенных направлений кристаллической решетки, называемому *осью*, и направим сквозь пластинку свет перпендикулярно к поверхности пластинки.

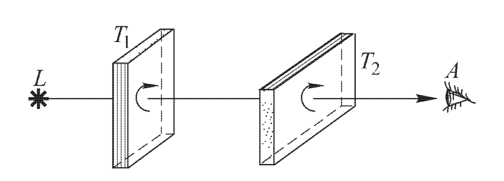


Рис. 16.1. Прохождение света через две пластинки турмалина

Вращая кристалл вокруг направления светового луча, мы не заметим никаких изменений в интенсивности света, прошедшего через турмалин, хотя последний ослабит исходный световой пучок в два раза. Таким образом, световая волна, падающая на турмалин от обычного источника света (например, от электрической дуги L), не обнаруживает асимметрии по отношению к направлению своего распространения. Однако, если поставить на пути луча еще *вторую* аналогичную пластинку турмалина T_2, расположенную параллельно первой (см. рис. 16.1), то картина осложняется.

В зависимости от того, как ориентированы друг относительно друга обе пластинки, меняется интенсивность проходящего через них света. Интенсивность оказывается наибольшей, если оси обеих пластинок *параллельны*; она равна нулю (свет полностью задерживается), если оси пластинок перпендикулярны, и имеет промежуточное значение при промежуточных положениях пластинок. Опыт показывает, что интенсивность пропорциональна $\cos^2\alpha$, где α — угол между осями обеих пластинок.

Полное объяснение наблюдаемым явлениям можно дать, если сделать следующие гипотезы. Во-первых, предположим, что световые волны поперечны, но в свете, исходящем из источника, нет преимущественного направления колебаний, т.е. *все* направления колебаний, перпендикулярные к направлению волны, представлены в падающем свете. Этим объясняется первый опыт, несмотря на допущение поперечности световых волн. Во-вторых, примем, что турмалин пропускает лишь волны, один из поперечных векторов которых, например, электрический, имеет слагающую, параллельную оси кристалла. Именно поэтому первая пластинка турмалина ослабляет исходный световой пучок в два раза. При прохождении световой волны через такой кристалл будет пропущена только часть световой энергии, соответствующая этой слагающей. Когда на кристалл падают электромагнитные световые волны со всевозможными ориентациями электрического вектора, то сквозь него пройдет лишь часть света (половина), так что за кристаллом окажутся волны, направление электри-

ческого вектора которых параллельно оси кристалла. Кристалл, таким образом, *выделяет* из света со всевозможными ориентациями **E** ту часть, которая соответствует одному определенному направлению **E**. Мы будем в дальнейшем называть свет со всевозможными ориентациями вектора **E** (и, следовательно, **H**) *естественным* светом, а свет, в котором **E** (а, следовательно, и **H**) имеет одно-единственное направление, — *плоско-поляризованным*, или *линейно-поляризованным*. Таким образом, турмалин превращает естественный свет в линейно-поляризованный, задерживая половину его, соответствующую той слагающей электрического вектора, которая перпендикулярна к оси кристалла.

Теперь становятся понятными второй опыт и роль второго кристалла турмалина. До него доходит уже поляризованный свет. В зависимости от ориентации второго турмалина из этого поляризованного света пропускается бóльшая или меньшая часть, а именно та часть, которая соответствует компоненте электрического вектора, параллельной оси второго кристалла. Так как электрический вектор волны, прошедшей первый турмалин, имеет по предположению направление, параллельное оси первого кристалла, то амплитуда света, пропущенного вторым турмалином, будет пропорциональна $\cos\alpha$ (α — угол между осями обеих пластинок), а интенсивность пропорциональна $\cos^2\alpha$, что и наблюдается на опыте.

В рамках этих гипотез естественный свет является или линейно-поляризованным светом, направление колебаний которого быстро и совершенно хаотически меняется с течением времени, или же смесью линейно-поляризованных лучей со всевозможными направлениями колебаний.

Мы до сих пор говорили о направлении электрического вектора, параллельного оси турмалина, только для определенности. Рассуждения сохранили бы свою силу, если бы оси турмалина был параллелен магнитный вектор. Впоследствии мы опишем опыты, при помощи которых было установлено, что в проходящем через турмалин свете параллельно оси ориентирован именно электрический вектор (см. ниже § 104).

Плоскость, в которой расположен электрический вектор, называют *плоскостью колебания* поляризованного света, а плоскость, в которой расположен магнитный вектор, иногда называют *плоскостью поляризации*. Эта двойная терминология — плоскость колебания и плоскость поляризации — сложилась исторически при развитии упругой теории света и, несмотря на ее неудобства, до сих пор сохранилась во многих книгах. Описание явлений выигрывает в простоте и ясности, если ограничиться указанием лишь одного направления, например направления колебания электрического вектора, т.е. плоскости колебания — по старой терминологии. В дальнейшем везде, где не будет специальных оговорок, мы под направлением колебания будем всегда подразумевать направление *электрического* вектора.

Описанный опыт с двумя кристаллами турмалина, по существу дела, не отличается от опыта, впервые выполненного Гюйгенсом с двумя кристаллами исландского шпата. Основное отличие турмалина, выгодное для описанного опыта, состоит в том, что турмалин, бу-

лучи также двоякопреломляющим кристаллом, весьма сильно поглощает один из двух преломленных лучей, так что практически тонкая пластинка турмалина пропускает только один из двух преломленных лучей.

Таким образом, явление для наблюдателя кажется проще, ибо внимание не отвлекается вторым лучом, как это имеет место при использовании исландского шпата.

§ 103. Поляризация при отражении и преломлении света на границе двух диэлектриков

Явление поляризации света, т.е. выделение световых волн с определенной ориентацией электрического (и магнитного) вектора, имеет место и при отражении или преломлении света на границе двух изотропных диэлектриков. Этот способ поляризации был открыт Малюсом, который случайно заметил, что при поворачивании кристалла вокруг луча, отраженного от стекла, интенсивность света периодически возрастает и уменьшается, т.е. отражение от стекла действует на свет подобно прохождению через турмалин. Правда, при этом не происходило полного погасания света при некоторых определенных положениях кристалла, а наблюдались лишь его усиление и ослабление.

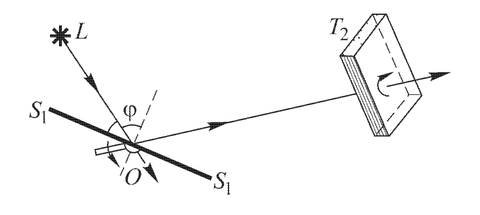


Рис. 16.2. Исследование поляризации при отражении: S_1S_1 — стеклянное зеркало, поляризующее лучи света, T_2 — пластинка турмалина, служащая анализатором

Явление поляризации при отражении и его законы можно изучить следующим образом. Пусть параллельный пучок естественного света (рис. 16.2) падает на стеклянное зеркало S_1S_1, укрепленное на оси O при помощи шарнира. Благодаря такому устройству мы можем при любом угле падения направить ось O вдоль отраженного луча и обеспечить таким образом возможность вращения вокруг него зеркала. Отраженный свет исследуется при помощи пластинки турмалина T_2, также способной поворачиваться вокруг отраженного луча. Глаз наблюдателя при поворачивании T_2 видит ослабление и усиление света.

Понятнее можно обратить опыт, т.е. обменять местами источник света и глаз наблюдателя и использовать стеклянное зеркало в качестве анализатора.

Можно, конечно, обойтись и без турмалина, а использовать два стеклянных зеркала, из которых одно, S_1S_1, служит поляризатором, а второе, S_2S_2, — анализатором. На рис. 16.3 показана схема такого прибора.

Зеркало представляет собой просто пластинку стекла, не покрытую тонким слоем металла, в противоположность зеркалам, применяемым в быту. Наличие металлического слоя испортило бы опыт, так как отражение от металла происходит иначе, чем здесь описано

(см. гл. XXV). В обычном стекле наблюдается отражение света как от передней, так и от задней поверхности; для удобства применяют

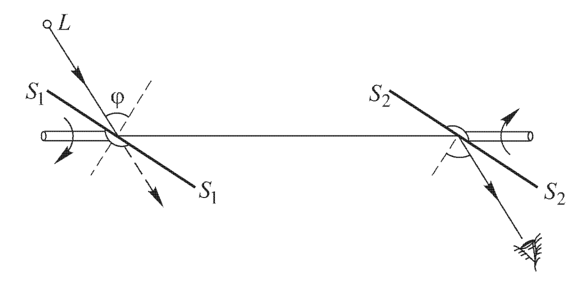


Рис. 16.3. Схема прибора для исследования поляризации при отражении, в котором в качестве поляризатора и анализатора служат стеклянные зеркала S_1S_1 и S_2S_2

нередко стекло, закрашенное с одной стороны черной краской, или непрозрачное (черное) стекло. Можно применять также какой-либо другой полированный *диэлектрик*, например мрамор.

В опытах, схемы которых изображены на рисунках 16.2 и 16.3, интенсивность света доходит до *минимума*, когда плоскость, проходящая через ось кристалла турмалина T_2, параллельна плоскости падения на зеркало S_1S_1 или когда плоскости падения на зеркала S_1S_1 и S_2S_2 перпендикулярны друг к другу. Интенсивность достигает максимума при повороте T_2 или S_2S_2 на 90°. Таким образом, поляризация света, наблюдаемая при отражении от диэлектрика, оказывается *неполной*, или *частичной*, т.е. отраженный луч представляет собой смесь естественного света с некоторой частью поляризованного света. Изменяя угол наклона зеркала S_1S_1 к лучу, мы убеждаемся, что доля поляризованного света зависит от величины угла падения φ, причем с возрастанием угла φ доля поляризованного света растет, и при определенном его значении отраженный свет оказывается *полностью* поляризованным. Величина этого угла *полной поляризации* зависит от относительного показателя преломления n и определяется, как установил Брюстер (1815 г.), соотношением

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = n \tag{103.1}$$

(*закон Брюстера*). При дальнейшем увеличении угла падения доля поляризованного света вновь уменьшается. Нетрудно показать, что при падении под углом полной поляризации луч отраженный и луч преломленный составляют *прямой угол* друг с другом (см. упражнение 141).

Что же касается направления колебания в свете, поляризованном при отражении, то исследование (см. § 104) показывает, что электрический вектор в отраженном свете в случае полной поляризации колеблется перпендикулярно к плоскости падения. При частичной поляризации это направление колебаний является преимущественным, хотя в частично поляризованном свете представлены колебания и других направлений.

Проанализировав преломленный свет, мы убедимся, что он также частично поляризован, и притом так, что колебания происходят преимущественно в плоскости падения. Соединяя свет отраженный и преломленный, мы вновь получаем первичный неполяризованный пучок. Таким образом, пластинка прозрачного диэлектрика *сортирует* лучи естественного света, отражая по преимуществу лучи с одним направлением колебания и пропуская перпендикулярные колебания. Доля поляризованного света в преломленном пучке зависит от угла падения и от показателя преломления вещества.

При падении под углом Брюстера поляризация преломленных лучей максимальная, но далеко не полная (для обычного стекла она составляет около 15 %). Если преломленные и, следовательно, частично поляризованные лучи подвергнуть второму, третьему и т.д. преломлениям, то, конечно, степень поляризации преломленных лучей возрастает.

Если имеется 8–10 пластинок (стопа Столетова), то при падении под углом Брюстера и прошедший, и отраженный пучки практически окажутся вполне поляризованными. Интенсивности отраженного и прошедшего пучков будут равны между собой и составят каждая половину интенсивности падающего (если можно пренебречь поглощением в стекле). Направления же колебания электрических векторов в отраженном и прошедшем пучках будут взаимно перпендикулярны. Такая группа пластинок, именуемая *стопой*, может, следовательно, служить в качестве поляризатора или анализатора как в отраженном, так и в проходящем свете.

Полное решение вопроса о *доле* поляризованного света, наблюдаемого при отражении и преломлении на границе двух диэлектриков, в зависимости от угла падения изложено ниже, в гл. XXIII, где даются так называемые формулы Френеля, из которых следует, в частности, и закон Брюстера.

§ 104. Ориентация электрического вектора в поляризованном свете

Мы до сих пор говорили о направлении электрического вектора, приняв без доказательств, что направление его при поляризации отражением перпендикулярно к плоскости падения, а при поляризации турмалином совпадает с осью турмалина. Винеру удалось осуществить опыты, дающие доказательство этого утверждения.

Раньше (см. § 23) были описаны опыты того же автора, показавшие, что фотографическое действие оказывает электрический вектор световой волны (поэтому его называют *световым* вектором). Специальная модификация опыта со стоячими волнами позволила решить вопрос о направлении электрического вектора в поляризованном свете.

Заставим линейно-поляризованный свет падать под углом, точно равным 45°, на металлическое зеркало M (рис. 16.4 a), поверх которого налит слой светочувствительной эмульсии P. Таким образом, оно представляет собой фотографическую пластинку с зеркальной под-

слойкой [1]). Легко видеть, что нужно ждать различных результатов в зависимости от того, будет ли световой (электрический) вектор ориентирован перпендикулярно к плоскости падения или будет лежать в этой плоскости. В первом случае (рис. 16.4 *б*) при отражении света электрический вектор сохранит направление, параллельное самому

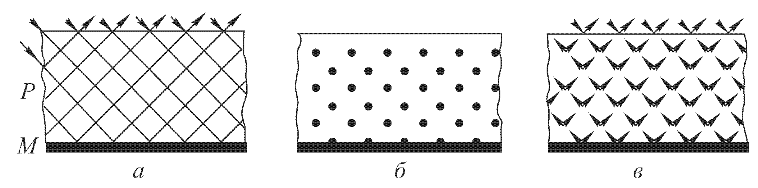


Рис. 16.4. Модификация опыта Винера

себе, и, следовательно, падающая и отраженная волны могут интерферировать, давая начало стоячим волнам с пространственным распределением узлов и пучностей и с соответствующим слоистым распределением выделившегося серебра (ср. § 23).

Если же электрический вектор лежит в плоскости падения, то при отражении он поворачивается вместе с фронтом волны на 90°. Таким образом, электрические векторы в падающей и отраженной волнах составляют между собой прямой угол (рис. 16.4 *в*), так что интерференция между ними невозможна. Результирующая электрического вектора во всей толще эмульсии сохраняет неизменное значение, и слоистого отложения серебра не наблюдается. Таким образом, можно решить, как ориентирован электрический вектор в направленном на зеркало M поляризованном свете, и, следовательно, установить направление электрического вектора для различных конкретных случаев поляризации. Эти опыты показали, что в случае поляризации турмалином электрический вектор имеет направление, параллельное оси турмалина; в случае поляризации при отражении от диэлектрика он лежит в плоскости, перпендикулярной к плоскости отражения (падения); в случае преломления диэлектриком — в плоскости преломления (падения) и т.д.

§ 105. Закон Малюса

Действие различных поляризующих или анализирующих приборов, рассмотренных выше (турмалин, стеклянное зеркало, стопа и т.д.), типично для всех приспособлений этого рода. Направления колебаний электрического (магнитного) вектора естественного света всегда «сортируются» этими приборами так, что в один пучок отбирается преимущественно (или сполна) излучение с одним направлением электрических колебаний, а в другой — излучение с перпендикулярным направлением электрических колебаний. Смешение обоих пучков

---

[1]) При рассмотрении этих опытов можно считать, что отражение от металла существенно не влияет на характер поляризации света. Более тонкие эффекты при отражении от металла будут рассмотрены позже.

вновь дает естественный свет. Иногда явление несколько осложняется тем обстоятельством, что один из этих пучков претерпевает более или менее полное поглощение (турмалин, непрозрачный диэлектрик). Два взаимно перпендикулярных направления колебаний в двух пучках, образующихся при поляризации, определяются физическими особенностями примененного поляризатора; в случае турмалина (и других кристаллов) они определены строением кристалла, в случае зеркала — направлением плоскости падения и т.д. Эти избранные направления можно назвать главными плоскостями P_1 и P_2, причем $P_1 \perp P_2$.

Если естественный свет проходит через два поляризующих прибора, соответствующие плоскости которых образуют между собой угол φ, то интенсивность света, пропущенного такой системой, будет пропорциональна $\cos^2 \varphi$. Закон этот был сформулирован Малюсом в 1810 г. и подтвержден тщательными фотометрическими измерениями Араго, который построил на этом принципе фотометр. Небезынтересно заметить, что Малюс вывел свой закон, основываясь на корпускулярных представлениях о свете. С волновой точки зрения закон Малюса представляет собой следствие теоремы разложения векторов и утверждения, что интенсивность света пропорциональна *квадрату* амплитуды световой волны. Таким образом, закон Малюса может рассматриваться как непосредственное экспериментальное доказательство данного утверждения. Закон Малюса лежит в основе расчета интенсивности света, прошедшего через поляризатор и анализатор во всевозможных поляризационных приборах.

§ 106. Естественный свет

В заключение еще раз сопоставим определения естественного и поляризованного света. *Естественный свет* есть совокупность световых волн со всеми возможными направлениями колебаний, быстро и беспорядочно сменяющими друг друга; совокупность эта статистически симметрична относительно волновой нормали, т.е. характеризуется неупорядоченностью направлений колебаний.

Линейно- или *плоскополяризованный свет* представляет собой световые волны с одним-единственным направлением колебаний (единственный крест **E** и **H**), т.е. волны с вполне упорядоченным направлением колебаний. Существуют и более сложные виды упорядоченных колебаний, которым соответствуют иные типы поляризации, например *круговая* или *эллиптическая* поляризации, при которых конец электрического (и магнитного) вектора описывает круг или эллипс с тем или иным эксцентриситетом (см. ниже гл. XVIII).

Частично поляризованный свет характеризуется тем, что одно из направлений колебаний оказывается преимущественным, но не исключительным. Волновая нормаль уже не является прямой, по отношению к которой направления колебаний электрического (магнитного) вектора статистически равновероятны в плоскости, нормальной к этой прямой. Частично поляризованный свет можно рассматривать как смесь естественного и поляризованного.

Большинство источников (раскаленные тела, светящиеся газы) испускает свет, близкий к естественному, хотя некоторые следы поляри-

зации почти всегда наблюдаются, что объясняется излучением более глубоких слоев вещества. Это излучение проходит через некоторый слой и испытывает частичную поляризацию, подобную возникающей при прохождении через слой диэлектрика.

Есть все основания полагать, что свет, испускаемый каким-либо атомом, сохраняет характер поляризации неизменным на протяжении времени, довольно длительного по сравнению с периодом колебания. Действительно, интерференция световых пучков (даже излучаемых не лазерами) может происходить при очень большой разности хода (до миллиона длин волн), когда, следовательно, интерферируют между собой волны, испущенные в начале и в конце временно́го интервала, охватывающего миллион колебаний. Возможность возникновения при этом интерференции доказывает, что состояние поляризации сохраняется на протяжении большого числа колебаний. Таким образом, излучение *отдельных* атомов может при благоприятных обстоятельствах (разреженный газ) сохранить неизменной не только начальную фазу, но и ориентацию колебаний в течение довольно длительного времени ($\sim 10^{-8}$ с).

Однако нам одновременно приходится наблюдать излучение огромного числа атомов, посылающих различно поляризованный свет. Кроме того, и каждый атом после нескольких сотен тысяч колебаний начинает испускать свет с новым состоянием поляризации. Таким образом, обычно наблюдаются множество всех возможных ориентаций **E** и **H** и быстрая смена этих ориентаций, что и представляет собой естественный свет. Пока свет дойдет от излучающих атомов до наблюдателя, он может претерпеть ряд воздействий, вносящих некоторую поляризацию, которой мы обычно почти не замечаем. Только при специальных условиях наблюдения (свет, рассеянный атмосферой; свет, отраженный водной поверхностью, и т.д.) доля поляризованного света может заметно возрасти.

Глава XVII

ПОЛЯРИЗАЦИЯ ПРИ ДВОЙНОМ ЛУЧЕПРЕЛОМЛЕНИИ [1]

§ 107. Двойное лучепреломление и поляризация света при прохождении через кристалл исландского шпата

Исландский шпат представляет собой разновидность углекислого кальция ($CaCO_3$), кристаллизующуюся в виде кристаллов гексагональной системы. Он обладает чрезвычайно ярко выраженным двойным лучепреломлением. Так как кристаллы исландского шпата встречаются в природе в виде довольно больших и оптически чистых

[1]) В настоящей главе излагаются лишь предварительные сведения о прохождении света через кристалл исландского шпата, необходимые для понимания поляризации света. Подробнее вопрос о прохождении света через кристаллы рассматривается в гл. XXVI.

образцов, то неудивительно, что именно на этом объекте было впервые наблюдено явление двойного лучепреломления и открыта связанная с ним поляризация света. И до настоящего времени исландский шпат является наилучшим материалом для изучения и демонстрации этих явлений, а также для изготовления оптических приборов, использующих поляризацию света, хотя в настоящее время известно очень большое количество естественных и искусственных кристаллов с подобными свойствами.

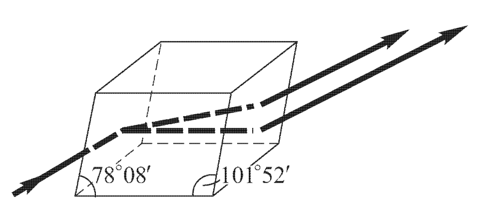


Рис. 17.1. Прохождение света через кристалл исландского шпата (двойное лучепреломление)

Кристалл исландского шпата легко выкалывается в виде ромбоэдра, причем ромбы, его ограничивающие, имеют углы 101°52′ и 78°08′ (рис. 17.1). Если на такой кристалл падает узкий пучок света, то, преломляясь, он дает два пучка несколько различного направления. Если падающий пучок достаточно узок, а кристалл достаточно толст, то из него выходят два пучка, параллельных первоначальному (как при всяком прохождении через плоскопараллельную пластинку), вполне разделенных пространственно.

Даже в том случае, когда первичный пучок нормален к естественной грани кристалла, т.е. угол падения равен нулю, преломленный

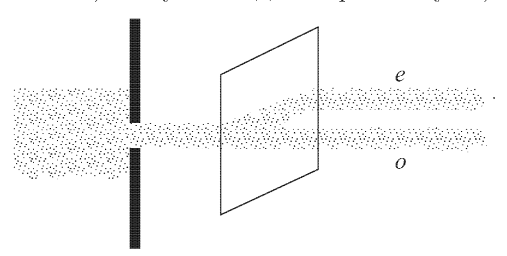


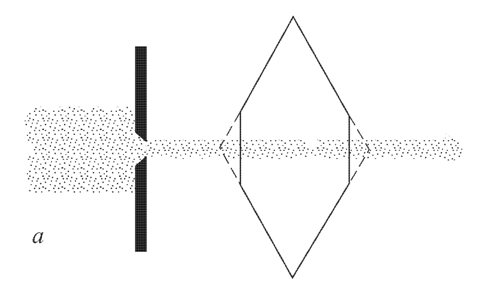
Рис. 17.2. Двойное лучепреломление света, падающего нормально к естественной грани кристалла исландского шпата

пучок разделяется на два, причем один из них представляет продолжение первичного, а второй уклоняется (рис. 17.2) так, что угол преломления отличен от нуля.

Это обстоятельство, равно как и ряд других отступлений от обычных законов преломления, о которых речь пойдет ниже, дали повод назвать второй из этих лучей *необыкновенным* (e), сохраняя за первым название *обыкновенного* (o). Различие в отклонении обоих лучей показывает, что по отношению к ним кристалл обладает разными показателями преломления. Исследуя явление при различных направлениях преломленных лучей внутри кристалла, можно обнаружить, что в кристалле исландского шпата один из лучей (обыкновенный) имеет для всех направлений одно и то же значение показателя преломления,

показатель же преломления другого луча (необыкновенного) зависит от направления.

В кристалле исландского шпата существует одно определенное направление, вдоль которого оба преломленных луча распространяются, не раздваиваясь и с одной скоростью, как в обычной изотропной среде. Направление это составляет определенные углы с ребрами естественного кристалла; в случае куска кристалла, имеющего вид ромбоэдра, оно параллельно диагонали, соединяющей тупые углы ромбоэдра. Направление это принято называть *оптической осью* кристалла. Существование оптической оси у исландского шпата легко продемонстрировать на куске кристалла, на котором сошлифованы с двух сторон две плоскости, перпендикулярные к указанной диагонали (рис. 17.3 *а* и *б*).



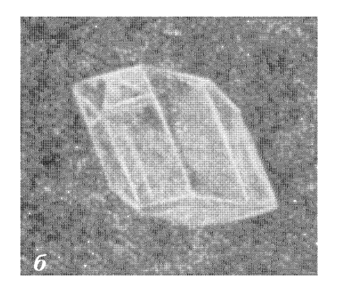


Рис. 17.3. Демонстрация отсутствия двойного лучепреломления в исландском шпате при прохождении света вдоль его оптической оси (*а*) и кусок естественного кристалла исландского шпата, у которого сошлифованы две площадки, перпендикулярные к оптической оси (*б*)

Пучок света, направленный перпендикулярно к этим сошлифованным плоскостям, пройдет сквозь кристалл, не раздваиваясь. Если сошлифованные плоскости достаточно велики, то можно убедиться, что направление, перпендикулярное к ним в *любом месте*, обладает свойством оптической оси. Другими словами, любая прямая, параллельная найденному направлению, служит оптической осью кристалла.

Таким образом, оптическая ось представляет собой определенное *направление* в кристалле, а не какую-то избранную линию, что вполне понятно, ибо отдельные участки кристалла должны обладать идентичными свойствами. Итак, через любую точку исландского шпата можно провести оптическую ось. Плоскость, проходящая через оптическую ось и волновую нормаль распространяющихся волн, носит название *плоскости главного сечения* или, короче, *главной плоскости.*

Рассмотрим несколько детальнее опыт, при котором световой пучок падает нормально на естественную грань кристалла. Главную плоскость проведем через падающий луч (через нормаль к кристаллу). Опыт показывает, что внутри кристалла идут два луча, из которых один (обыкновенный) есть продолжение падающего, а второй (необыкновенный) отклонен и лежит вместе с первым в главной плоскости. Из кристалла выходят два луча, лежащих в главной плоскости и параллельных падающему, но смещенных друг относительно друга.

При вращении кристалла вокруг направления падающего луча один из преломленных лучей будет неподвижным, второй будет обходить вокруг первого.

Если исследовать оба выходящих пучка при помощи турмалина или стеклянного зеркала, то обнаруживается, что оба они вполне поляризованы, и притом во взаимно перпендикулярных плоскостях. Колебания вектора **D** обыкновенной волны происходят перпендикулярно к главной плоскости, а необыкновенной — в главной плоскости. Свойства обоих лучей по выходе из кристалла, за исключением направления поляризации, конечно, ничем друг от друга не отличаются, так что название «необыкновенный» имеет смысл только внутри кристалла. Интенсивности обоих лучей одинаковы[1]), если на кристалл падает естественный свет.

Если один из пучков по выходе из первого кристалла заставить упасть нормально на грань второго кристалла, то мы опять получим два пучка, лежащих в главной плоскости *второго* кристалла и поляризованных так же, как и раньше, по отношению к главной плоскости второго кристалла. Таким образом, направление поляризации зависит только от ориентации кристалла и не зависит от того, поляризован ли падающий на него свет или же он является естественным. Интенсивности обоих пучков будут, однако, в случае поляризованного падающего луча зависеть от угла α между направлением колебаний в падающем поляризованном луче и главной плоскостью второго кристалла. Действительно, во втором кристалле направление колебаний в необыкновенном луче, лежащих в главной плоскости второго кристалла, составит угол α с направлением колебаний в падающем поляризованном свете, а направление колебаний в обыкновенном луче образует с ним угол $\pi/2 - \alpha$. Если амплитуда падающей на второй кристалл волны равна A, то амплитуды обеих волн, выходящих из кристалла, будут равны соответственно

$$a = A\sin\alpha \text{ (для обыкновенной волны)},$$
$$b = A\cos\alpha \text{ (для необыкновенной волны)},$$

а их интенсивности относятся как

$$\frac{I_o}{I_e} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha. \qquad (107.1)$$

Опыт полностью подтверждает эти расчеты. Если, например, расположить два кристалла один за другим и, задержав один из лучей, рассматривать на экране следы двух пучков I_o и I_e, на которые разо-

---

[1]) Напоминаем, что мы описываем явления, происходящие в кристалле исландского шпата. Они типичны для большой группы кристаллов, обладающих одной оптической осью и носящих название *одноосных*. Сложнее обстоит дело в так называемых *двуосных* кристаллах, где ни один из лучей нельзя назвать обыкновенным. Во многих одноосных и двуосных кристаллах поглощение обеих распространяющихся в кристалле световых волн различно. Типичным представителем такого кристалла является турмалин, в котором обыкновенный луч практически полностью поглощается уже при толщине около 1 мм (см. § 108).

бьется второй, то относительные интенсивности их будут зависеть от взаимной ориентации кристаллов. Поворачивая кристалл относительно обыкновенного луча на 360°, мы заставим обойти вокруг него пятнышко от необыкновенного луча, причем отношение их интенсивностей будет меняться в соответствии с формулой $I_o/I_e = \operatorname{tg}^2\alpha$ (см. упражнение 146).

§ 108. Поляризационные приспособления

В предыдущем параграфе мы упоминали, что показатели преломления кристаллов для обыкновенного и необыкновенного лучей неодинаковы. Так, для исландского шпата $n_o = 1{,}658$, а n_e может принимать в зависимости от направления луча в кристалле все значения между 1,486 и 1,658. Кристаллы, для которых, как и для исландского шпата, $n_e \leqslant n_o$, называют *отрицательными*. Кристаллы, для которых $n_e \geqslant n_o$ (например, кварц), носят название *положительных*.

На большом различии n_o и n_e основано применение исландского шпата для разделения лучей, поляризованных во взаимно перпендикулярных направлениях. Для этой цели можно воспользоваться кристаллом исландского шпата, поместив перед его гранью небольшую диафрагму (см. рис. 17.2). Задержав один из пучков, получим пучок, поляризованный по некоторому определенному направлению.

Однако гораздо удобнее применять не простые кристаллы, а соответствующие комбинации их, носящие название *поляризационных призм*. Используются призмы двух типов: призмы, из которых выходит один пучок, поляризованный в какой-либо плоскости (поляризационные призмы), и призмы, дающие два пучка, поляризованных в двух взаимно перпендикулярных плоскостях (двоякопреломляющие призмы). Первые построены обычно по принципу полного внутреннего отражения одного из лучей от какой-либо границы раздела, тогда как другой луч, с иным показателем преломления, проходит через границу (Николь, 1828 г.). Во-вторых, используется различие в показателях преломления обыкновенного и необыкновенного лучей, что позволяет развести их как можно дальше друг от друга. Наиболее употребительны следующие типы призм.

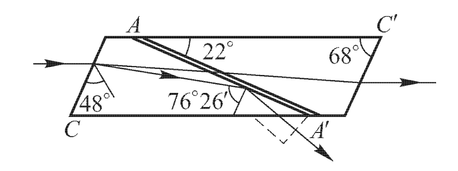


Рис. 17.4. Поляризационная призма Николя

а. Поляризационные призмы. Призма Николя представляет собой призму из исландского шпата, вырезанную, как указано на рис. 17.4. По линии AA' призма разрезается и склеивается канадским бальзамом, показатель преломления которого $n = 1{,}550$ лежит между значениями n_o и n_e для обыкновенного и необыкновенного лучей.

Оптическая ось составляет угол 48° со входной гранью. При подходящем угле падения на грань призмы обыкновенный луч претерпевает полное внутреннее отражение на прослойке канадского бальзама

и *поглощается* зачерненной нижней гранью (в больших призмах во избежание нагревания призмы луч *выводится* из кристалла при помощи призмочки, приклеенной к кристаллу и показанной на рис. 17.4 штриховой линией). Необыкновенный луч выходит из кристалла параллельно грани $A'C$. Наибольшая апертура светового пучка, при которой еще обеспечивается линейная поляризация выходящего из призмы света, равна 29°.

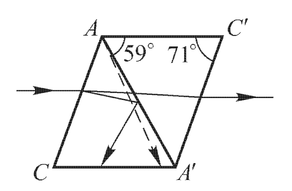


Рис. 17.5. Укороченная поляризационная призма с воздушной прослойкой

Другие типы поляризационных призм, показанные на рисунках 17.5 и 17.6, также изготовляются из исландского шпата. Штриховая линия на рис. 17.5 указывает направление оптической оси. Обе половинки соединены воздушной прослойкой AA'; отношение ребер $AC'/AC = 0{,}9$. При подходящем угле падения света на призму луч обыкновенный претерпевает полное внутреннее отражение от воздушной прослойки, луч необыкновенный проходит через нее. Апертура падающего светового пучка, при которой свет, проходящий через призму, еще полностью поляризован, составляет всего 8°, что значительно менее выгодно, чем в случае призмы Николя; зато эта призма гораздо короче и, следовательно, дешевле (при заданном сечении). Кроме того, она может применяться для ультрафиолета, так как не имеет склейки из канадского бальзама, поглощающего ультрафиолетовый свет.

Рис. 17.6. Поляризационная призма с лобовой гранью, перпендикулярной к ребрам

В призме, изображенной на рис. 17.6, входная и выходная грани срезаны перпендикулярно к ребрам, что обеспечивает бóльшие удобства в ее использовании. Оптическая ось параллельна AB. Склейка производится канадским бальзамом или глицерином. Существует довольно много подобных призм разного устройства.

При склейке глицерином ($n = 1{,}474$), который прозрачен для ближнего ультрафиолета, данные призмы следующие:

$$\alpha = 17^\circ 20', \quad \frac{AC'}{AC} = 3{,}2, \quad \text{апертура } 32^\circ 6'.$$

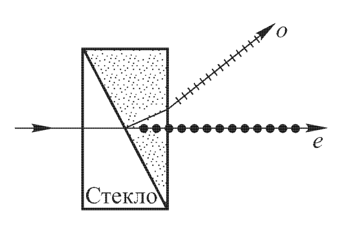


Рис. 17.7. Двоякопреломляющая призма из исландского шпата и стекла

Призма указанного типа делается и с воздушной прослойкой (Глан); ее данные: $\alpha = 50^\circ$, $AC'/AC = 0{,}85$, апертура $8^\circ 6'$; она пригодна для ультрафиолета.

б. Двоякопреломляющие призмы. 1. *Призма из исландского шпата и стекла* (рис. 17.7). Оптическая ось перпендикулярна к плоскости чертежа, $n_o = 1{,}66$, $n_{\text{стекла}} = 1{,}49$, $n_e = 1{,}486$. Луч обыкновенный преломляется в шпате и стекле два раза

и сильно отклоняется. Луч необыкновенный выходит почти без отклонения, так как показатель преломления стекла выбран близким к n_e.

2. *Призмы из двух кусков исландского шпата с различным направлением оптических осей.* Устройство и действие их понятны из рис. 17.8. Различие в ориентировке оптических осей влияет на угол расхождения между лучами. Допустимая апертура падающего пучка во всех этих призмах весьма невелика. Иногда двоякопреломляющие призмы делают из кварца; тогда, конечно, из-за меньшего различия между n_o и n_e углы разведения световых пучков *o* и *e* получаются значительно меньше.

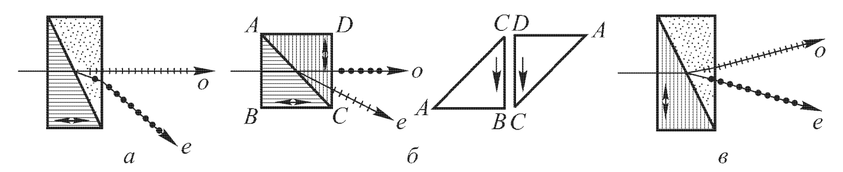


Рис. 17.8. Различные двоякопреломляющие призмы из исландского шпата: *а* — призма Рошона: угол между лучами *o* и *e* зависит от преломляющего угла призмы, луч *o* — ахроматичен; *б* — призма Сенармона: угол ACB близок к 45°, что позволяет экономно использовать исходный кристалл, разрезав его вдоль оси CB и склеивая вдоль естественной грани AC; *в* — призма Волластона: она обеспечивает симметричное разведение лучей; угол между *o* и *e* примерно в два раза больше, чем в призме Рошона, но оба луча обнаруживают хроматизм

в. Дихроичные пластинки. На ином принципе основаны поляризационные приспособления, простейшим представителем которых является турмалин. Турмалин представляет собой двоякопреломляющий кристалл, в котором один из лучей (обыкновенный) поглощается значительно сильнее, чем другой. Поэтому из пластинки турмалина оба луча, поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях, выходят с весьма различной интенсивностью, и прошедший через нее свет оказывается частично поляризованным. Если взять достаточно толстую (около 1 мм) пластинку турмалина, то в случае видимого света обыкновенный луч практически целиком поглощается и вышедший свет будет плоскополяризованным.

Для некоторых участков видимого спектра и необыкновенный луч обнаруживает заметное поглощение, и поэтому турмалин при выбранной толщине оказывается окрашенным; турмалин является не только поляризатором, но и светофильтром, практически пропускающим зелено-желтую область видимого спектра. Это обстоятельство является, конечно, крупным недостатком турмалина как поляризующего приспособления, но, с другой стороны, допустимая апертура пучка падающих на него лучей весьма значительна, что иногда играет важную роль.

Различие в поглощении лучей разной поляризации влечет за собой различие в поглощении естественного света в зависимости от *направления* его распространения, ибо от этого последнего зависит ориентация электрического вектора волны относительно кристаллографи-

ческих направлений. Такое различие в поглощении, зависящее, кроме того, от длины волны, приводит к тому, что кристалл по разным направлениям оказывается различно окрашенным. Это явление носит название *дихроизма* (или, лучше, *плеохроизма* — многоцветности) и в большей или меньшей степени харктеризует, по-видимому, все двоякопреломляющие кристаллы. Оно было открыто Кордье (1809 г.) на минерале, названном кордиеритом. Дихроизм турмалина был обнаружен Био и Зеебеком (1816 г.).

Особое значение приобрели дихроичные вещества в последнее время благодаря изобретению *поляроидов*. Поляроид представляет собой пленку очень сильно дихроичного кристалла — герапатита (периодат бисульфата хинина), полученного Герапатом в 1852 г. Чешуйка герапатита толщиной около 0,1 мм практически нацело поглощает один из лучей, являясь уже в таком тонком слое совершенным линейным поляризатором.

Было предложено несколько способов получения довольно больших поверхностей, покрытых мелкими, одинаково ориентированными кристалликами герапатита и представляющих, таким образом, поляризационное приспособление с большой площадью. Листы целлулоида, обработанные по такому методу, были выпущены в продажу в 1935 г. под названием *поляроидов*. В настоящее время существует несколько разновидностей дихроичных пластин, изготовленных по типу поляроидов, с использованием как герапатита, так и других соединений, а также в виде больших (с линейным размером до 60 мм) кристаллических пластинок герапатита и т.д. Недостатком дихроичных пластин является меньшая по сравнению с призмами из исландского шпата прозрачность и некоторая ее селективность, т.е. зависимость поглощения от длины волны, так что современные поляроиды пропускают фиолетовую, а также красную области спектра поляризованными лишь частично. Эти недостатки, однако, для многих практических целей искупаются возможностью пользоваться в качестве поляроида дешевым поляризационным приспособлением не только с апертурой, близкой к 180°, но и с очень большой поверхностью (в несколько квадратных дециметров). Одно из применений поляроиды нашли в автодорожном деле для защиты шофера от слепящего действия фар встречных машин (см. упражнение 150).

Глава XVIII

ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ЛУЧЕЙ

§ 109. Опыты Френеля и Араго и их значение для упругой теории света

Как уже упоминалось в § 18, интерференция двух когерентных волн осуществляется наиболее эффективно в том случае, когда направления колебаний во взаимодействующих пучках *совпадают*. Мы

видели также, что метод Френеля получения двух когерентных пучков обеспечивает в обычных интерференционных опытах сохранение состояния поляризации интерферирующих волн.

Возможность получения световых волн, поляризованных в любой плоскости, позволяет поставить вопрос о взаимодействии волн, колебания которых взаимно перпендикулярны. Основные опыты в этом направлении были выполнены Араго и Френелем (1816 г.). Они показали, что если в обычном интерференционном опыте на пути двух интерферирующих пучков поставить поляризационные устройства, обеспечивающие их взаимно перпендикулярную поляризацию, то интерференция наблюдаться не будет. Но если повернуть одно из этих поляризационных устройств на 90°, в результате чего направления колебаний в обоих пучках совпадут, то интерференционная картина будет хорошо выявляться и мы увидим обычное распределение максимумов и минимумов. Интерференционные полосы видны и при промежуточных ориентациях поляризаторов, но с меньшей видимостью.

Опыт, аналогичный проделанному Френелем и Араго, можно осуществить следующим образом. В интерферирующие, одинаково поляризованные пучки введем дополнительные поляроиды N_1 и N_2 [1]). Если N_1 и N_2 ориентированы так, что выделенные ими направления колебаний в обоих пучках совпадают, то наблюдается обычная интерференционная картина. Если же один из поляроидов повернуть на 90°, то поле зрения станет однородным и никаких следов чередования интенсивностей наблюдаться не будет. Интерференционная картина восстановится, если второй поляроид также порвернуть на 90° (более сложные случаи см. § 148).

Историческое значение опытов такого типа весьма велико. Они показали, что при наложении двух когерентных волн, поляризованных во взаимно перперндикулярных направлениях, результирующая интенсивность равна сумме интенсивностей налагающихся волн. Но при сложении колебаний это имеет место, только если колебания строго перпендикулярны. Действительно, только тогда $A^2 = a^2 + b^2$ (A — амплитуда результирующего, а a и b — амплитуды налагающихся колебаний). Таким образом, из опытов Френеля и Араго следует, что в случае световых волн, поляризованных во взаимно перпендикулярных направлениях, световые колебания *строго* перпендикулярны друг к другу. Это означает, что в световой волне полностью отсутствует *продольная* компонента. Такой вывод, естественный в рамках электромагнитной теории света, был сделан в свое время Юнгом и Френелем еще в рамках упругой теории света, но приводил тогда к очень серьезным трудностям. Предположения о существовании материальной

[1]) Мы допускаем, что поляроиды достаточно идентичны, чтобы не сообщать интерферирующим лучам добавочной разности хода. В противном случае необходимо ввести в ход лучей еще компенсирующие пластинки. Френель и Араго применяли в качестве поляризаторов тонкие стопы, сложенные из 15 листков слюды; пригодны также некоторые образцы агата, обладающие явно выраженным слоистым строением при достаточной прозрачности.

среды, в которой возможно распространение строго поперечных колебаний, несовместимы с представлением об обычной упругой среде (даже твердой), что заставило для понимания законов отражения и преломления света сделать допущения относительно граничных условий, несовместимые с механикой обычных сред.

Несмотря на указанную трудность, эти опыты и многочисленные экспериментально подтвержденные следствия, которые из них извлек Френель, заставили признать поперечность световых волн.

§ 110. Эллиптическая и круговая поляризация света

Отсутствие интерференционного чередования интенсивностей в опытах, аналогичных опытам Френеля и Араго, не означает, однако, что взаимодействие двух взаимно перпендикулярных световых колебаний не может приводить к доступным наблюдению на опыте изменениям в световом пучке.

Рассмотрим результат сложения двух когерентных световых волн, поляризованных в двух *взаимно перпендикулярных* направлениях, имеющих *разную* амплитуду и обладающих некоторой *разностью фаз*. Мы легко можем осуществить подобный случай на опыте следующим образом. Свет определенной длины волны [1]), прошедший через поляризатор N, т.е. ставший линейно-поляризованным, пропустим через кристаллическую пластинку K толщины d, вырезанную из одноосного кристалла параллельно его оптической оси (рис. 18.1), причем допустим, что направление пучка перпендикулярно к боковой поверхности K. Сквозь пластинку будут распространяться в *одном* направлении, но с *разной* скоростью две волны, поляризованные в двух взаимно перпендикулярных направлениях, которые принято называть *главными направлениями* кристаллической пластинки. У одной из волн электрические колебания направлены вдоль оптической оси кристалла, например по CC (необыкновенный луч, показатель преломления n_e), у другой — перпендикулярно к оси, т.е. по BB (обыкновенный луч, показатель преломления n_o).

Если направление колебаний электрического вектора в падающем поляризованном свете составляет угол α с одним из главных направлений пластинки, то амплитуды колебаний в необыкновенной и в обыкновенной волнах будут соответственно равны

$$a = A\cos\alpha, \quad b = A\sin\alpha,$$

где $A = OM$ — амплитуда падающей волны. Пройдя через толщу пластинки d, эти две волны приобретут *разность хода*, равную $(n_o - n_e)d$. Следовательно, обыкновенная волна отстанет по фазе от необыкновенной на величину

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\,(n_o - n_e)d. \tag{110.1}$$

[1]) То есть принадлежащий к ограниченному спектральному интервалу. При значительном отступлении от монохроматичности следует принять во внимание замечание, сделанное в конце настоящего параграфа.

Сложение двух взаимно перпендикулярных колебаний с разными амплитудами и разностью фаз приведет к формированию *эллиптического* колебания, т.е. колебания, при котором конец результирующе-

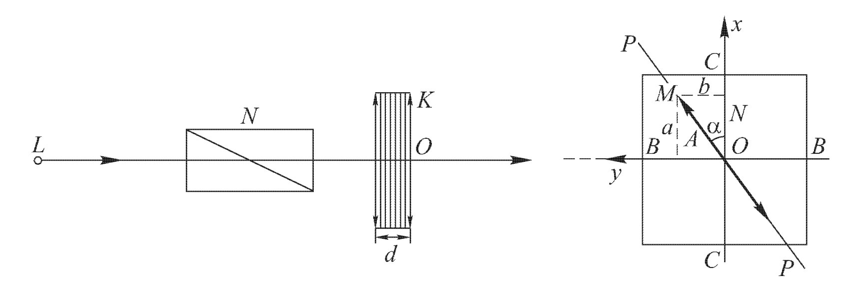


Рис. 18.1. Схема получения эллиптически-поляризованного света. L — источник света; K — кристаллическая пластинка; справа — разложение светового вектора по главным направлениям пластинки

го вектора описывает эллипс в плоскости волнового фронта с той же угловой частотой ω, с которой совершаются исходные колебания.

Действительно, колебания в волнах, прошедших пластинку, описываются соотношениями

$$x = A\cos\alpha\cos\omega t = a\cos\omega t,$$
$$y = A\sin\alpha\cos(\omega t - \varphi) = b\cos(\omega t - \varphi). \tag{110.2}$$

Чтобы получить траекторию результирующего колебания, надо из этих уравнений исключить время t. Имеем

$$\cos\omega t = \frac{x}{a}, \quad y = b(\cos\omega t\cos\varphi + \sin\omega t\sin\varphi),$$

или

$$\sin\omega t\sin\varphi = \frac{y}{b} - \frac{x}{a}\cos\varphi.$$

Возводя это выражение в квадрат и складывая с

$$(\cos\omega t\sin\varphi)^2 = \frac{x^2}{a^2}\sin^2\varphi,$$

получим

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\varphi = \sin^2\varphi, \tag{110.3}$$

т.е. уравнение эллипса. Форма эллипса и ориентация его относительно осей x и y зависят от значений α и φ.

Таким образом, после прохождения линейно-поляризованного света через кристаллическую пластинку получаем, вообще говоря, световую волну, концы векторов **E** и **H** которой описывают эллипсы. Такой свет называется *эллиптически-поляризованным*.

Рассмотрим несколько частных случаев.

а) Толщина пластинки такова, что разность хода двух волн составляет четверть длины световой волны (*пластинка в 1/4 волны*):

$$(n_o - n_e)d = \frac{1}{4}\lambda$$

или

$$(n_o - n_e)d = \left(m + \frac{1}{4}\right)\lambda, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{110.4}$$

В таком случае $\varphi = \pi/2$ и уравнение эллипса примет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

т.е. мы получим эллипс, ориентированный относительно главных осей пластинки. Соотношение длин его полуосей a и b зависит от величины угла α.

В частности, при $\alpha = 45°$ находим $a = b$, так что эллипс обращается в круг, описываемый уравнением

$$x^2 + y^2 = a^2. \tag{110.5}$$

В данном случае имеем, следовательно, свет, *поляризованный по кругу* (*круговая*, или *циркулярная*, поляризация). Таким образом, для получения света, поляризованного по кругу, необходимо сложение двух когерентных волн с равными амплитудами, обладающих разностью фаз $\pi/2$ и поляризованных в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. Этого можно достичь, в частности, заставив линейно-поляризованный свет пройти через пластинку в четверть волны так, чтобы плоскость поляризации первоначальной волны составляла угол 45° с главными направлениями в пластинке.

Чтобы осуществить разность хода в четверть волны, можно применить слюдяную[1] пластинку толщиной 0,027 мм = 27 мкм (для желтого света, испускаемого натриевым пламенем).

Хотя изготовление таких пластинок и не представляет особого труда, все же предпочитают пользоваться более толстыми пластинками, дающими разность хода, равную $(m + 1/4)\lambda$, где m — некоторое целое число (см. упражнение 153).

В зависимости от ориентации пластинки в четверть волны приобретаемая разность фаз равна $+\pi/2$ или $-\pi/2$, т.е. компонента вдоль оси Ox опережает или отстает на $\pi/2$ по фазе от компоненты по оси Oy. В соответствии с этим результирующий вектор вращается *против* часовой стрелки (влево) или *по* часовой стрелке (вправо). Поэтому принято различать *левую* и *правую* эллиптическую или круговую поляризации.

б) Пластинка такова, что разность хода двух лучей составляет половину длины световой волны (*пластинка в 1/2 волны*):

$$(n_o - n_e)d = \frac{1}{2}\lambda$$

---

[1]) Слюда представляет собой кристалл *двуосный* (см. § 145), в котором понятие обыкновенного луча теряет смысл. Но так как явление двойного лучепреломления имеет место в слюде, то при помощи слюдяной пластинки также можно сообщить определенную разность хода двум взаимно перпендикулярным компонентам.

или

$$(n_o - n_e)d = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda, \tag{110.6}$$

т.е.

$$\varphi = \pi \quad \text{или} \quad \varphi = 2\pi m.$$

В этом случае эллипс вырождается в прямую

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0, \tag{110.7}$$

т.е. свет остается линейно-поляризованным, но направление колебаний MM переходит, например, из 1–3 квадрантов в 2–4 квадранты (NN), повернувшись на угол $180° - 2\alpha$ (рис. 18.2).

в) Пластинка в целую длину световой волны (*пластинка в* 1λ):

$$(n_o - n_e)d = \lambda \quad \text{или} \quad m\lambda,$$

т.е.

$$\varphi = 2\pi \quad \text{или} \quad \varphi = 2\pi m. \tag{110.8}$$

Эллипс вырождается в прямую

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0, \tag{110.9}$$

т.е. луч остается линейно-поляризованным без изменения направления колебаний.

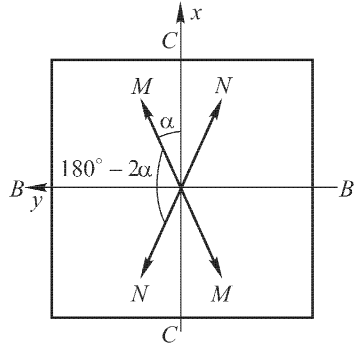


Рис. 18.2. Действие пластинки в 1/2 волны

Все предшествующие рассуждения относились к свету определенной длины волны, т.е. к небольшому спектральному интервалу. При значительном разнообразии в длинах волн следует принять во внимание, что показатели преломлений для обеих волн зависят от длины волны (дисперсия), причем их разность также меняется с длиной волны. Благодаря этому обстоятельству можно использовать прохождение поляризованного света через кристалл для разделения двух близких длин волн (поляризационный монохроматор Вуда) (см. упражнение 166).

§ 111. Внутренняя структура естественного света

Во всех рассуждениях предшествующего параграфа предполагалось, что свет, падающий на кристаллическую пластинку, *линейно-поляризован.* Если бы падающий свет был естественным (т.е. его можно было бы представить как совокупность многочисленных волн, поляризованных по всем возможным направлениям), то выходящий из пластинки свет представлял бы совокупность эллиптически-поляризованных волн без какой-либо преимущественной ориентации эллипсов, т.е. остался бы естественным. Поэтому для получения с помощью кристаллической пластинки эллиптически-поляризованного света необходимо падающий на нее свет предварительно линейно поляризовать. Однако и прохождение *естественного* света через кристаллическую пластинку вносит известные изменения во внутреннюю его структуру, превращая, например, естественный свет,

состоящий из совокупности всевозможно ориентированных плоско-поляризованных волн, также в свет естественный, но представляющий совокупность всевозможно ориентированных эллиптически-поляризованных волн. Это изменение можно обнаружить на опыте, как показал С.И. Вавилов.

Разобьем какой-нибудь пучок естественного света на два когерентных пучка, прибегнув к одной из общеизвестных интерферометрических схем. Встречаясь, пучки дают обычную интерференционную картину, например с максимумом в центре поля. Теперь поместим на пути одного из интерферирующих пучков естественного света полуволновую кристаллическую пластинку K и введем во второй пучок соответственно подобранную стеклянную пластинку P, обеспечивающую компенсацию образовавшейся разности хода (рис. 18.3). Теперь

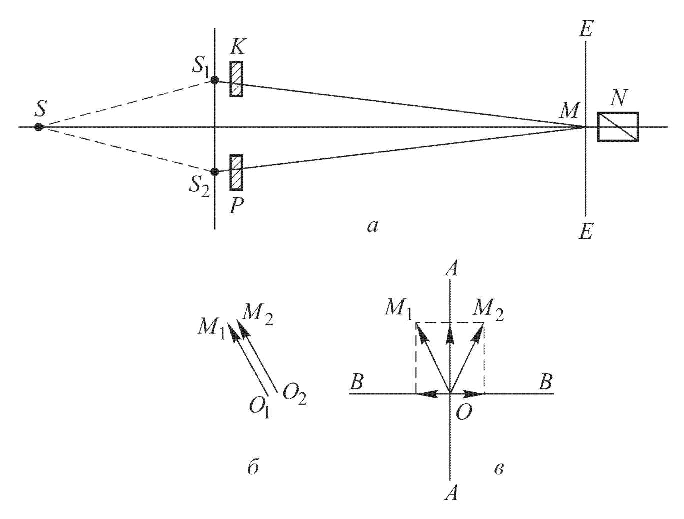


Рис. 18.3. Схема опыта С.И. Вавилова для выяснения внутренней структуры естественного света: *а* — общая схема, S — источник естественного света, S_1 и S_2 — два его когерентных изображения, K — пластинка в полволны, P — компенсирующая пластинка, EE — плоскость наблюдения, N — поляризатор; *б* — направления световых векторов в волнах, исходящих от S_1 и S_2, до прохождения пластинок K и P; *в* — направления световых векторов после прохождения светом пластинок K и P

встречающиеся интерферирующие пучки, оставаясь когерентными, *не дают* ожидаемой интерференционной картины; поле оказывается однородно освещенным. В этом проявилось изменение внутренней структуры естественного света, о котором речь шла выше.

Чтобы уяснить себе происходящее, представим естественный свет в первичном пучке как совокупность линейно-поляризованных волн с всевозможными направлениями поляризаций. В той части света, которая проходит через полуволновую пластинку, произойдет поворот направления поляризации (переход из 1–3 квадрантов во 2–4 квадран-

ты) (см. § 110, *б*)). Таким образом, направления световых векторов в когерентных пучках, которые в отсутствие пластинки были одинаковы (рис. 18.3 *б*), теперь благодаря действию пластинки на один из пучков окажутся не совпадающими (рис. 18.3 *в*). Результаты интерференции будут различными в зависимости от угла между векторами OM_1 и OM_2, так что в среднем не будет ни максимумов, ни минимумов; однако нельзя сказать, что мы получим такую же беспорядочную картину, как при наложении некогерентных лучей.

Разложим каждый из световых векторов на две составляющие по AA и BB, направленные по биссектрисам между векторами. Каждая пара составляющих, как когерентные и имеющие *одно* направление, интерферируют между собой. Однако действие полуволновой пластинки сказалось в том, что составляющие по AA сохранили прежнюю разность фаз, тогда как составляющие по BB оказались сдвинутыми дополнительно по фазе на π (ибо их проекции на BB направлены в *разные* стороны). Поэтому первые дают интерференционную картину с максимумом, как и прежде, в центре поля, а вторые — интерференционную картину с *минимумом* в центре поля, т.е. сдвинутую на 1/2 полосы относительно первой картины. А так как интенсивности той и другой компоненты в среднем одинаковы (в естественном свете нет преимущественного направления колебания), то обе одинаково яркие и сдвинутые на 1/2 полосы интерференционные картины не дадут видимой интерференции.

Однако эту «скрытую» интерференцию можно «проявить»: если смотреть на экран через поляризационную призму, ориентированную параллельно AA, то она погасит все компоненты, направленные по BB, и позволит видеть интерференционную картину с максимумом в центре поля. Повернув поляризатор параллельно BB, мы задержим все колебания, направленные по AA, и увидим вторую, дополнительную интерференционную картину с минимумом в центре поля. Очевидно, при поляризаторе, расположенном под углом в 45° к AA и к BB, интерференция по-прежнему не будет заметна.

Этот интересный опыт, осуществленный С.И. Вавиловым, позволяет, так сказать, обнаружить «эллиптическую поляризацию естественного света» — результат, кажущийся на первый взгляд парадоксальным.

§ 112. Обнаружение и анализ эллиптически- и циркулярно-поляризованиого света

Обнаружение особенностей эллиптически-поляризованного света связано с известными трудностями.

Применив для анализа света какое-нибудь поляризационное устройство [1]), мы получим следующие результаты. Сквозь поляризатор пройдет только часть света, соответствующая компоненте колебаний, пропускаемых им; нетрудно видеть, что амплитуда прошедшего

[1]) Поляризационное устройство, применяемое для анализа характера поляризация света, нередко называют *анализатором*.

света зависит от ориентации главной плоскости поляризатора NN по отношению к осям эллипса.

Амплитуда A равна половине длины стороны прямоугольника, параллельной NN, в который вписан эллипс (рис. 18.4). При повороте николя поворачивается и прямоугольник.

Амплитуда будет максимальной ($A = b$), когда плоскость NN совпадает с большой осью эллипса, и минимальной ($A = a$), если она параллельна малой оси. Поэтому при вращении поляризатора мы получим частичное затемнение или просветление поля, т.е. будет наблюдаться та же картина, как и при исследовании поляризатором частично поляризованного света. В частности, если свет поляризован по кругу, т.е. $a = b$, то вращение поляризатора совсем не будет влиять на интенсивность проходящего света, т.е. мы увидим ту же картину, как и при исследовании поляризатором естественного света. Таким образом, анализ при помощи поляризатора не позволяет отличить эллиптически-поляризованный свет от частично поляризованного, а циркулярно-поляризованный — от естественного.

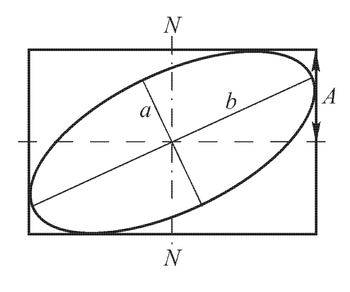


Рис. 18.4. Зависимость интенсивности эллиптически-поляризованного света, проходящего через николь, от ориентации николя

Для полного анализа необходимо превратить эллиптически- или циркулярно-поляризованный свет в плоскополяризованный, анализ которого легко выполняется при помощи поляризационной призмы.

Способ получения плоскополяризованного света из излучения с эллиптической или круговой поляризацией ясен из рассмотрения соотношений, приведенных в § 110. Достаточно компенсировать разность фаз φ между перпендикулярными компонентами, доведя ее до π или 2π (или до нуля). Для этой цели можно заставить изучаемый свет пройти через вспомогательную кристаллическую пластинку подходящей толщины или ориентации.

а. Применение пластинки в 1/4 волны для компенсации разности фаз. В эллиптически-поляризованном световом пучке между компонентами, направленными вдоль главных осей эллипса (а в циркулярно-поляризованном — между компонентами, направленными вдоль двух произвольно выбранных взаимно перпендикулярных диаметров), существует разность фаз $\pi/2$. Заставляя исследуемый свет пройти через пластинку в $\lambda/4$, мы добавим к этой разности $\pm\pi/2$, т.е. скомпенсируем имеющуюся разность фаз, обращая ее в нуль или в π. Таким образом, исследуемый свет превращается в плоскополяризованный, в чем можно убедиться при помощи обычного поляризатора. Для указанной цели в случае циркулярно-поляризованного пучка можно ориентировать пластинку в $\lambda/4$ как угодно; в случае эллиптически-поляризованного пучка надо ориентировать ее так, чтобы главные направления пластинки совпадали с главными осями эллипса, определенными предварительно

при помощи поляризатора. Таким образом, анализ выполняется при помощи пластинки в $\lambda/4$ и поляризатора. Указанным приемом можно также определить направление вращения (правая и левая поляризации), для чего необходимо лишь предварительно знать, какое из двух колебаний в использованной пластинке в $\lambda/4$ распространяется с большей скоростью.

б. Применение компенсаторов для анализа эллиптически-поляризованного света. Для полного количественного анализа эллиптически-поляризованного света надо знать форму и расположение эллипса по отношению к любым направлениям, т.е. разность фаз двух взаимно перпендикулярных компонент любого направления.

Для этой цели служат приборы, способные скомпенсировать до нуля (или дополнить до π) любую разность фаз. Такие приборы называются *компенсаторами*. В качестве примера рассмотрим *компенсатор Бабине*. Он состоит из двух клиньев, обычно из кварца, вырезанных так, что оси их ориентированы под прямым углом друг к другу (рис. 18.5).

Свет, проходящий в разных местах через компенсатор, получает ту или иную добавочную разность хода между двумя компонентами

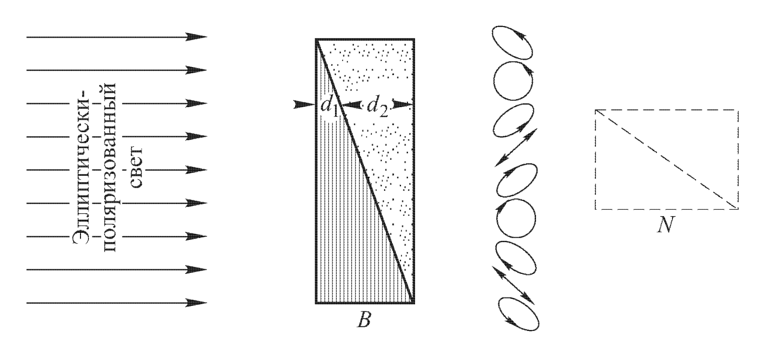


Рис. 18.5. Анализ эллиптически-поляризованного света с помощью компенсатора и поляризатора: B — компенсатор Бабине; свет, проходящий через разные участки компенсатора, имеет различное состояние поляризации

колебаний светового вектора в зависимости от разности толщин клиньев в данном месте. Обозначив толщину в первой половине клина через d_1, а во второй — через d_2, найдем, что добавочная разность хода между компонентами (одной — лежащей в плоскости чертежа и другой — перпендикулярной к нему) равна

$$(n_e d_1 + n_o d_2) - (n_o d_1 + n_e d_2) = (n_e - n_o)(d_1 - d_2). \qquad (112.1)$$

Таким образом, в компенсаторе из положительного кристалла ($n_e > n_0$) свет, проходящий по линии, где $d_1 > d_2$, приобретает добавочную разность хода; по линии, где $d_1 = d_2$, первоначальная разность хода остается неизменной; по линии, где $d_1 < d_2$, разность хода уменьшается.

Эллиптически-поляризованный свет, проходя через определенные места компенсатора, дополняющие разность фаз компонент, параллельных главным плоскостям компенсатора, до 0, 2π, 4π и т.д., обращается в линейно-поляризованный свет одного направления. Легко видеть, что такие участки компенсатора расположены на равных расстояниях друг от друга. Если за компенсатором B поставить поляризатор N, ориентированный соответствующим образом, то все эти места окажутся темными (ряд темных равноотстоящих полос, параллельных ребру компенсатора; см. рис. 18.6, на котором изображен вид показанного на рис. 18.5 компенсатора при рассматривании его поверхности через поляризатор). При другой ориентации поляризатора можно получить ряд темных равноотстоящих полос, соответствующих местам компенсатора, где дополняющая разность фаз доводит начальную разность фаз до π, 3π, 5π и т.д.

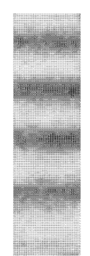


Рис. 18.6

Зная толщину клиньев и материал, из которого они сделаны, можно рассчитать (или предварительно проградуировать) добавляемую разность фаз и таким образом определить ту разность фаз, которая характеризовала данный эллиптический свет. На рис. 18.5 схематически показано изменение этой разности фаз для света, прошедшего через компенсатор в разных его местах. Она равна (снизу вверх) −45, 0, 45, 90, 135, 180, 225, 270, 315°. Часто клинья делают подвижными друг относительно друга и тогда вычисление ведется по *сдвигу* клиньев, приводящему к определенному расположению полос, например, к появлению темной полосы в центре поля (на кресте окуляра). Для практической работы удобнее компенсаторы, вся поверхность поля зрения которых представляет область одной и той же добавочной фазы, причем последнюю можно по желанию изменять. Один из компенсаторов такого типа описан в упражнениях (см. упражнение 164).

Так как при всех методах количественного исследования поляризованного света требуется определение угла поворота (поляризатора, пластинки в $\lambda/4$ или компенсатора), то обычно поляризационные приборы снабжаются оправами с хорошими угловыми делениями.

В настоящей главе описан метод получения эллиптически-поляризованного и циркулярно-поляризованного света при прохождении линейно-поляризованного света через кристаллическую пластинку. Однако это далеко не единственный способ создания указанных типов поляризации. Эллиптическая поляризация наблюдается при отражении линейно-поляризованного света от металла и при полном внутреннем отражении; круговая поляризация возникает иногда при этих процессах, а также при воздействии магнитного поля на излучающие атомы (см. эффект Зеемана) и при других явлениях. Само собой разумеется, что каким бы процессом ни было вызвано появление эллиптически- или циркулярно-поляризованного света, методы анализа его остаются теми же, как и описанные в настоящем параграфе.

ШКАЛА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Глава XIX

ИНФРАКРАСНЫЕ, УЛЬТРАФИОЛЕТОВЫЕ И РЕНТГЕНОВСКИЕ ЛУЧИ

В предшествующих главах были подробно обсуждены многообразные свойства света, указывающие на волновую природу его (интерференция, дифракция) и позволяющие установить поперечный характер световых волн (поляризация). Попутно не раз отмечалось, что световые волны представляют собой электромагнитные волны. В дальнейшем мы встретим многочисленные и разнообразные доказательства электромагнитной природы световых волн.

Рассмотрим теперь особенности электромагнитных волн, связанные с их длиной.

§ 113. Инфракрасные и ультрафиолетовые лучи

Та совокупность электромагнитных волн, которая называется *светом* (иногда *видимым светом*), представляет собой узкий интервал длин волн, заключенных примерно между 400 и 800 нм. Они действуют непосредственно на человеческий глаз, производя специфическое раздражение его сетчатой оболочки, ведущее к световому восприятию. Вследствие этого указанный интервал длин волн играет особую роль для человека, хотя по своим физическим свойствам он принципиально не отличается от примыкающих к нему более длинных и более коротких электромагнитных волн. Несмотря на то, что границы светочувствительности глаза субъективны, тем не менее резкое падение чувствительности человеческого глаза к концам этого интервала (ср. § 8) оправдывает установление специальных названий для соседних областей спектра.

В самом начале XIX в. было введено понятие об *инфракрасных* и *ультрафиолетовых* лучах. Наличие инфракрасных волн было установлено в 1800 г. Гершелем, наблюдавшим нагревание чувствительного термометра, на который падало излучение Солнца с длинами волн, лежащими за красным концом спектра. Гершель обнаружил также, что эти лучи подчиняются таким же законам отражения и преломления, как и видимый свет.

В 1801 г. Риттер и одновременно Волластон открыли, что в солнечном спектре за фиолетовым его концом имеется невидимое излучение, действующее химически на хлористое серебро (ультрафиолетовое из-

лучение). Впоследствии были установлены и другие методы исследования как ультрафиолетового, так и инфракрасного излучения.

Открытие фотографии и ее успехи сыграли решающую роль в исследовании ультрафиолетовых лучей, ибо фотографическая пластинка оказалась к ним весьма чувствительной. Исследование ультрафиолетевого излучения удобно также производить по его способности возбуждать свечение многих тел (флуоресценция и фосфоресценция) и вызывать фотоэлектрический эффект. Фотографировать можно также и инфракрасное излучение, применяя особым способом обработанные фотопластинки (сенсибилизация, см. гл. XXXV). Таким путем удается, однако, дойти лишь до $\lambda = 1{,}2-1{,}3$ мкм. Значительно дальше простирается чувствительность к инфракрасным лучам у современных фотоэлементов и фотосопротивлений, с помощью которых можно регистрировать инфракрасное излучение примерно до 100 мкм. Используя влияние инфракрасных лучей на яркость фосфоресценции (см. гл. XXXVIII), удалось исследовать область спектра до 1,7 мкм. Однако тепловой метод, применимый для любой длины волны, является и доныне весьма распространенным при работе с инфракрасным излучением, особенно для длин волн больше 2 мкм. Конечно, при этом применяются весьма чувствительные термометры, особенно электрические (сверхпроводящие и обычные болометры и термопары), позволяющие констатировать подъем температуры на миллионную долю градуса (10^{-6} К).

Используя приемники, полностью поглощающие всю падающую на них тепловую энергию (абсолютно черное тело, см. гл. XXXVI), зная теплоемкость приемника и учитывая потери тепла, можно по повышению температуры оценить в абсолютных единицах энергию, приносимую лучами, что также является принципиальным преимуществом теплового метода. Им пользуются для *измерений* лучистой энергии всех длин волн, включая и ультрафиолетовые, особенно в тех случаях, когда желают получить количественные данные о распределении энергии по спектру излучающего тела. На рис. 19.1 показано схематически такое распределение для спектра Солнца. Для иных источников (например, лампа накаливания или ртутная лампа) распределение энергии по длинам волн может существенно отличаться от приведенного. Несмотря на универсальность теплового метода и возможность получения сравнимых между собой количественных показаний, обычно удобнее использовать для разных интервалов длин волн специальные приемы исследования, упомянутые выше.

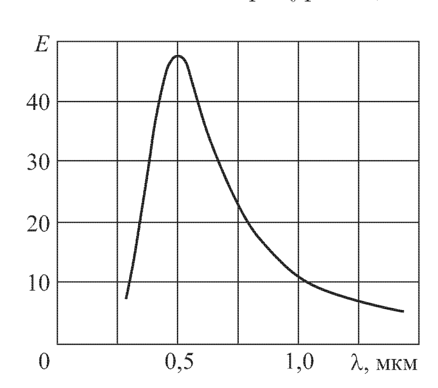


Рис. 19.1. Распределение энергии в спектре Солнца

При изучении инфракрасного излучения с большой длиной волны главное затруднение состоит в подыскании достаточно мощного источника их. Обычным источником инфракрасного излучения является нагретое тело. При небольшой температуре интенсивность излучения весьма незначительна; при повышении же температуры общая мощность излучаемой энергии быстро растет, но максимум излучения приходится на все более и более короткие волны, так что энергия длинноволновых лучей возрастает не очень значительно. В настоящее время наблюдаются инфракрасные волны длиной приблизительно 1 мм. Создание более длинных электромагнитных волн оказывается более удобным по методу возбуждения электромагнитных колебаний, примененному впервые Герцом и рассматриваемому в учении об электричестве. Этим методом, как известно, получаются и сравнительно длинные электромагнитные волны, используемые в радиотехнике (волны длиной в несколько десятков сантиметров, метров и километров). В последние годы были получены по методу электрических колебаний электромагнитные волны, также очень короткие, длиной в несколько десятых миллиметра. Таким образом, волны длиной в несколько десятых миллиметра можно получить и по методу испускания раскаленными телами (как инфракрасные), и по методу электрических колебаний (подобно герцовым). Другими словами, область инфракрасных и герцовых волн перекрывается, и мы имеем непрерывный переход от видимого света к сколь угодно длинным электромагнитным волнам.

В работах по заполнению промежутка между инфракрасными и герцовыми волнами важную роль сыграли работы русских исследователей (П.Н. Лебедев, М.А. Левитская, А.А. Аркадьева-Глаголева).

Распространение наших сведений на область ультрафиолетовых волн также шло довольно медленно. Основная трудность их исследования состоит в том, что короткие ультрафиолетовые волны сильно задерживаются различными веществами. Обычное стекло мало пригодно для исследований ультрафиолетового излучения. Применяют специальные сорта стекла (прозрачные приблизительно до 300–230 нм) или кварц (прозрачный примерно до 180 нм). Для более коротких волн приходится применять оптику из флюорита (приблизительно до 120 нм). Получили распространение и искусственно приготовленные кристаллы. Лучшие образцы таких кристаллов фтористого лития прозрачны до 180 нм. Для еще более коротких волн нет подходящего по прозрачности материала для призм и линз, и приходится применять отражательную оптику: вогнутые зеркала и отражательные дифракционные решетки. Однако для столь короткого ультрафиолета непрозрачны и газы при обычном давлении. Заметное поглощение в кислороде (и воздухе) наблюдается уже при 180 нм. Поэтому для исследований с более короткими волнами применяют спектральные установки, из которых выкачан воздух (вакуумспектрографы). Второе затруднение состоит в том, что желатин, составляющий основу фотографических пластинок, заметно поглощает ультрафиолет, начиная примерно с 240–230 нм, так что для более короткого ультрафиолета применяют обычно безжелатинные пластинки. Вводя все эти усовершенствования, удалось продвинуть фотографическое

изучение ультрафиолетового света приблизительно до 2,0 нм. При этом, конечно, приходится прибегать к падению света на решетку под скользящим углом. При угле падения 89° удалось наблюдать линию шестнадцатикратно ионизованного железа (атом железа, от которого оторвано 16 электронов) при $\lambda = 1{,}21$ нм.

Применение кристаллов в качестве дифракционных решеток позволяет продвигаться в еще более коротковолновую область спектра. Таким способом был изучен, например, спектр излучения водородоподобного железа (кратность ионизации 25). Длины волн его резонансных линий оказались равными 0,17767 и 0,17819 нм.

Исследование ультрафиолетовых волн, в частности коротких и очень коротких, может также производиться и при помощи фотоэлектрического эффекта.

§ 114. Открытие рентгеновских лучей и методы их получения и наблюдения

Продвижение в область еще более коротких волн со стороны ультрафиолетового излучения встречает огромные трудности. Однако оказалось возможным подойти к исследованию этой области спектра с другой стороны, опираясь на открытие, сделанное в 1895 г. Рентгеном.

Рентген обнаружил, что при электрическом разряде в эвакуированной трубке (например, в трубке, применяемой для исследования катодных частиц) с ее анода испускаются лучи, способные проникать через тела, непрозрачные для обычного света (черная бумага, картон, тонкие слои металла и т.д.). Эти лучи, названные Рентгеном *X-лучами*, но больше известные под именем *рентгеновских лучей*, были обнаружены им благодаря их способности вызывать свечение флуоресцирующего экрана. Рентген скоро нашел также, что они способны вызывать почернение фотографической эмульсии и потерю заряда на электроскопе вследствие ионизации воздуха. Таким образом, для исследования рентгеновских лучей можно применять и флуоресцирующий экран, и фотопластинку, и ионизационную камеру с электроскопом. Установлено также, что они способны вызывать фотоэффект и, конечно, могут быть исследованы по их тепловым действиям, хотя последний способ исследования затруднен слабым поглощением рентгеновских лучей, настолько слабым, что для полного их задержания требуются сравнительно толстые слои металла; между тем обнаружить небольшое приращение количества тепла в массивном слое металла очень затруднительно. Следует отметить, что Рентген не только впервые обнаружил новое излучение, но и сумел в своих первых работах всесторонне исследовать его, установив весьма многие его существенные особенности. Рентген нашел, что местом, откуда исходят лучи, является участок трубки, который бомбардируется электронами, и осуществил такое ее устройство, которое наиболее благоприятным образом обеспечивает получение и использование рентгеновских лучей (рис. 19.2). Для того чтобы сконцентрировать пучок электронов в одно место, катод делается вогнутым и в его полость помещается нагреваемая проволочная спираль. Таким образом осуществляется

фокусировка пучка электронов. Между катодом и анодом накладывается напряжение в несколько десятков киловольт.

Так как бо́льшая часть энергии ударяющихся об анод электронов превращается в тепло и лишь малая ее доля (около 0,1%) излучается в виде рентгеновских лучей или сохраняется в виде энергии отразившихся электронных пучков, то анод в мощных трубках сильно нагревается и может расплавиться. Косой срез анода обеспечивает излучение рентгеновских лучей в сторону через стенку стеклянного баллона трубки.

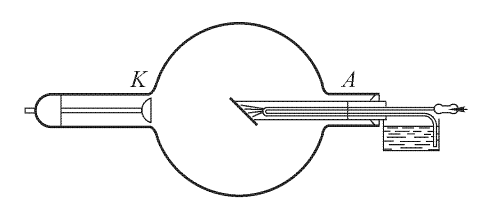


Рис. 19.2. Схема рентгеновской трубки: A — анод (охлаждается водой), K — катод

§ 115. Поглощение рентгеновского излучения

Самой замечательной особенностью рентгеновского излучения является, как уже упоминалось, его способность проникать через непрозрачные для обычного света вещества. Уже сам Рентген широко исследовал эту способность рентгеновских лучей, наблюдая свечение флуоресцирующего экрана, помещенного на пути лучей за слоем исследуемого вещества. Рентген обнаружил, что поглощение рентгеновского излучения в каком-либо веществе не связано с его прозрачностью для обычных лучей. Так, например, черная бумага или картон поглощают ренгеновские лучи значительно слабее, чем стекло такой же толщины, особенно если оно содержит свинцовые соли.

Рентген установил, что способность вещества поглощать рентгеновские лучи тем больше, чем больше его плотность, так что свинцовые пластинки ослабляют поток рентгеновского излучения гораздо сильнее, чем пластинки той же толщины, сделанные из алюминия. Существенно для поглощения наличие в поглощающем веществе атомов тяжелых элементов, независимо от того, в какие соединения они входят. Так, например, тонкий слой свинцовых белил или стекло со свинцовыми солями сильно поглощают рентгеновские лучи именно благодаря наличию в их составе тяжелых атомов свинца.

В тех же исследованиях Рентген установил и другой крайне важный факт, использованный им для характеристики применяемых в том или ином случае лучей. Было обнаружено, что поглощение рентгеновских лучей *одним и тем же веществом* различно в зависимости от условий их получения. Лучи, сильно поглощаемые, были названы *мягкими*, лучи, слабо поглощаемые, — *жесткими*. Таким образом, способность лучей проникать сквозь вещество характеризует степень их *жесткости*.

Сравнение жесткости лучей производится обычно путем определения их способности поглощаться в каком-либо определенном веществе (например, в алюминии). Но и во всех других веществах более жесткие лучи поглощаются слабее (исключение составляют некоторые явления избирательного поглощения, о которых речь будет ниже).

Дальнейшие исследования поглощения рентгеновских лучей позволили установить количественную меру их жесткости. Измеряя интенсивность [1]) рентгеновских лучей *до и после* поглощающего вещества, можно установить закон их поглощения в виде соотношения

$$I = I_0 e^{-\mu d},$$

где I — интенсивность излучения после поглощения, I_0 — интенсивность излучения, падающего на поглощающее вещество, d — толщина поглощающего слоя в сантиметрах, μ — коэффициент поглощения, характеризующий жесткость.

Легко видеть, что $\mu = 1/d_0$, где d_0 — толщина слоя, уменьшающего интенсивность лучей в $e = 2{,}718$ раз. Иногда жесткость лучей характеризуют толщиной поглощающего слоя определенного вещества (обычно алюминия), способной ослабить интенсивность рентгеновского излучения в *два* раза. Эта толщина D связана с d_0 и μ простыми соотношениями

$$D = 0{,}69 d_0 = \frac{0{,}69}{\mu}\,. \tag{115.1}$$

Жесткость рентгеновских лучей может быть самой различной. Применяются лучи, для которых D в алюминии варьирует от 0,0006 до 6 см, т.е. изменяется в 10 000 раз.

Все оценки способности рентгеновских лучей поглощаться и их жесткости очень затрудняются тем, что из трубки выходят очень неоднородные рентгеновские лучи, т.е. «смесь» лучей различной жесткости. Пропуская их через поглощающее вещество, мы задерживаем более мягкие лучи, получая таким образом более однородный пучок. Этот метод *фильтрования* довольно груб и не обеспечивает получения строго однородных монохроматических лучей. В настоящее время мы располагаем приемами монохроматизации, подобными применяемым в оптике обычных длин волн, т.е. методами, при использовании которых испускается почти монохроматическое рентгеновское излучение, подвергающееся дальнейшей монохроматизации при помощи дифракции. Таким образом получаются лучи, не уступающие по монохроматичности световым лучам, и для них коэффициент поглощения имеет совершенно определенный физический смысл. Для таких монохроматических лучей он зависит от плотности ρ поглощающего

---

[1]) Как уже упоминалось выше, определение интенсивности рентгеновских лучей по количеству тепла, выделяемого ими при поглощении в металлах, являясь принципиально наиболее прямым способом, связано с большими практическими затруднениями. Интенсивность рентгеновских лучей может измеряться также и по наблюдению других действий рентгеновских лучей: по интенсивности вызываемой ими флуоресценции, по скорости происходящей под их влиянием фотохимической реакции, в частности, по почернению фотографической пластинки, и по силе ионизационного тока, получаемого при их действии. Наиболее разработан ионизационный метод, при котором стараются добиться того, чтобы рентгеновские лучи полностью поглощались в ионизационной камере (толстый слой газа, применение тяжелого газа). Теперь в стандартных рентгеновских установках для структурного анализа обычно применяются счетчики Гейгера.

вещества и грубо приближенно может считаться пропорциональным плотности. Более точно поглощение определяется *числом* атомов поглощающего вещества на единице толщины слоя. При переходе же от одних атомов к другим поглощение быстро растет с увеличением атомного веса, правильнее, атомного номера Z, будучи пропорционально кубу атомного номера.

Уже сам Рентген, установивший понятие жесткости рентгеновских лучей, показал, что она определяется режимом рентгеновской трубки: чем больше разность потенциалов между анодом и катодом, ускоряющая электроны, т.е. чем больше скорость электронов, бомбардирующих анод, тем жестче рентгеновские лучи.

Таким образом, одна и та же трубка с накаливаемым катодом может служить для получения рентгеновских лучей *любой* жесткости, определяемой наложенным ускоряющим полем (управляемые трубки). В трубках этого типа жесткость быстро растет с увеличением разности потенциалов. Опыт показывает, что средний коэффициент поглощения μ лучей такой трубки приблизительно обратно пропорционален *кубу* разности потенциалов между анодом и катодом V, т.е.

$$\mu \sim \frac{1}{V^3}\,. \tag{115.2}$$

§ 116. Природа рентгеновских лучей

Хотя уже первые исследователи рентгеновских лучей (Стокс, Д.А. Гольдгаммер и отчасти сам Рентген [1])) высказывали мысль, что рентгеновские лучи суть электромагнитные волны, возникающие при торможении быстрых электронов, ударяющихся об анод, однако ряд свойств рентгеновского излучения трудно было примирить с его волновой природой. Вообще исследование большинства его свойств давалось с большим трудом. Долго не удавалось наблюдать отражение и преломление рентгеновских лучей при переходе из одной среды в другую. Рентген смог только обнаружить слабые следы рассеяния рентгеновских лучей, что, конечно, легко было объяснить и исходя из предположения о корпускулярной их природе.

Особенным затруднением для гипотезы волновой природы рентгеновских лучей служили неудачи опытов, проделанных Рентгеном и рядом других исследователей с целью обнаружить интерференцию и дифракцию рентгеновских лучей. Лишь значительно позже (около 1910 г.) выяснилось, что длина волны рентгеновского излучения значительно меньше, чем у видимого света и ультрафиолетовых лучей, и поэтому первые опыты по осуществлению интерференции были заранее обречены на неудачу.

Надо отметить, что уже после опубликования первых работ Рентгена, а именно в 1897 г., Стокс высказал в общем правильные в рамках современных представлений взгляды на природу рентгеновских

[1]) Рентген полагал, что открытые им лучи представляют собой продольные световые волны. Однако он не отстаивал этого взгляда и считал возможным и другие толкования.

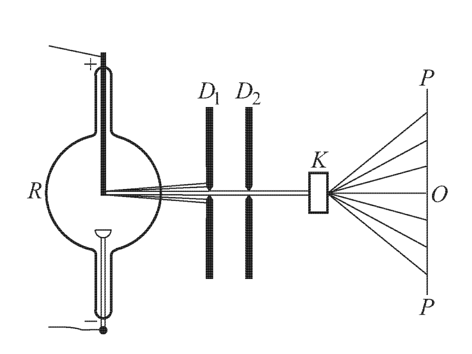
лучей. Стокс считал, что это — короткие электромагнитные импульсы, возникающие при резком изменении скорости электронов, ударяющихся об анод. Такое изменение скорости движущегося заряда можно рассматривать как ослабление электрического тока, каковым является летящий электрон; оно сопровождается ослаблением связанного с движущимся электроном магнитного поля. Изменение магнитного поля индуцирует в окружающем пространстве переменное электрическое поле, которое в свою очередь вызывает переменный ток смещения, и т.д. Возникает, согласно представлениям Максвелла, электромагнитный импульс, который распространяется в пространстве со скоростью света.

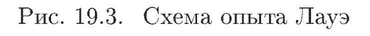
Недостаток ясности в этих представлениях и, главное, недостаток опытных данных привели к возникновению и другого взгляда на рентгеновские лучи, к которому вскоре примкнул и сам Рентген.

Окончательное выяснение природы рентгеновских лучей произошло в 1912 г., когда по идее М. Лауэ удалось осуществить с несомненностью явление дифракции рентгеновских лучей.

§ 117. Дифракция рентгеновских лучей на кристаллической решетке

Опыт, осуществленный Лауэ и его сотрудниками, состоит в следующем. Узкий пучок рентгеновских лучей (рис. 19.3), выделенный рядом свинцовых диафрагм D_1, D_2, падает на кристалл K и, проходя сквозь него, достигает фотографической пластинки PP. На пластинке после ее проявления обнаруживается, кроме центрального пятна, соответствующего первоначальному направлению рентгеновских лучей, ряд правильно расположенных пятнышек (рис. 19.4). Их положение




Рис. 19.3. Схема опыта Лауэ

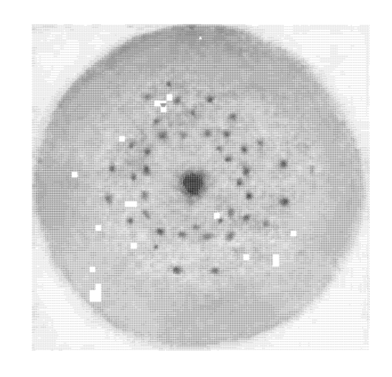


Рис. 19.4. Лауэграмма кристалла ZnS

вполне определено для данного кристалла и меняется, если кристалл одного вещества заменить кристаллом другого. Явлению этому можно дать полное количественное истолкование, если допустить, что рентгеновские лучи суть волны, испытывающие дифракцию на простран-

ственной решетке, каковой является кристалл. Действительно, кристалл представляет собой совокупность атомов, расположенных в виде правильной пространственной решетки. Расстояние между атомами составляет доли нанометров (для кристалла каменной соли, например, расстояние от Na до Cl равно 0,2814 нм). Каждый атом решетки становится центром рассеяния рентгеновских волн, когерентных между собой, ибо они возбуждаются одной и той же приходящей волной. Интерферируя между собой, эти волны дают по известным направлениям максимумы, которые вызывают образование отдельных дифракционных пятнышек на фотографической эмульсии. По положению и относительной интенсивности этих пятнышек можно составить представление о расположении рассеивающих центров в кристаллической решетке и об их природе (атомы, атомные группы или ионы). Поэтому явление дифракции, будучи важнейшим и непосредственным доказательством волновой природы рентгеновских лучей, стало основой экспериментального изучения кристаллических решеток. Благодаря открытию Лауэ оказалось возможным плодотворно исследовать вопрос о структуре кристаллов. В последнее время метод Лауэ применяют к исследованию строения молекул и жидкостей и даже газов, наблюдая дифракцию на составных частях молекулы. Несмотря на то, что при этом дифракционная картина менее отчетлива, и в данном случае получаются крайне важные результаты.

Открытие Лауэ рассматривалось в свое время как явное доказательство волновой, а не корпускулярной природы рентгеновских лучей. В настоящее время мы знаем, что дифракционные явления могут наблюдаться и с корпускулами. К вопросу о волновой и корпускулярной природе излучения мы вернемся ниже (ср. § 178).

§ 118. Спектрография рентгеновских лучей

Картина, описанная в предыдущем параграфе, соответствует дифракции на *пространственной* решетке, рассмотренной в гл. X. Характерная особенность ее заключается в том, что при данном периоде решетки при заданном направлении первичного пучка наблюдаются максимумы лишь определенных длин волн. Поэтому если на наш кристалл падает «белый» рентгеновский свет, т.е. рентгеновский импульс, эквивалентный совокупности волн самых разных длин, то кристалл выделит лишь некоторые определенные длины волн (монохроматизирует их). Наоборот, если падающий рентгеновский импульс близок к монохроматическому, то при *неподходящем* соотношении угла падения, длины волны и постоянной решетки мы не сможем наблюдать максимумов, а обнаружим лишь равномерное рассеяние.

Если параллельный пучок рентгеновского излучения падает на кристалл, то на каждой атомной плоскости будет происходить дифракция. Максимум интенсивности дифрагировавших рентгеновских волн соответствует направлению, определяемому законами правильного отражения. Условие же взаимного усиления волн, отраженных от разных плоскостей, запишется, очевидно, в виде

$$2d\sin\theta = n\lambda, \qquad (118.1)$$

где d — расстояние между слоями, θ — угол скольжения (дополнение угла падения до $\pi/2$), λ — длина волны дифрагировавшего излучения (см. § 53).

Это *соотношение Брэгга*, выведенное также Ю.В. Вульфом, указывает, какие длины волн могут интенсивно отражаться от кристалла при данном угле падения. Волны другой длины рассеиваются более или менее равномерно по всем направлениям, давая лишь общий фон на пластинке и не приводя к образованию на фотоэмульсии максимумов почернения. Если мы желаем использовать дифракцию на кристалле для построения спектрографа для рентгеновских лучей, то необходимо принять во внимание упомянутую особенность действия пространственной решетки. Существует несколько приемов, позволяющих с помощью пространственной решетки установить места дифракционных максимумов для любой длины волны.

а. Метод широкого пучка (Мозли, 1913 г.). Он состоит в том, что лучи от анода A рентгеновской трубки направляют на кристалл K широким расходящимся пучком, образующим *всевозможные* углы скольжения (рис. 19.5). В таком случае, согласно соотношению Брэгга, лучи разной длины волны отразятся на фотопластинку PP под разными углами, и мы получим на пластинке дифракционные пятна от разных длин волн, т.е. спектр рентгеновского импульса. Метод этот был использован в первых весьма важных работах по спектрографии рентгеновских лучей. В настоящее время он имеет лишь исторический интерес.

б. Метод вращающегося (качающегося) кристалла. В этом методе лучи, вырезанные диафрагмами D_1 и D_2, падают на кристалл параллельным пучком, но кристалл K во время съемки покачивается при помощи часового механизма (поворачивается то в

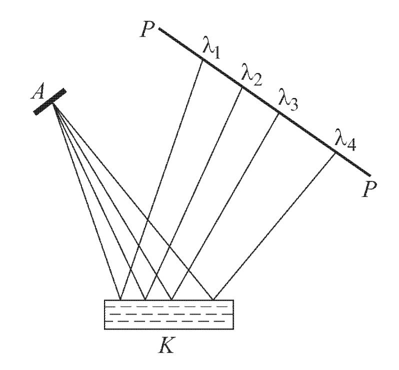


Рис. 19.5. Схема спектрографии рентгеновских лучей методом широкого пучка

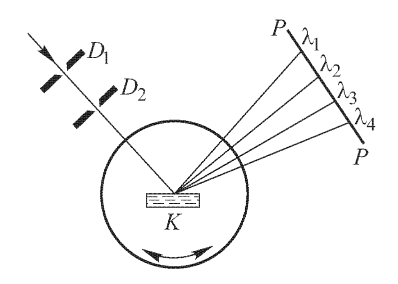


Рис. 19.6. Схема спектрографии рентгеновских лучей по методу качающегося кристалла

одну, то в другую сторону), образуя с направлением первичного пучка рентгеновского излучения *всевозможные* углы скольжения (рис. 19.6). Поэтому мы также получим спектр рентгеновского импульса.

Этот метод лежит в основе построения современных рентгеновских спектральных приборов.

Указанные приемы служат для выделения определенных длин волн рентгеновских лучей (монохроматоры) или для определения длин волн монохроматических лучей (спектрометры).

Важнейшее применение рентгеновской спектрографии — исследования с помощью рентгеновских лучей структуры кристаллов (а в последнее время и молекул) и определение параметров кристаллической решетки. В тех случаях, когда мы располагаем монокристаллами достаточных размеров, можно применить для таких рентгеноструктурных исследований метод Лауэ (см. § 117), используя рентгеновское излучение со сплошным спектром.

В случае кристаллических порошков или поликристаллических тел структурное исследование можно выполнить по методу, предложенному в 1916 г. Дебаем и Шерером, а также Хеллом. Монохроматический пучок рентгеновских лучей направляется на столбик прессованного кристаллического порошка или палочку из поликристаллического материала (рис. 19.7); различные кристаллики препарата имеют всевозможные ориентации, так что падающий пучок образует с атомными плоскостями самые разнообразные углы. Лучи

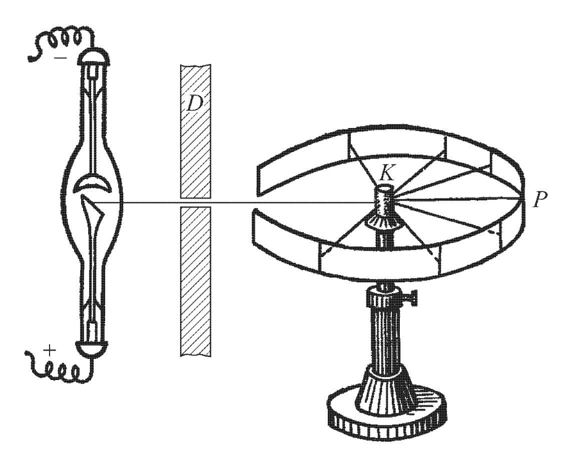


Рис. 19.7. Схема спектрографии рентгеновских лучей по методу различных ориентаций кристаллов

заданной длины волны λ отразятся под разными углами от различных атомных плоскостей, соответствующих различным значениям θ (см. (118.1)), создавая на фотопленке, окружающей препарат, соответствующую дифракционную картину. Рисунок 19.8 воспроизводит полученную рентгенограмму; в центре виден след прямого пучка; вправо и влево расположены следы отраженных лучей, причем каждая пара симметричных следов соответствует отражению от кристаллографических плоскостей одного определенного направления. Зная длину волны λ и измеряя углы скольжения θ, мы можем с помощью такой

рентгенограммы установить структуру монокристаллических объектов, какими являются большинство металлов и других технических материалов.

Если при исследованиях рентгеновских лучей в качестве дифракционной решетки использовать искусственную *плоскую* решетку с относительно грубым периодом и направить на нее рентгеновские лучи под углом, близким к 90°, то возможно наблюдение дифракции от плоской решетки, т.е. с максимумами, соответствующими всем длинам волн (ср. § 47).

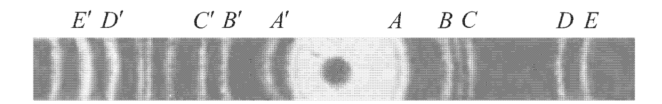


Рис. 19.8. Рентгенограмма, полученная по схеме, изображенной на рис. 19.7

Использование наклонного падения на плоские решетки позволило определить длину волны рентгеновских лучей с большой точностью. Повторяя те же измерения с пространственной решеткой каменной соли, можно было по известной длине рентгеновского излучения точно определить период решетки каменной соли, т.е. расстояние между составляющими эту решетку ионами. Отсюда удалось найти точное значение числа молекул в одном моле, т.е. число Авогадро. Эти определения числа Авогадро считаются самыми надежными. Согласно им значение числа Авогадро рекомендовано (в 1974 г.) считать равным $6{,}022045 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ вместо прежнего $6{,}0247 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ (1955 г.).

§ 119. Сплошной рентгеновский спектр. Понятие о характеристических лучах

Методы, указанные в предыдущем параграфе, позволяют исследовать характер спектра рентгеновского импульса даже в том случае, когда импульс является «белым», т.е. дает сплошной спектр. Такой характер имеет спектр рентгеновских лучей, получающихся в обычных условиях в рентгеновской трубке при торможении электронов ударами об анод. Изменение скорости электрона происходит при этом случайным путем, и образующееся излучение представляет совершенно «неправильный» импульс, эквивалентный совокупности разнообразных длин волн. Однако наряду с такими импульсами появляется и гораздо более монохроматическое излучение. При бомбардировке анода электронами определенной скорости наблюдается следующее явление: при некоторой их скорости, величина которой определяется веществом анода, последний становится источником почти монохроматических лучей с длиной волны, характерной для вещества данного анода. Такие лучи обязаны своим происхождением процессам внутри атомов этого вещества. Для того чтобы вызвать подобные процессы, требуется известная минимальная энергия, характерная для вещества анода. Получающиеся монохроматические лучи характеризуют вещество анода и носят поэтому название *характеристических*.

В настоящее время после установления методов рентгеновской спектроскопии понятие жесткости рентгеновского излучения может быть заменено более определенным понятием длины волны. В соответствии с этим характеристическое излучение данного вещества мы определяем как излучение, имеющее определенную длину волны.

Рентгеновский «белый свет», испускаемый обычной трубкой, представляет собой совокупность лучей различных длин волн и, следовательно, различных жесткостей. Когда мы говорим о жесткости таких лучей, то имеем в виду некоторую среднюю величину, характеризующую главную часть рассматриваемого импульса. В этом смысле можно говорить и о какой-то средней длине волны, характеризующей данный импульс. Можно установить связь между этой средней длиной волны λ_m и ускоряющим напряжением V, наложенным на трубку. Опыт показывает, что

$$\lambda_m \sim \frac{1}{V} \text{ нм}, \tag{119.1}$$

где V выражено в киловольтах.

В соответствии с последней формулой и формулой (115.2), можно написать соотношение между коэффициентом поглощения и длиной волны

$$\mu \propto \lambda^3, \tag{119.2}$$

т.е. коэффициент поглощения приблизительно пропорционален кубу длины волны. Как явствует из этого соотношения, выведенного из опыта, коэффициент поглощения излучения быстро уменьшается при уменьшении длины волны. Однако для каждого вещества существуют области длин волн, в которых поглощение резко возрастает (в 8–10 раз) против нормального хода (селективное поглощение). Такие области соответствуют областям характеристического излучения данного вещества.

§ 120. Оптика рентгеновских лучей

Трудности обнаружения волновых свойств рентгеновского излучения связаны с чрезвычайной малостью его длин волн. Действительно, измерения последних показывают, что при использовании обычных рентгеновских трубок мы имеем дело с волнами, длина которых измеряется десятыми нанометров, т.е. в тысячу раз меньше длин волн видимого света.

Характеристические лучи разных химических элементов периодической системы также имеют длины волн того же порядка. Каждый элемент может испускать несколько групп характеристических лучей, причем жесткость последних возрастает по мере перехода к элементам с бо́льшим атомным номером. Если сравнить между собой жесткие характеристические лучи, то мы получим следующие длины волн: для Mg 0,95, для Fe 0,17, для Ag 0,05, для W 0,018 нм и для самого тяжелого элемента — урана 0,01 нм. Столь короткая длина волны и соответственно огромная частота приводят к тому, что на первый план выступает корпускулярный (квантовый) характер рентгеновского излучения. Поэтому требуются специальные, трудно осуществимые условия опыта, при которых волновой характер рентгеновских лучей

проявляется отчетливо. Тем не менее, за последние годы здесь были достигнуты большие успехи. Познакомимся с несколькими основными фактами из этой области — оптики рентгеновских лучей.

а. Правильное отражение. Обычная зеркальная поверхность грубо шероховата для рентгеновских лучей и только при падении под очень скользящим углом может дать правильное отражение. Такое отражение было достигнуто на опыте; кроме того, на том же принципе основана отражательная дифракционная решетка (см. § 47).

Другой способ получения правильного отражения осуществляется в опыте Лауэ, где отражающей поверхностью являются кристаллографические плоскости, в которых атомы образуют несравненно более совершенную плоскость (расположены строго периодически), чем всякая искусственно отполированная плоская поверхность.

б. Преломление. Первые указания на наличие преломления рентгеновских лучей обнаружились в отступлении от условия Брэгга, определяющего положение максимумов при дифракции в кристалле. Эти отступления нашли себе объяснение в допущении преломления лучей при выходе из кристалла. Отсюда можно было оценить показатель преломления для рентгеновских лучей. Он оказался меньше единицы. В соответствии с этим удалось осуществить явление полного внутреннего отражения на границе воздух–среда. Так, например, на границе воздух–стекло предельный угол скольжения получился равным $11'$; отсюда можно было точно определить показатель преломления стекла для рентгеновского излучения.

Наблюдалось также преломление в стеклянной призме, на которую падал расходящийся пучок рентгеновских лучей. Некоторые лучи пучка падали под углом, бóльшим предельного, и испытывали полное внутреннее отражение, другие преломлялись в призме и разлагались в спектр. Таким образом удалось наблюдать и измерять дисперсию рентгеновских лучей, т.е. зависимость показателя преломления от длины волны. Отличие показателя преломления от единицы весьма мало (в шестом десятичном знаке), различие показателей преломления для разных длин волн еще меньше; в связи с этим соответствующие измерения выполнены довольно грубо.

§ 121. Шкала электромагнитных волн

Все предыдущее показывает, что рентгеновское излучение представляет собой электромагнитные волны, отличающиеся от обычного света лишь своей малой длиной. Однако разнообразие длин волн рентгеновских лучей чрезвычайно велико. Если обычно длины волн рентгеновского излучения в сотни и тысячи раз меньше длин волн света, то возможны и гораздо более мягкие рентгеновские лучи, соответствующие большей длине волны. Трудность их наблюдения заключается в том, что они очень легко поглощаются всеми телами, приближаясь в этом отношении к короткому ультрафиолетовому излучению. Действительно, принимая меры предосторожности, необходимые при работе с такими легко поглощающимися лучами, удалось наблюдать рентгеновские лучи, по длине волны заходящие в область,

которую мы обозначали как область ультрафиолета. Понятно, что в таком случае нет никакого различия между рентгеновскими и ультрафиолетовыми лучами. То или иное название для них зависит от способа их возбуждения. Если возбуждение лучей соответствует методам возбуждения рентгеновского излучения, т.е. мы подходим к этим мягким лучам со стороны более жестких, рентгеновских, то мы назовем их рентгеновскими. Если, наоборот, возникшие лучи вызваны по способу, принятому для возбуждения ультрафиолета, т.е. мы подходим к ним со стороны еще более длинных ультрафиолетовых лучей, то их естественно отнести к ультрафиолету. Область между рентгеновскими и ультрафиолетовыми лучами в настоящее время заполнена (Хольвег), подобно тому как заполнена область между герцовыми и инфракрасными лучами.

В сторону наиболее коротких волн шкала не обрывается на жестких рентгеновских лучах. Мы имеем в природе гораздо более короткие волны, чем обычные рентгеновские. Это γ-лучи, испускаемые радиоактивными веществами, которые по своей природе совпадают с рентгеновскими волнами, но отличаются еще большей жесткостью. Разнообразные радиоактивные вещества испускают γ-лучи различной длины волны: от таких, которые мягче некоторых рентгеновских лучей (γ-лучи, испускаемые полонием), до лучей, длина волны которых в сотни раз короче самых жестких из обычных рентгеновских лучей (γ-лучи, испускаемые торием С).

Таким образом, шкала электромагнитных волн представляет собой непрерывно заполненную градацию от весьма длинных электромагнитных радиоволн до волн, длина которых измеряется тысячными долями ангстрема. Конечно, не исключена возможность существования еще более коротких волн. Так, при прохождении космических лучей, представляющих собой поток корпускул, несущихся со скоростью, близкой к скорости света, образуются γ-лучи очень короткой длины волны.

Следующая диаграмма дает представление о всей шкале электромагнитных волн (рис. 19.9). Вверху диаграммы указаны длины волн,

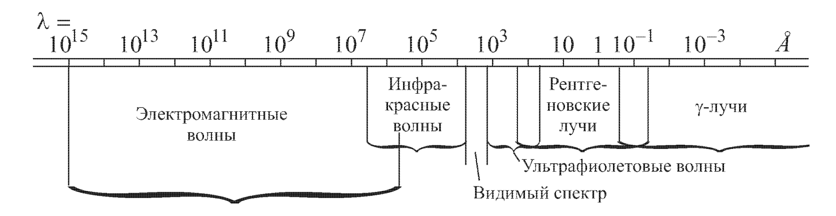


Рис. 19.9. Шкала электромагнитных волн

выраженные в ангстремах (1 Å = 0,1 нм = 10^{-8} см), на нижней ее части — наименование волн. Перекрывание областей, показанное на рисунке, указывает, сколь условно это деление на области. Ввиду огромного диапазона нанесенных на шкалу длин волн она представлена в логарифмическом масштабе.

СКОРОСТЬ СВЕТА

Глава XX

СКОРОСТЬ СВЕТА И МЕТОДЫ ЕЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

§ 122. Значение опытов по определению скорости света и первая попытка Галилея

Задача определения скорости света принадлежит к числу важнейших проблем оптики и физики вообще. Решение этой задачи имело огромное принципиальное и практическое значение. Установление того, что скорость распространения света конечна, и измерение этой скорости сделали более конкретными и ясными трудности, стоящие перед различными оптическими теориями. Первые методы определения скорости света, опиравшиеся на астрономические наблюдения, способствовали со своей стороны ясному пониманию чисто астрономических вопросов о затмениях отдаленных светил и о годичном параллаксе звезд. Точные лабораторные методы определения скорости света, выработанные впоследствии, используются при геодезической съемке. Теоретическое обоснование и экспериментальное исследование принципа Доплера в оптике сделали возможным решение задачи о лучевых скоростях светил или движущихся светящихся масс (протуберанцы, каналовые лучи) и привели к весьма широким астрономическим обобщениям. Сравнительное измерение скорости света в вакууме и различных средах послужило в свое время в качестве experimentum crucis для выбора между волновой и корпускулярной теориями света, а впоследствии привело к понятию групповой скорости, имеющему большое значение и в современной квантовой физике. Сравнение скорости распространения света с константой c максвелловской теории, обозначающей, с одной стороны, отношение между электромагнитными и электростатическими единицами заряда, а с другой — скорость распространения электромагнитного поля, сыграло важнейшую роль при обосновании электромагнитной теории света. Наконец, вопрос о влиянии движения системы на скорость распространения света и вся обширная совокупность связанных с ним экспериментальных и теоретических проблем привели к формулировке эйнштейновского принципа относительности — одного из самых значительных обобщений теоретической физики, играющего исключительно важную роль и в физике, и в философии.

Основная трудность, на которую наталкивается экспериментатор при определении скорости распространения света, связана с огромным значением этой величины, требующим совсем иных масштабов

опыта, чем те, которые имеют место в классических физических измерениях. Эта трудность дала себя знать в первых научных попытках определения скорости света, предпринятых еще Галилеем (1607 г.). Опыт Галилея состоял в следующем: два наблюдателя на большом расстоянии друг от друга снабжены закрывающимися фонарями. Наблюдатель A открывает фонарь; через известный промежуток времени свет дойдет до наблюдателя B, который в тот же момент открывает свой фонарь; спустя определенное время этот сигнал дойдет до A, и последний может, таким образом, отметить время τ, протекшее от момента подачи им сигнала до момента его возвращения. Предполагая, что наблюдатели реагируют на сигнал *мгновенно* и что свет обладает одной и той же скоростью в направлении AB и BA, получим, что путь $AB + BA = 2D$ свет проходит за время τ, т.е. скорость света $c = 2D/\tau$. Второе из сделанных допущений может считаться весьма правдоподобным. Современная теория относительности возводит даже это допущение в принцип. Но предположение о возможности мгновенно реагировать на сигнал не соответствует действительности, и поэтому при огромной скорости света попытка Галилея не привела ни к каким результатам; по существу, измерялось не время распространения светового сигнала, а время, потраченное наблюдателем на реакцию. Положение можно улучшить, если наблюдателя B заменить зеркалом, отражающим свет, освободившись таким образом от ошибки, вносимой одним из наблюдателей. Эта схема измерений осталась, по существу, почти во всех современных лабораторных приемах определения скорости света; однако впоследствии были найдены превосходные приемы регистрации сигналов и измерения промежутков времени, что и позволило определить скорость света с достаточной точностью даже на сравнительно небольших расстояниях.

§ 123. Астрономические методы определения скорости света

а. Определение скорости света по наблюдениям с Земли затмений спутников Юпитера. Метод Рёмера. Юпитер имеет несколько спутников, которые либо видны с Земли вблизи Юпитера, либо скрываются в его тени. Астрономические наблюдения над спутниками Юпитера показывают, что средний промежуток времени между двумя последовательными затмениями какого-нибудь определенного спутника Юпитера зависит от того, сближаются ли Земля и Юпитер или удаляются друг от друга, что, в свою очередь, зависит от того, на каком расстоянии друг от друга они находятся во время наблюдений.

Метод Рёмера (1676 г.), основанный на этих наблюдениях, можно пояснить с помощью рис. 20.1. Пусть в определенный момент времени Земля $З_1$ и Юпитер $Ю_1$ находятся в *противостоянии* и в этот момент времени один из спутников Юпитера, наблюдаемый с Земли, исчезает в тени Юпитера (спутник на рисунке не показан). Тогда, если обозначить через R и r радиусы орбит Юпитера и Земли и через c — скорость света в системе координат, связанной с Солнцем C, на Земле уход спутника в тень Юпитера будет зарегистрирован на

$(R-r)/c$ секунд позже, чем он совершается во временно́й системе отсчета, связанной с Юпитером.

По истечении 0,545 года Земля $З_2$ и Юпитер $Ю_2$ находятся в *соединении*. Если в это время происходит n-е затмение того же спутника Юпитера, то на Земле оно будет зарегистрировано с опозданием на $(R+r)/c$ секунд. Поэтому, если период обращения спутника вокруг Юпитера t, то промежуток времени T_1, протекший между первым и n-м затмениями, наблюдавшимися с Земли, равен

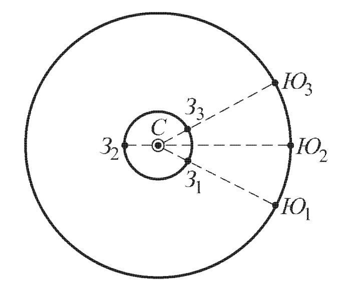


Рис. 20.1. К определению скорости света по методу Рёмера

$$T_1 = (n-1)t + \frac{R+r}{c} - \frac{R-r}{c} = (n-1)t + \frac{2r}{c}.$$

По истечении еще 0,545 года Земля $З_3$ и Юпитер $Ю_3$ будут вновь находиться в *противостоянии*. За это время совершились $(n-1)$ оборотов спутника вокруг Юпитера и $(n-1)$ затмений, из которых первое имело место, когда Земля и Юпитер занимали положения $З_2$ и $Ю_2$, а последнее — когда они занимали положения $З_3$ и $Ю_3$. Первое затмение наблюдалось на Земле с запозданием $(R+r)/c$, а последнее с запозданием $(R-r)/c$ по отношению к моментам ухода спутника в тень планеты Юпитера. Следовательно, в этом случае имеем

$$T_2 = (n-1)t - \frac{R+r}{c} + \frac{R-r}{c} = (n-1)t - \frac{2r}{c}.$$

Рёмер измерил промежутки времени T_1 и T_2 и нашел, что $T_1 - T_2 = 1980$ с. Но из написанных выше формул следует, что $T_1 - T_2 = 4r/c$, поэтому $c = 4r/1980$ м/с. Принимая r, среднее расстояние от Земли до Солнца, равным $150 \cdot 10^6$ км, находим для скорости света значение:

$$c = 301 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

Этот результат был исторически первым измерением скорости света.

б. Определение скорости света по наблюдению аберрации. В 1725–1728 гг. Брадлей предпринял наблюдения с целью выяснить, существует ли *годичный параллакс* звезд, т.е. кажущееся смещение звезд на небесном своде, отображающее движение Земли по орбите и связанное с конечностью расстояния от Земли до звезды. Как легко видеть из рис. 20.2 *а*, звезда в своем параллактическом движении должна описывать эллипс, угловые размеры которого тем больше, чем меньше расстояние до звезды.

Для звезд, лежащих в плоскости эклиптики, этот эллипс вырождается в прямую, а для звезд у полюса — в окружность. Брадлей действительно обнаружил подобное смещение. Но большая ось эллипса оказалась для *всех* звезд имеющей *одни и те же угловые размеры*, а именно $2\alpha = 40'',9$, что значительно больше ожидаемого

параллактического смещения даже для ближайшей к Солнцу звезды; наконец, направление наблюденного смещения оказалось перпендикулярным к ожидаемому вследствие параллакса (рис. 20.2 *б*). Брадлей

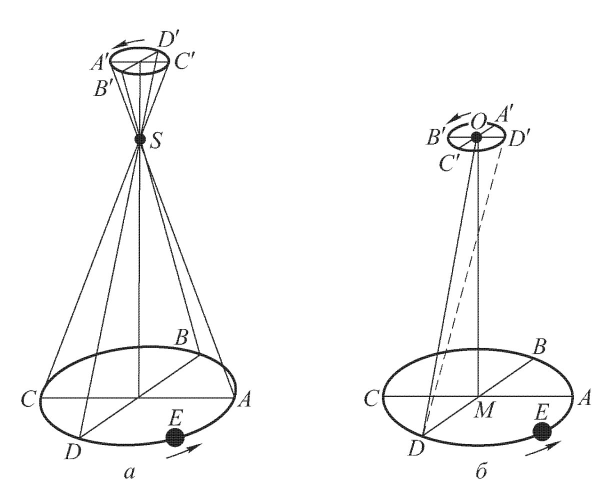


Рис. 20.2. Кажущееся смещение звезд, обусловленное годичным движением Земли: *а* — вследствие годичного параллакса; *б* — вследствие аберрации света. Кажущиеся положения звезды A', B', C', D' сопоставлены соответствующим точкам траектории Земли E

объяснил (1728 г.) наблюденное явление, названное им *аберрацией света*, конечностью скорости распространения света и использовал его для определения этой скорости. Годичный параллакс, гораздо менее значительный и зависящий от расстояния до звезды, был установлен более ста лет спустя В.Я. Струве и Бесселем (1837, 1838 гг.).

Для простоты будем вместо телескопа пользоваться визирным приспособлением, состоящим из двух небольших отверстий, расположенных по оси трубы. Когда скорость Земли совпадает по направлению с SE, ось трубы указывает на звезду. Когда же скорость Земли (и трубы) составляет угол φ с направлением на звезду, то для того, чтобы луч света оставался на оси трубы, трубу надо повернуть на угол α (рис. 20.3), ибо за время τ, пока свет проходит путь SE, сама труба перемещается на расстояние $E'E = v_0\tau$. Из рис. 20.3 можно определить поворот α. Здесь ES определяет направление оси трубы без учета аберрации, SE' — смещенное направление оси, обеспечивающее прохождение света вдоль оси трубы в течение всего времени τ. Пользуясь тем, что угол α очень мал, так

Рис. 20.3. К вычислению аберрационного смещения

как $v_0 \ll c$ (пренебрегая членами порядка v_0^2/c^2), можно считать, что

$$\angle SE'P \approx \angle SEP = \varphi.$$

Тогда из треугольника $E'SE$ получаем

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi} = \frac{v_0\tau}{c\tau} \quad \text{или} \quad \sin\alpha \approx \alpha = \frac{v_0}{c}\,\sin\varphi.$$

Если звезда лежит в плоскости эклиптики (рис. 20.4), то направление вектора скорости Земли $\mathbf{v}_0$ меняется по отношению к направлению на звезду (ES) в течение года по закону $\varphi = 2\pi t/T$, где T — период обращения Земли, и зависимость угла аберрации от времени выражается периодической функцией $\alpha = (v_0/c)\sin(2\pi t/T)$. Таким образом, направление на звезду меняется периодически в течение года: звезда совершает кажущиеся колебания с угловой амплитудой $\alpha_0 = v_0/c$ около среднего положения, соответствующего значению $\varphi = 0$ или π.

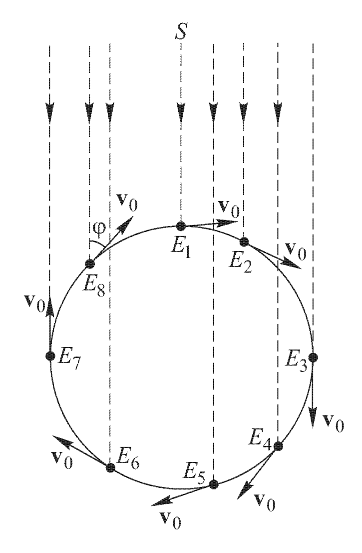


Рис. 20.4. Схематический чертеж, поясняющий, как меняется направление скорости Земли относительно прямой, соединяющей Землю со звездой S, лежащей в плоскости эклиптики

Если звезда находится в полюсе эклиптики (рис. 20.2 *б*), то $\varphi = 90°$ в течение всего года, т.е. угловое отклонение звезды от направления OE сохраняется неизменным по величине ($\alpha_0 = v_0/c$); но так как направление вектора $\mathbf{v}_0$ изменяется в течение года на угол 2π, то и угловое смещение звезды меняется по направлению: звезда описывает кажущуюся круговую орбиту $A'B'C'D'$ с угловым радиусом $\alpha_0 = v_0/c$.

В общем случае, когда звезда расположена на угловом расстоянии δ от плоскости эклиптики, аберрационная траектория звезды представляет собой эллипс, большая полуось которого имеет угловые размеры α_0, а малая — $\alpha_0 \sin\delta$. Именно такой характер и носило кажущееся смещение звезд по наблюдению Брадлея. Определив из наблюдений α_0 и зная v_0, можно найти c. Брадлей нашел $c = 308\,000$ км/с. В.Я. Струве (1845 г.) значительно улучшил точность наблюдений и получил $\alpha_0 = 20'',445$. Самые последние определения дают $\alpha_0 = 20'',470$, чему соответствует $c = 299\,900$ км/с.

Существенно отметить, что аберрация света связана с *изменением* направления скорости Земли в течение года. Постоянную скорость, как бы велика она ни была, нельзя обнаружить с помощью аберрации, ибо при таком движении направление на звезду остается неизменным и нет возможности судить о наличии этой скорости и о том, какой угол с направлением на звезду она составляет. Аберрация света позволяет судить лишь об *изменении* скорости Земли.

Изложенное простое объяснение аберрации света легко понять в рамках корпускулярных представлений о свете, которые принимал и сам Брадлей. С этой точки зрения свет представляет собой поток летящих частиц, скорость которых не зависит, конечно, от скорости трубы. Рассмотрение аберрации света в рамках волновой теории более сложно и связано с вопросом о влиянии движения Земли на распространение света. Мы вернемся к этому вопросу в § 130.

§ 124. Лабораторные методы определения скорости света

Как уже упоминалось, лабораторные методы определения скорости света представляют собой, по существу, усовершенствования метода Галилея. Удачными оказались два приема: способ Физо, автоматизирующий моменты пуска и регистрации возвращающегося сигнала (прерывания), и метод Араго–Фуко, основанный на точном измерении времени пробега светового сигнала (вращающееся зеркало). Оба эти способа подвергались неоднократным усовершенствованиям вплоть до последнего времени, причем использовались достижения современной экспериментальной техники. Благодаря им удавалось или значительно повысить точность первоначальных измерений, или значительно сократить длину базиса, вдоль которого исследуют распространение света.

Помимо указанных, был разработан ряд методов, основанных на иных принципах. О некоторых из них будет сказано ниже.

а. Метод прерываний. Физо (1849 г.) выполнил впервые определение скорости света в лабораторных условиях. Характерной особенностью его метода является автоматическая регистрация моментов пуска и возвращения сигнала, осуществляемая путем регулярного прерывания светового потока (зубчатое колесо). Схема опыта Физо изображена на рис. 20.5. Свет от источника S идет между

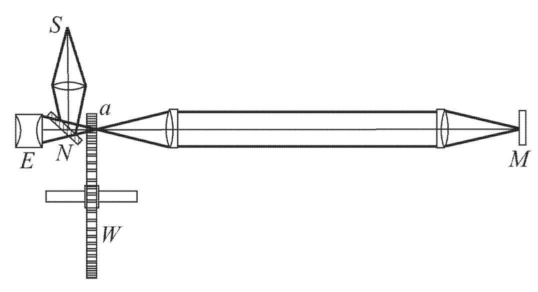


Рис. 20.5. Схема опыта по определению скорости света методом зубчатого колеса

зубьями вращающегося колеса W к зеркалу M и, отразившись обратно, должен вновь пройти между зубьями к наблюдателю. Для удобства окуляр E, служащий для наблюдения, помещается против a, а свет поворачивается от S к W при помощи полупрозрачного зеркала N. Если колесо вращается, и притом с такой угловой скоростью, что за время движения света от a к M и обратно на месте зубьев

окажутся прорези, и наоборот, то вернувшийся свет не будет пропущен к окуляру и наблюдатель не увидит света (первое затемнение). При возрастании угловой скорости свет частично дойдет до наблюдателя. Если ширина зубьев и просветов одинакова, то при двойной скорости будет максимум света, при тройной — второе затемнение и т.д. Зная расстояние $aM = D$, число зубьев z, угловую скорость вращения (число оборотов в секунду) ν, можно вычислить скорость света. Так, при первом затемнении свет, прошедший в просвет между зубцами, при своем возвращении натолкнется на ближайший зубец. Для этого необходимо, чтобы за время $t = 2D/c$ колесо повернулось на угол π/z, т.е. на угол, отделяющий центр просвета от центра соседнего зубца. Если первое затемнение появится при числе оборотов ν в секунду, то изложенное условие выразится в виде

$$\frac{2D}{c} = \frac{1}{2z\nu}, \quad \text{или} \quad c = 4Dz\nu.$$

Второе затемнение будет иметь место при тройной угловой скорости, т.е. когда возвращающийся свет будет задержан следующим зубцом, и т.д. Главная трудность определения лежит в точном установлении момента затемнения. Точность повышается при увеличении расстояния D и при скоростях прерываний, позволяющих наблюдать затемнения высших порядков. Так, Перротен вел свои наблюдения при $D = 46$ км и наблюдал затемнение 32-го порядка. При этих условиях требуются светосильные установки, чистый воздух (наблюдения в горах), хорошая оптика, сильный источник света.

Ниже приводятся результаты по методу прерываний (с дальнейшими усовершенствованиями):

Физо (1849 г.)	$D = 8{,}63$ км	$c = 315\,000$ км/с
Корню (1876 г.)	$D = 23$ км	$c = 300\,000 \pm 300$ км/с
Перротен (1902 г.)	$D = 46$ км	$c = 299\,870 \pm 50$ км/с
Бергштранд (1950 г.)		$c = 299\,793{,}1 \pm 0{,}25$ км/с.

В последнее время вместо вращающегося колеса с успехом применяют другие, более совершенные методы прерывания света. Наилучшие результаты получены с помощью конденсатора Керра (см. § 152), в котором наложение быстропеременного поля дает возможность производить до 10^7 прерываний в секунду. Это позволяет значительно улучшить точность результатов или сильно сократить длину базиса D. Так, в опытах Андерсона (1937 г.) длина базиса D составляла всего лишь 3 м, т.е. вся установка помещалась на лабораторном столе. Многочисленные усовершенствования в методах регистрации, использовавшие современные достижения радиотехники и электроники, позволили чрезвычайно сильно повысить точность измерений.

б. Метод вращающегося зеркала. Фуко (1862 г.) успешно осуществил второй метод, принцип которого еще раньше (1838 г.) был предложен Араго с целью сравнения скорости света в воздухе со скоростью его в других средах (вода). Метод основан на очень тщательных измерениях малых промежутков времени при помощи вращающегося зеркала. Схема опыта ясна из рис. 20.6. Свет от

источника S направляется при помощи объектива L на вращающееся зеркало R, отражается от него в направлении второго зеркала C и идет обратно, проходя путь $2CR = 2D$ за время τ. Время это оценивается по углу поворота зеркала R, скорость вращения которого точно известна; угол же поворота определяется из измерения смещения зайчика, даваемого возвратившимся светом. Измерения производятся

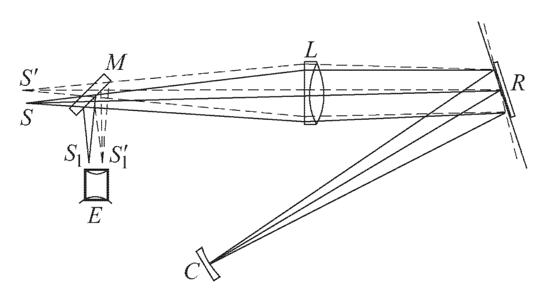


Рис. 20.6. Определение скорости света методом вращающегося зеркала

при помощи окуляра E и полупрозрачной пластинки M, играющей ту же роль, что и в предыдущем методе; S_1 — положение зайчика при неподвижном зеркале R, S_1' — при вращении зеркала. Важной особенностью установки Фуко явилось применение в качестве зеркала C вогнутого сферического зеркала, с центром кривизны, лежащим на оси вращения R. Благодаря этому свет, отраженный от R к C, всегда попадал обратно на R; в случае же применения плоского зеркала C это происходило бы лишь при определенной взаимной ориентации R и C, когда ось отраженного конуса лучей располагается нормально к C.

Фуко в соответствии с первоначальным замыслом Араго осуществил при помощи своего прибора также и определение скорости света в воде, ибо ему удалось уменьшить расстояние RC до 4 м, сообщив зеркалу 800 оборотов в секунду. Измерения Фуко показали, что скорость света в воде *меньше*, чем в воздухе, в соответствии с представлениями волновой теории света.

Дальнейшие усовершенствования метода Фуко, при которых улучшалась техника работы с вращающимся зеркалом и увеличивался путь RC, привели к очень значительному повышению точности, дав в руках Майкельсона весьма хорошие результаты по определению скорости света.

Результаты измерений по методу вращающегося зеркала таковы:

Фуко (1862 г.)	$c = 298\,000 \pm 500$ км/с
Ньюкомб (1891 г.)	$c = 299\,810 \pm 50$ км/с
Майкельсон (1902 г.)	$c = 299\,890 \pm 60$ км/с
Майкельсон (1926 г.)	$c = 299\,796 \pm 4$ км/с

Последняя (1926 г.) установка Майкельсона был выполнена между двумя горными вершинами, так что в результате получено расстояние $D \approx 35{,}4$ км (точнее, $35\,373{,}21$ м). Зеркалом служила восьмигранная

стальная призма, вращавшаяся со скоростью 528 об/с. Схема установки Майкельсона изображена на рис. 20.7.

Время, за которое свет совершал полный путь, равнялось 0,00023 с, так что зеркало успевало повернуться на 1/8 оборота и свет

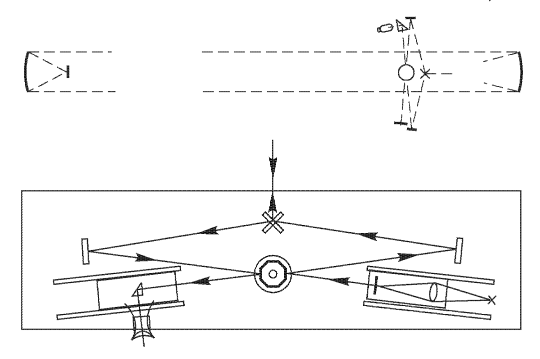


Рис. 20.7. Схема установки Майкельсона для определения скорости света

падал на следующую грань призмы. Таким образом, смещение зайчика было сравнительно незначительным, и определение его положения играло роль поправки, а не основной измеряемой величины, как в первых опытах Фуко, где все смещение достигало лишь 0,7 мм.

Были произведены также весьма точные измерения скорости распространения радиоволн. При этом были использованы радиогеодезические измерения, т.е. определение расстояния между двумя пунктами с помощью радиосигналов параллельно с точными триангуляционными измерениями. Лучшая полученная таким методом величина, приведенная к вакууму, $c = 299\,792 \pm 2{,}4$ км/с. Наконец, скорость радиоволн была определена по методу стоячих волн, образованных в цилиндрическом резонаторе. Теория позволяет связать данные о размерах резонатора и резонансной частоте его со скоростью волн. Опыты делались с эвакуированным резонатором, так что приведения к вакууму не требовалось. Лучшее значение, полученное по этому методу, $c = 299\,792{,}5 \pm 3{,}4$ км/с.

В 1972 г. значение скорости света было определено на основе независимых измерений длины волны и частоты света. В качестве источника был выбран, по ряду причин, гелий-неоновый лазер, генерирующий излучение с длиной волны 3,39 мкм. Длина волны этого излучения измерялась с помощью интерферометрического сравнения с эталоном длины, т.е. с длиной волны оранжевого излучения криптона (см. § 31). Методами нелинейной оптики (генерации излучения с суммарными и разностными гармониками, см. § 236) частоту лазерного излучения удалось сравнить с эталоном времени [1]. Таким образом было получено значение скорости света $c = \lambda\nu$, превосходящее по точ-

[1] Секунда определяется как 9 192 631 770 периодов колебаний в излучении, соответствующем переходу между двумя уровнями сверхтонкого расщепления основного состояния атома цезия 133.

ности все ранее известные значения более чем на два порядка:

$$c = 299\,792\,456{,}2 \pm 1{,}1 \text{ м/с}.$$

Сопоставим лучшие данные, полученные разными методами:

Метод вращающегося зеркала	$c = 299\,796 \pm 4$ км/с	Майкельсон, 1926 г.
Метод прерываний (усовершенствованный)	$c = 299\,793{,}1 \pm 0{,}25$ км/с	Бергштранд, 1950 г.
Радиогеодезия	$c = 299\,792 \pm 2{,}4$ км/с	Аслаксон, 1949 г.
Полый резонатор	$c = 299\,792{,}5 \pm 3{,}4$ км/с	Эссен, 1950 г.
Микроволновая интерферометрия	$c = 299\,792{,}2 \pm 0{,}2$ км/с	Фрум, 1958 г.
Измерение частоты и длины волны	$c = 299\,792{,}4562 \pm 0{,}0011$ км/с	Ивенсон, 1972 г.

Это сопоставление показывает превосходное согласие, оправдывающее ту точность измерения, на которую указывают авторы. Прекрасное совпадение скорости световых волн и скорости радиоволн вновь подтверждает справедливость электромагнитной теории света, напоминая, что первым аргументом Максвелла в пользу этой теории было тогда еще грубо установленное равенство скорости света и электродинамической постоянной, определяющей скорость распространения электромагнитных волн.

§ 125. Фазовая и групповая скорости света

Лабораторные методы определения скорости света, позволяющие производить эти измерения на коротком базисе, дают возможность определять скорость света в различных средах и, следовательно, проверять соотношения теории преломления света. Как уже неоднократно упоминалось, показатель преломления света в теории Ньютона равен $n = \sin i/\sin r = v_2/v_1$, а в волновой теории $n = \sin i/\sin r = v_1/v_2$, где v_1 — скорость света в первой среде, а v_2 — скорость света во второй. Еще Араго видел в этом различии возможность experimentum crucis и предложил идею опыта, который был выполнен позднее Фуко, нашедшим для отношения скоростей света в воздухе и воде значение, близкое к 4/3, как следует по теории Гюйгенса, а не 3/4, как вытекает из теории Ньютона. Правда, к моменту выполнения этих опытов (1862 г.) волновая теория света уже не нуждалась в подобных дополнительных аргументах. Тем не менее, по мере усовершенствования методов определения скорости света вопрос этот подвергался дальнейшему экспериментальному исследованию, причем оказалось, что дело обстоит гораздо сложнее. Так, для воды Майкельсон получил $c/v = 1{,}33$ в соответствии со значением показателя преломления воды. Но для сероуглерода он нашел $c/v = 1{,}75$, тогда как обычное определение показателя преломления дает $n = 1{,}64$. Объяснение

было найдено Рэлеем, выяснившим сложный характер понятия скорости волны.

Обычное определение показателя преломления $n = \sin i / \sin r = v_1/v_2$ из изменения направления волновой нормали на границе двух сред дает отношение фазовых скоростей волны в этих двух средах. Однако понятие фазовой скорости применимо только к строго монохроматическим волнам, которые реально не осуществимы, так как они должны были бы существовать неограниченно долго во времени и быть бесконечно протяженными в пространстве.

В действительности мы всегда имеем более или менее сложный импульс, ограниченный во времени и в пространстве. При наблюдении такого импульса мы можем выделять какое-нибудь определенное его место, например, место максимальной напряженности того электрического или магнитного поля, которое представляет собой электромагнитный импульс. Скорость импульса можно отождествить со скоростью распространения какой-либо его точки, например, точки максимальной напряженности поля. При этом, однако, надо предполагать, что импульс наш сохраняет при распространении свою форму или во всяком случае деформируется достаточно медленно или периодически восстанавливается. Для выяснения этого обстоятельства мы можем представить импульс как наложение бесконечно большого числа близких по частоте монохроматических волн (представление импульса в виде интеграла Фурье). Если, например, все эти монохроматические волны разной длины распространяются с одной и той же фазовой скоростью (среда не имеет дисперсии), то *с той же скоростью* перемещается и импульс как целое, сохраняя неизменной свою форму.

Однако среда (за исключением вакуума) обычно характеризуется дисперсией, т.е. монохроматические волны распространяются с различными фазовыми скоростями, зависящими от их длины, и импульс начинает деформироваться. В таком случае вопрос о скорости импульса становится более сложным. Если дисперсия не очень велика, то деформация импульса происходит медленно и мы можем следить за перемещением определенной амплитуды поля в волновом импульсе, например, максимальной амплитуды поля. Однако скорость перемещения импульса, названная Рэлеем *групповой скоростью*, будет отличаться от фазовой скорости любой из составляющих его монохроматических волн и должна быть предметом специального расчета.

Для простоты вычисления мы будем представлять себе импульс как совокупность *двух* близких по частоте синусоид одинаковой амплитуды, а не как совокупность бесконечного числа близких синусоид. При этом упрощении основные черты явления сохраняются. Наложение таких близких по частоте синусоид дает импульс, форма которого изображена на рис. 20.8 (биения близких по частоте колебаний). Итак, наш импульс, или, как принято говорить, *группа* волн [1]), составлен из

---

[1]) Группой волн называют импульс, который можно представить в виде совокупности бесконечного числа синусоид, частоты которых *мало* отличаются друг от друга.

двух волн

$$y_1 = a\sin(\omega_1 t - k_1 x) \quad \text{и} \quad y_2 = a\sin(\omega_2 t - k_2 x),$$

где амплитуды приняты равными, а частоты и длины волн мало отличаются друг от друга, т.е.

$$\omega_1 = \omega_0 + \delta\omega, \quad \omega_2 = \omega_0 - \delta\omega, \quad k_1 = k_0 + \delta k, \quad k_2 = k_0 - \delta k,$$

где $\delta\omega$ и δk — малые величины. Импульс (группа волн) y есть сумма y_1 и y_2, т.е.

$$y = y_1 + y_2 = a\sin(\omega_1 t - k_1 x) + a\sin(\omega_2 t - k_2 x) =$$
$$= 2a\cos\left[\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t - \frac{1}{2}(k_1 - k_2)x\right]\sin\left[\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t - \frac{1}{2}(k_1 + k_2)x\right] =$$
$$= 2a\cos(t\delta\omega - x\delta k)\sin(\omega_0 t - k_0 x).$$

Вводя обозначения $A = 2a\cos(t\delta\omega - x\delta k)$, представим наш импульс в виде $y = A\sin(\omega_0 t - k_0 x)$, где A не постоянно, но меняется во времени и пространстве, однако меняется *медленно*, ибо $\delta\omega$ и δk — малые (по сравнению с ω_0 и k_0) величины. Поэтому, допуская известную небрежность речи, мы можем считать наш импульс синусоидой с медленно изменяющейся амплитудой (ср. рис. 20.8).

Выделив на импульсе какую-нибудь точку с определенным значением A, например точку, где A максимально, мы определим скорость

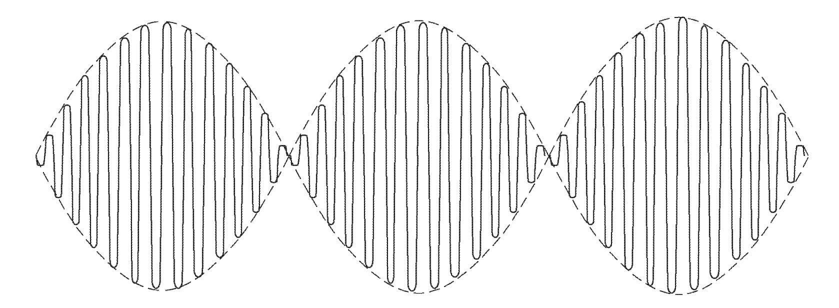


Рис. 20.8. Группа волн, представляющих суперпозицию двух близких по частоте монохроматических волн

перемещения этой точки, которая и характеризует скорость распространения импульса. Таким образом, скорость импульса (группы), которую, согласно Рэлею, называют *групповой скоростью*, есть скорость перемещения *амплитуды*, а, следовательно, и *энергии*, переносимой движущимся импульсом.

Для нахождения групповой скорости u надо написать условие постоянства амплитуды, т.е.

$$t\delta\omega - x\delta k = \text{const}.$$

Дифференцируя, находим $\delta\omega\, dt - \delta k\, dx = 0$, или

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{\delta\omega}{\delta k} = \frac{d\omega}{dk}.$$

Итак, монохроматическая волна характеризуется фазовой скоростью $v = \omega/k$, означающей скорость перемещения фазы, а импульс характеризуется групповой скоростью $u = d\omega/dk$, соответствующей скорости распространения энергии поля этого импульса.

Нетрудно найти связь между u и v. В самом деле,

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(vk)}{dk} = v + k\,\frac{dv}{dk}\,,$$

или, так как $k = 2\pi/\lambda$ и, следовательно, $dk = -(2\pi/\lambda^2)\,d\lambda$,

$$k\,\frac{dv}{dk} = -\frac{2\pi}{\lambda}\,\frac{\lambda^2}{2\pi}\,\frac{dv}{d\lambda} = -\lambda\,\frac{dv}{d\lambda}\,,$$

т.е. окончательно

$$u = v - \lambda\frac{dv}{d\lambda} \quad \text{(формула Рэлея).} \tag{125.1}$$

Если $\dfrac{dv}{d\lambda} > 0$ (нормальная дисперсия), то $u < v$; если $\dfrac{dv}{d\lambda} < 0$ (аномальная дисперсия), то $u > v$. Соотношение (125.1) можно представить в иной форме, если рассматривать показатель преломления как функцию частоты ω, а не длины волны λ. Имея в виду связь $n\lambda = 2\pi c/\omega$, из (125.1) находим

$$u = \frac{c}{n + \omega\,dn/d\omega}\,. \tag{125.2}$$

Выражение (125.2) в явном виде показывает зависимость групповой скорости от характеристик среды — показателя преломления и $dn/d\omega$.

Различие между u и v тем значительнее, чем больше дисперсия [1]) $dv/d\lambda$. В отсутствие дисперсии ($dv/d\lambda = 0$) имеем $u = v$. Этот случай, как уже сказано, имеет место лишь для вакуума (см. § 154).

Рэлей показал, что в известных методах определения скорости света мы, по самой сущности методики, имеем дело не с непрерывно длящейся волной, а разбиваем ее на малые отрезки. Зубчатое колесо и другие прерыватели в методе прерываний дают ослабляющееся и нарастающее световое возбуждение (см. рис. 1.9), т.е. группу волн. Аналогично происходит дело и в методе Рёмера, где свет прерывается периодическими затемнениями. В методе вращающегося зеркала свет также перестает достигать наблюдателя при достаточном повороте зеркала. Во всех этих случаях мы в диспергирующей среде измеряем групповую скорость, а не фазовую.

[1]) При введении понятия групповой скорости мы ограничились случаем не очень большой дисперсии, ибо в противном случае импульс быстро деформируется и понятие групповой скорости теряет смысл. Так, например, вблизи полосы поглощения вещества, где фазовая скорость очень сильно меняется с частотой, формула (125.1) могла бы дать для u значение, большее скорости света в вакууме, или отрицательное значение. В этой области формула наша неприложима. Энергия импульса распространяется со скоростью, которую можно назвать *скоростью сигнала*; она, как показывает специальное исследование, вне указанной области совпадает с групповой скоростью, а внутри нее остается меньше скорости света в вакууме.

Рэлей полагал, что в методе аберрации света мы измеряем непосредственно фазовую скорость, ибо там свет не прерывается искусственно. Однако Эренфест (1910 г.) показал, что наблюдение аберрации света в принципе не отличимо от метода Физо, т.е. тоже дает групповую скорость. Действительно, аберрационный опыт можно свести к следующему. На общей оси жестко закреплены два диска с отверстиями. Свет посылается по линии, соединяющей эти отверстия, и достигает наблюдателя. Приведем весь аппарат в быстрое вращение. Так как скорость света конечна, то свет не будет проходить через второе отверстие. Чтобы пропустить свет, необходимо повернуть один диск относительно другого на угол, определяемый отношением скоростей дисков и света. Это — типичный аберрационный опыт; однако он ничем не отличается от опыта Физо, в котором вместо двух вращающихся дисков с отверстиями фигурирует один диск и зеркало для поворота лучей, т.е. по существу два диска: реальный и его отражение в неподвижном зеркале. Итак, метод аберрации дает то же, что и метод прерываний, т.е. групповую скорость.

Таким образом, в опытах Майкельсона и с водой, и с сероуглеродом измерялось отношение групповых, а не фазовых скоростей, но для воды $dv/d\lambda$ настолько мало, что практически $u = v$, поэтому $c/u \approx c/v = n$; для сероуглерода же $dv/d\lambda$ значительно, так что $u < v$ и $c/u > c/v$, это и обнаружил опыт Майкельсона ($c/u = 1{,}76$, $c/v = 1{,}64$). Тщательное измерение дисперсии сероуглерода показало, что измеренное Майкельсоном отношение действительно соответствует отношению групповых скоростей, даваемому формулой Рэлея.

Глава XXI

ЯВЛЕНИЕ ДОПЛЕРА

§ 126. Введение

В предыдущей главе были описаны различные методы определения скорости света. Вместе с тем, многочисленные интерференционные и дифракционные явления, о которых говорилось выше, дают нам методы непосредственного измерения длины волны света в среде λ и в вакууме $\lambda_0 = n\lambda$. По этим двум величинам можно определить также частоту испускаемого излучения $\nu = v/\lambda = c/\lambda_0$ или его период $T = 1/\nu = \lambda_0/c$.

Частота или период испускаемого почти монохроматического излучения представляет собой характеристику тех внутриатомных процессов, которые обусловливают испускание. В нашем распоряжении нет методов непосредственного измерения этих частот [1]). Они опреде-

[1]) В отличие от акустики и радиотехники, где существуют методы прямого определения частот. О современных квантовых стандартах частоты см., например, Жаботинский М.Е., Золин В.Ф, Григорьянц В.В. Квантовые стандарты частоты.– М.: Наука, 1968.

ляются нами на основании измерений c и λ_0. Следует, однако, иметь в виду, что длина волны или частота наблюдаемого света может не совпадать с соответствующими длинами волн или частотами света, излучаемого атомом. Точнее, воспринимаемая частота или длина волны зависит не только от внутриатомных процессов, их обусловливающих, но также и от той системы координат, с которой связаны наблюдающие аппараты. Частота волнового процесса будет различной, если ее оценивать с помощью аппаратов, неподвижных относительно источника или движущихся по отношению к нему.

Это замечание впервые было сделано Доплером (1842 г.), который указал, что воспринимаемая частота становится *больше* при сближении источника и приемного прибора и *меньше* при их удалении друг от друга.

Рассуждения Доплера применимы ко всем волновым явлениям — оптическим, акустическим и иным. Доплер наблюдал (качественно) предсказанное им явление в акустических процессах и высказал предположение, что различие в окраске некоторых звезд обусловлено их движением относительно Земли. Последнее заключение неверно. Для подавляющего большинства звезд влияние их движения сказывается лишь в незначительных изменениях положения спектральных линий в спектре звезд. Тем не менее применимость принципа Доплера к оптическим явлениям не возбуждает сомнений. Впервые надежное экспериментальное установление оптического явления Доплера и наиболее плодотворные его применения были сделаны действительно при наблюдении астрономических явлений.

Трактовка проблемы существенно зависит от того, можем ли мы говорить лишь об *относительном* движении источника и приемника по отношению друг к другу или имеет смысл говорить о скорости возмущения *относительно среды*, т.е. принимать в расчет движение источника и приемника в этой среде.

§ 127. Явление Доплера в акустике

Для звуковых волн, несомненно, имеет место второй случай: акустические волны распространяются в среде (газ), внутри которой могут двигаться источник и приемник, так что имеет смысл вопрос не только об их движении друг по отношению к другу (относительное движение), но и о движении их по отношению к среде.

S_1 $v\tau$ B v

Рис. 21.1. К выводу формулы Доплера в случае движения источника относительно среды

Рассмотрим поэтому отдельно оба случая: а) движение источника и б) движение приемного прибора.

а) Источник движется относительно среды со скоростью v. Скорость волны в среде c — постоянная, не зависящая от движения источника.

Пусть приемник находится в точке B и источник S_1 движется со скоростью v вдоль линии S_1B, соединяющей источник с приемным прибором (рис. 21.1). Волна, испущенная в момент t_1, когда источник

находится на расстоянии $S_1B = a$ от прибора, достигнет последнего к моменту

$$\theta_1 = t_1 + \frac{a}{c};$$

волна, испущенная в момент $t_2 = t_1 + \tau$, достигнет приемника в момент

$$\theta_2 = t_2 + \frac{a \pm v\tau}{c},$$

ибо к моменту t_2 расстояние между источником и прибором сделается равным $(a+v\tau)$ или $(a-v\tau)$ в зависимости от направления движения. Итак, волны, испущенные источником за время $\tau = t_2 - t_1$, действуют на приборы в течение времени

$$\theta = \theta_2 - \theta_1 = \tau\left(1 \pm \frac{v}{c}\right).$$

Если ν_0 — частота источника, то за время τ им будет испущено $N = \nu_0\tau$ волн и, следовательно, частота, воспринимаемая прибором, есть $\nu = N/\theta$. Она равна

$$\begin{aligned} \nu' &= \frac{\nu_0}{1+v/c} \quad \text{в случае удаления источника,} \\ \nu'' &= \frac{\nu_0}{1-v/c} \quad \text{в случае приближения источника.} \end{aligned} \qquad (127.1)$$

Так как скорость волны в среде определяется свойствами последней, т.е. не зависит от движения источника и остается равной c, то в рассмотренном случае обязательно должно иметь место *изменение длины волны.*

Если обозначить через λ_0 длину волны, наблюдаемую в отсутствие движения источника, а через λ — длину волны, воспринимаемую в случае движения источника, то найдем

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0}, \quad \lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{c}{\nu_0}\left(1 \pm \frac{v}{c}\right) = \lambda_0\left(1 \pm \frac{v}{c}\right). \qquad (127.2)$$

Итак, при движении источника в среде *скорость* волны относительно прибора, находящегося в этой среде, остается постоянной, а *частота* и *длина* волны, воспринимаемые приемником, изменяются. Иными словами, опыт типа опыта Физо дает для скорости акустической волны то же значение, что и при неподвижном источнике звука, а интерференционный опыт — измененную длину волны; то же относится и к частоте, которая в случае акустических волн может наблюдаться непосредственно, например, путем сравнения с сиреной, звучащей в унисон.

Рис. 21.2. К выводу формулы Доплера в случае движения приемника относительно среды

б) Приемник движется относительно среды со скоростью v, скорость волны в среде равна c (рис. 21.2). Повторяя рассуждения, приведенные выше, мы должны были бы для θ_1 и θ_2 написать соответственно:

$$\theta_1 = t_1 + \frac{a}{c \mp v}, \quad \theta_2 = t_2 + \frac{a \pm v\tau}{c \mp v},$$

ибо сближение между волной и прибором происходит со скоростью $c \mp v$ (скорость волны относительно прибора) (см. рис. 21.2). Таким образом,

$$\theta = \tau\left(1 \pm \frac{v}{c \mp v}\right),$$

и частота, воспринимаемая приемником, будет равна

$$\nu' = \frac{\nu_0}{1 + v/(c-v)} = \nu_0\left(1 - \frac{v}{c}\right) \text{ в случае удаления прибора,}$$
$$\nu'' = \frac{\nu_0}{1 - v/(c+v)} = \nu_0\left(1 + \frac{v}{c}\right) \text{ в случае приближения прибора.} \qquad (127.3)$$

При движении приемника скорость волны относительно него складывается из скорости волны относительно среды и скорости прибора относительно среды, т.е. равна

$$(c \mp v) = c\left(1 \mp \frac{v}{c}\right).$$

Длина волны, воспринимаемая приемником, остается, таким образом, неизменной. Действительно,

$$\lambda = \frac{c \mp v}{\nu} = \frac{c(1 \mp v/c)}{\nu_0(1 \mp v/c)} = \frac{c}{\nu_0} = \lambda_0. \qquad (127.4)$$

Итак, в случае движения приемника *частота* и *скорость* волны относительно прибора меняются, но *длина волны*, воспринимаемая им, *остается неизменной*.

Опыты по определению скорости звука, его частоты и длины звуковой волны могли бы подтвердить сказанное.

Выведенные формулы относятся к случаю, когда наблюдение производится *вдоль* линии BS, по которой происходит движение источника или прибора. Если направление наблюдения составляет угол φ с направлением движения, то в наших рассуждениях нужно сделать небольшие изменения. Во-первых, при движении приемника вместо $(c \mp v)$ следует подставить $(c \mp v\cos\varphi)$, ибо именно эта величина дает в рассматриваемом случае скорость сближения волны и прибора (рис. 21.3); во-вторых, в выражение для θ_2 вместо $(a \pm v\tau)$ войдет

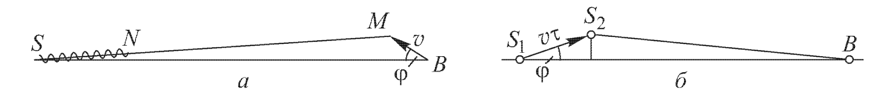


Рис. 21.3. К выводу формулы Доплера: *а* — скорость движения прибора составляет угол φ с линией источник–прибор; *б* — скорость движения источника составляет угол φ с линией источник–прибор

$(a \pm v\tau\cos\varphi)$, ибо $BS_2 = BS_1 \pm S_1S_2\cos\varphi$. При этом предполагается, что $v\tau$ мало по сравнению с $S_1B = a$. Таким образом, окончательные результаты соответствуют замене v на $v\cos\varphi$, т.е. введению *слагающей* скорости вдоль линии SB (лучевая скорость). Окончательно

получим

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 \mp v\cos\varphi/c} = \frac{\nu_0(1 \mp v\cos\varphi/c)}{1-(v\cos\varphi/c)^2} \text{ в случае движения источника,} \tag{127.5}$$

$$\nu = \nu_0(1 \mp v\cos\varphi/c) \text{ в случае движения прибора.} \tag{127.6}$$

Итак, для случая движения в *среде* мы имеем две *различные* формулы, которые отличаются друг от друга множителем

$$\frac{1}{1-(v\cos\varphi/c)^2},$$

т.е. множителем, отличающимся от единицы на величину *второго порядка малости* (относительно v/c) [1]).

Для большинства случаев, рассматриваемых в акустике, различие это невелико, и им часто пренебрегают. Но оно имеет принципиальное значение, и, кроме того, при современных технических средствах достигает нередко и практически вполне заметных величин. Так, современные самолеты могут развивать скорость около 1000 км/час и более, так что v/c достигает 80 % и различие в двух приведенных выше формулах становится значительным.

Если прибор движется относительно среды со скоростью v, а источник — со скоростью u, то нетрудно установить формулу, описывающую положение вещей для этого случая. Предполагая, что оба они движутся в одну сторону, догоняя друг друга, получим, последовательно применяя выведенные выше формулы,

$$\nu = \nu_0 \frac{1+v/c}{1+u/c}. \tag{127.7}$$

При $u = v$ найдем $\nu = \nu_0$ *вполне строго.*

Таким образом, если источник и прибор движутся совместно (т.е. неподвижны друг относительно друга), то явление Доплера не имеет места. Но если $v \neq u$, то явление Доплера происходит, причем наблюдаемое изменение частоты зависит не от разности $u - v$, а от самих величин u и v. Поэтому в данном случае это явление позволяет определить не только скорость источника *относительно прибора*, но и скорость источника и прибора *относительно среды.*

В 1845 г. явление было изучено экспериментально (Бэйс — Баллот), и теоретические формулы проверены количественно путем наблюдения изменения высоты звука музыкального инструмента, звучащего на платформе поезда, проносящегося мимо станции. Изменение высоты звука наблюдатели, музыканты, оценивали на слух. Опыты были повторены позже при скорости поезда до 120 км/час.

§ 128. Явление Доплера в оптике

В оптике вопрос о распространении волн в среде гораздо сложнее. Известно, что световые волны могут распространяться в пространстве, не заполненном никаким известным нам веществом (*в вакууме*).

---

[1]) К сверхзвуковым скоростям наши формулы не относятся.

Если исходить из представления о вакууме как о среде, в которой распространяются электромагнитные волны и относительно которой можно измерять скорость источника и приемника (неподвижный эфир теории Лорентца, см. гл. XXII), то эффект Доплера должен был бы трактоваться так же, как и выше.

Мы пришли бы к двум различным формулам, отличающимся на величину второго порядка относительно v/c. Так как даже для движения Земли по ее орбите v/c не превосходит 10^{-4}, то, следовательно, различие в обеих формулах составляет лишь 10^{-8}. Для большинства же реализуемых на опыте случаев различие еще меньше. Его нельзя констатировать непосредственным наблюдением над величиной доплеровского смещения. Однако удалось, как известно, осуществить и другие оптические опыты (например, опыт Майкельсона, см. § 130), которые были достаточно точны для того, чтобы констатировать указанные малые различия, если бы они существовали. Этими опытами было показано, что малое различие, ожидаемое в рамках представления о распространении световых волн в неподвижном эфире, не имеет места. Все без исключения процессы протекают таким образом, что играет роль только *относительное* движение источников и приборов по отношению друг к другу, и понятие абсолютного движения в вакууме не имеет смысла (*принцип относительности*, см. гл. XXII). Поэтому и формулы, описывающие явление Доплера, не должны отличаться друг от друга для двух разобранных выше случаев, потому что иначе мы имели бы и в этом явлении принципиальную возможность констатировать абсолютное движение системы в вакууме, что противоречит принципу относительности. И действительно, если при выводе формул для расчета явления Доплера принять во внимание основные постулаты и следствия теории относительности, то мы получим для обоих случаев (движение источника и движение прибора) один и тот же результат, а именно:

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 \pm v/c}{1 \mp v/c}}\,. \tag{128.1}$$

Мы несколько подробнее рассмотрим этот вопрос в следующей главе, посвященной изложению основ оптики движущихся систем.

Экспериментальное подтверждение принципа Доплера было получено прежде всего в астрономических измерениях. После того как было установлено, что следует ожидать сравнительно небольших изменений в частоте спектральных линий звезд, были предприняты многочисленные наблюдения такого рода. Впервые удалось надежно констатировать смещение водородных линий в спектрах Веги и Сириуса по сравнению с соответствующими линиями в спектре гейслеровой трубки, приписав это смещение движению звезд относительно Земли. В дальнейшем такого рода измерения делались и делаются весьма часто. При их помощи, строго говоря, нельзя проверить явление Доплера, ибо мы не имеем возможности непосредственно измерить скорость звезды. Наоборот, эти наблюдения используются для определения слагающей скорости звезды вдоль линии, соединяющей звезду и Землю (лучевая скорость звезд), в предположении о правильности принципа Доплера. В настоящее время такие измерения доведены

до большой степени точности (с точностью до 1 км/с) и служат почти единственным методом исследования лучевых скоростей космических тел. Благодаря явлению Доплера были открыты двойные звезды, столь удаленные, что разрешение их посредством телескопов оказывается невозможным. Спектральные линии таких звезд периодически становятся двойными. Это может быть объяснено предположением, что источником являются два тела, попеременно приближающиеся и удаляющиеся, т.е. обращающиеся вокруг общего центра тяжести. Из подобных наблюдений нетрудно вычислить также период обращения удаленных двойных звезд и их лучевые скорости, т.е. скорости вдоль линии наблюдения.

В астрофизике нередко пользуются также принципом Доплера для оценки скорости извержения водородных масс, наблюдаемых на Солнце (протуберанцы). Измерение наблюдаемых изменений частоты водородных линий дает для скорости водородного облака значения свыше 100 км/с (и даже до 1000 км/с).

Спектроскопический метод определения скорости небесных тел был применен Фогелем (1861 г.), а впоследствии Ланглеем и Корню для измерения скорости вращения солнечного диска. С этой целью сравнивался сдвиг спектральных линий от восточного и западного краев Солнца. Линейная скорость на диаметре оказалась равной 2,3 км/с, тогда как непосредственные наблюдения перемещения солнечных пятен дают около 2 км/с. В таких наблюдениях можно видеть количественное подтверждение явления Доплера.

Первые лабораторные исследования оптического явления Доплера принадлежат А.А. Белопольскому (1900 г.); его опыты были позже повторены Б.Б. Голицыным (1907 г.). Белопольский увеличил скорость движения источника, использовав многократное отражение от движущихся зеркал. На рис. 21.4 изображена схема, поясняющая идею

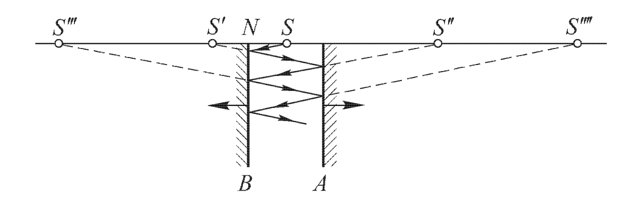


Рис. 21.4. Схема опыта А.А. Белопольского: S — источник света; A и B — движущиеся зеркала; S', S'', S''', S'''' — движущиеся изображения S

Белопольского. Два зеркала A и B смещаются друг относительно друга. Посредине между зеркалами на расстоянии x от каждого из них помещается источник S, так что $SN = x$. Тогла $SS' = 2x$; $SS'' = 4x$ и т.д.; вообще n-е изображение окажется на расстоянии от источника $2nx$. Если расстояние x от S до зеркала меняется со скоростью $v = dx/dt$ (движутся зеркала), то движутся и все изображения, так что скорость n-го изображения будет равна

$$w = \frac{d(2nx)}{dt} = 2nv.$$

Таким образом, прибор Белопольского позволяет значительно повышать скорость наблюдаемого источника, которым является n-е изображение действительного источника.

В приборе Белопольского (рис. 21.5) зеркала представляют собой радиальные лопасти двух колес (подобных пароходным), приводимых

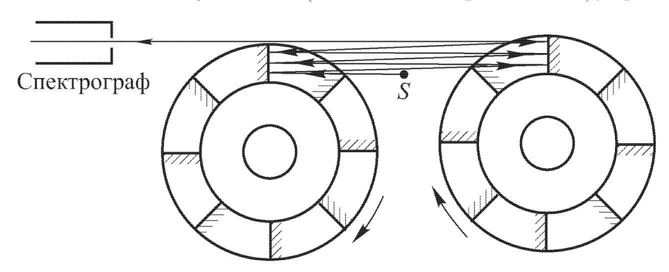


Рис. 21.5. Схема прибора А.А. Белопольского

во вращение моторами. Окончательная скорость w была около 500 м/с (в опытах Белопольского 0,67 км/с; у Голицына от 0,25 до 0,35 км/с). Спектральным прибором для наблюдения смещения служил у Белопольского трехпризменный спектрограф, у Голицына — эшелон Майкельсона. Расхождение опытных данных с теорией составляло 5 %, что следует признать чрезвычайно хорошим результатом для таких трудных опытов.

Впоследствии Фабри и Бюиссон (1919 г.) произвели подобные измерения более простым способом, использовав большую разрешающую силу интерференционного спектроскопа. Источником света служила охлаждаемая ртутная лампа, излучение которой отражалось от краев бумажного диска, вращающегося на центрифуге, причем линейная скорость края диска достигала 100 м/с; спектральная линия, отраженная от двух противоположных краев вращающегося диска, давала двойную линию, надежно разрешаемую интерференционным прибором.

Штарк наблюдал смещение спектральных линий, пользуясь в качестве источника света быстро несущимися светящимися атомами в каналовых лучах. Из этих опытов можно, пользуясь принципом Доплера, определить скорость каналовых лучей. Наблюдения оказались в согласии с оценкой этих скоростей по данным отклонения в электрическом и магнитном полях. В случае водорода получающиеся скорости столь значительны (порядка 10^8 см/с), что наблюдение смещения можно без труда выполнить при помощи призменного спектрографа умеренной разрешающей силы.

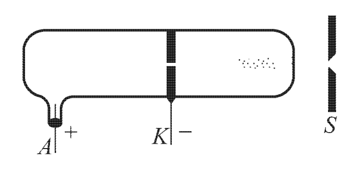


Рис. 21.6. Наблюдение явления Доплера на каналовых лучах

В трубке с каналовыми лучами (рис. 21.6) светятся как неподвижные атомы, так и быстро несущиеся каналовые частицы. Первые дают резкие линии. Движущиеся же (с различными скоростями) канало-

вые частицы дают линии, сливающиеся в расширенную полоску, смещенную относительно первых. На рис. 21.7 видны как резкие линии H_γ и H_δ покоящихся атомов водорода, так и смещенные влево уширенные линии водородных каналовых лучей.

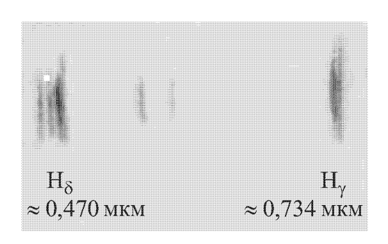


Рис. 21.7. Спектр водорода, излучаемый движущимися и неподвижными атомами

Наконец, следует упомянуть, что во всех газовых источниках света мы всегда имеем дело со светящимися атомами газа, летящими с довольно большими скоростями по всем направлениям (скорости от 100 м/с до 2 км/с в зависимости от молекулярного веса газа и его температуры). Вследствие доплеровского смещения спектральные линии оказываются расширенными. При значительном разрежении газа, когда столкновения между светящимися атомами и окружающими частицами сравнительно редки, явление Доплера служит главной причиной, определяющей ширину спектральной линии. Наблюдение уширения спектральных линий в указанных условиях также является подтверждением эффекта Доплера. Удалось установить, например, что при охлаждении такого источника жидким воздухом ширина линий уменьшалась соответственно уменьшению средних молекулярных скоростей.

Глава XXII

ОПТИКА ДВИЖУЩИХСЯ СРЕД

Уже при изучении явления Доплера мы встретились с вопросом о том, как протекает оптическое явление в случае движения системы, в которой оно происходит. При рассмотрении этой проблемы существенное значение имеет ответ на следующий вопрос: возможно ли установить движение источника света и воспринимающих свет приборов относительно среды, в которой свет распространяется, или возможно лишь установление относительного движения источника и приемника света друг относительно друга. Мы подходим, таким образом, к общей задаче оптики (и электродинамики) движущихся сред, имеющей большое принципиальное значение, ибо огромное большинство наших опытов протекает в земных лабораториях, т.е. в системе, движущейся относительно других небесных тел. Представляется важным знать, отражается ли этот факт на протекании наблюдаемых явлений и как именно.

§ 129. Принцип относительности в механике и формулы преобразования Галилея

Физические законы, в том числе и законы механики Ньютона, и в частности закон инерции, имеют определенный смысл лишь тогда,

когда точно определены реальные условия протекания рассматриваемых явлений и, следовательно, указана система отсчета, к которой они отнесены.

Представим себе несколько систем отсчета, одна из которых связана с берегом, а другие — с различными движущимися относительно него кораблями. Пусть по берегу перемещается какое-нибудь тело, на которое в береговой системе отсчета не действуют никакие силы, например, по вполне горизонтальному столу катится без трения шар. Движение это в береговой системе отсчета будет происходить равномерно и прямолинейно, т.е. явится движением по инерции в ньютоновом смысле. Предположим, что совершенно такие же опыты (шар, катящийся без трения по горизонтальному столу) производятся и на каждом из кораблей. Для всех систем отсчета, связанных с кораблями, перемещающимися равномерно и прямолинейно относительно берега, движение шаров также будет равномерным и прямолинейным, т.е. будет движением по инерции в ньютоновском смысле. Но в системе отсчета, связанной с кораблем, который проходит мимо берега с ускорением, движение шаров является ускоренным, а не прямолинейным и равномерным. Следовательно, в этой системе оно не является движением по инерции, и в ней действуют некоторые силы (силы инерции), сообщающие телам ускорение.

Таким образом, закон движения формулируется одинаково только для тех систем отсчета, которые движутся равномерно и прямолинейно друг относительно друга; эти системы составляют совокупность так называемых *инерциальных* систем.

Итак, законы механики одинаково формулируются для всех инерциальных систем, и формулировка их изменяется для системы отсчета, движущейся с ускорением относительно инерциальных систем. Это видно из того, что в основной закон ньютоновой механики входит выражение для *ускорения* тела, а не его скорости: $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = F$. Таким образом, добавление любой постоянной скорости, т.е. переход к любой иной инерциальной системе, не отразится на формулировке законов механики. Необходимость определить систему отсчета, для которой сформулированы законы механики, заставила Ньютона ввести понятие абсолютного пространства как такой исходной системы. Однако все системы, движущиеся равномерно и прямолинейно относительно этого абсолютного пространства, т.е. являющиеся инерциальными по отношению к нему, допускают ту же формулировку законов механических процессов и с точки зрения механики эквивалентны друг другу.

Таким образом, наблюдения над механическими процессами не дают возможности выделить абсолютное пространство из целой бесконечной совокупности инерциальных систем. Это обстоятельство получило название *принципа относительности классической механики*, и, следовательно, ньютонова механика сред построена в согласии с принципом относительности.

При переходе от одной инерциальной системы к другой ускорения остаются неизменными, но координаты и скорости меняются. Для установления соответствия между ними служат формулы, или урав-

нения преобразования, связывающие координаты и время x, y, z, t одной системы с координатами и временем другой x', y', z', t'. Формулы перехода, которыми пользуется ньютонова механика, казались самоочевидными. Для случая, когда вторая система движется вдоль оси x со скоростью $+v$ относительно первой (или первая со скоростью $-v$ относительно второй), оси систем параллельны друг другу и в момент $t = 0$ начала координат совпадают (рис. 22.1); эти формулы, известные как формулы Галилея, имеют вид

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \qquad z' = z, \quad t' = t. \tag{129.1}$$

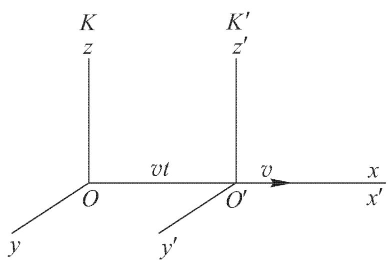


Рис. 22.1. Две инерциальные системы координат

Инвариантность уравнений механики по отношению к этим преобразованиям, которую нетрудно проверить, и есть математическое выражение принципа относительности механики, экспериментальным обоснованием которого служит согласие законов механики Ньютона с опытом [1]).

§ 130. Электродинамика движущихся сред

Подобным же образом строится и электродинамика (оптика) движущихся сред. Исходя из определенных физических предпосылок, подсказанных опытом, устанавливают систему электродинамических законов, приложимых к явлениям в движущихся средах, указав одновременно формулы преобразования, позволяющие переходить от одной инерциальной системы к другой. Сравнивая с опытом выводы полученной таким образом теории, мы имеем возможность контролировать правильность наших положений.

Что касается формул преобразования координат, то формулы Галилея считались вполне очевидными и оправданными опытом. Поэтому их без критики использовали и при построении электродинамики движущихся сред. Различие же в исходных предположениях относительно того, является ли эфир неподвижным или движущимся, привело к многообразным попыткам создания электродинамики движущихся сред. Крайнее и наиболее полное выражение различных точек зрения находит себе место в двух важнейших, резко расходящихся теориях: электродинамике Герца и электродинамике Лорентца. Как та, так и другая электродинамика рассматривает все электромагнитные и оптические процессы как протекающие в заполняющем все пространство *мировом эфире*. Поэтому основным вопросом электродинамики движущихся сред являлся вопрос о влиянии движения тел на эфир. Ответ на этот вопрос мог дать только опыт. Точнее, исходя

[1]) Речь идет о механических и астрономических явлениях, при которых скорости невелики сравнительно со скоростью света.

из определенных представлений о взаимоотношении движущегося вещества и эфира, следовало построить определенную теорию явления в движущихся средах и подвергнуть ее опытной проверке.

а. Теория увлекаемого эфира. Герц создал теорию, основанную на утверждении, что эфир полностью увлекается материальными телами при их движении. Таким образом, оптические явления в движущейся среде разыгрываются в эфире, движущемся без отставания вместе с этой средой, и, следовательно, наблюдения над явлениями в движущихся средах не дают возможности установить это движение. Другими словами, теория Герца переносит механический принцип относительности в электродинамику (и оптику). Используя уравнения преобразования Галилея, Герц создал уравнения электродинамики, которые, конечно, инвариантны по отношению к таким преобразованиям. Не входя в обсуждение многочисленных трудностей, связанных с последовательным развитием электродинамики Герца, можно указать на прямое противоречие выводов этой теории с рядом опытов, в том числе с одним важным оптическим опытом, выполненным Физо (1851 г.).

Опыт Физо; коэффициент увлечения. Схема опыта Физо [1]) показана на рис. 22.2. Это — интерференционный опыт, где интерферирующие пучки проходят по заполненным водой сообщающимся трубам A

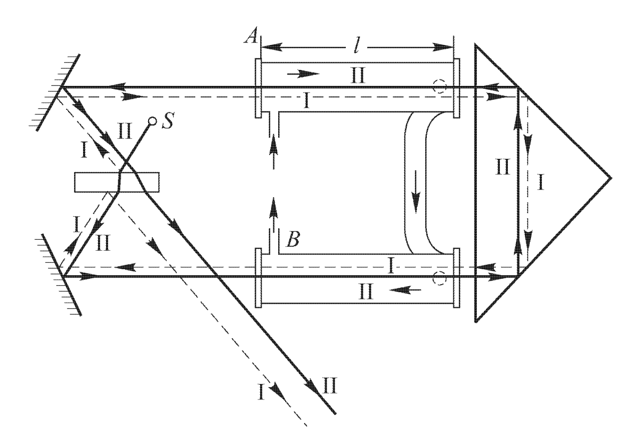


Рис. 22.2. Схема опыта Физо: S — источник света; I и II — интерферирующие пучки, из которых I распространяется по течению воды, а II — против течения

и B, длина каждой из которых равна l. В случае неподвижной воды наблюдается определенная интерференционная картина. Добавочную разность хода луча II, дважды проходящего через стеклянную пластинку, можно скомпенсировать или учесть. Если вода приведена в

[1]) В том виде, в каком он был впоследствии вновь осуществлен Майкельсоном (1886 г.) и Зееманом (1914 г.).

движение со скоростью v, втекая в A и вытекая из B, то луч I будет внутри воды распространяться в направлении ее движения, а луч II — навстречу движению. Если эфир, в котором распространяются световые волны, увлекается движущейся водой, как предполагает теория Герца, то скорость как луча I, так и луча II будет по отношению *к воде* одной и той же, равной скорости света в покоящейся воде, т.е. $c_1 = c/n$, где c — скорость света в свободном эфире и n — показатель преломления воды. По отношению же к зеркалам прибора скорость света на отрезке пути, проходящем в движущейся воде, будет зависеть от направления течения воды, а именно: она будет равна $(c_1 + v)$ для луча I и $(c_1 - v)$ для луча II. Ожидаемое изменение интерференционной картины определится добавочной разностью времени распространения двух лучей:

$$\tau = \frac{2l}{c/n - v} - \frac{2l}{c/n + v} = \frac{4lv}{c^2/n^2 - v^2} = \frac{4lvn^2}{c^2 - n^2v^2},$$

которой соответствует разность хода, выраженная в длинах волн,

$$\Delta = \frac{\tau c}{\lambda} = \frac{4lvn^2c}{\lambda(c^2 - n^2v^2)} \approx \frac{4lvn^2}{\lambda c},$$

если пренебречь величиной $(nv/c)^2$ по сравнению с единицей.

В одном из таких опытов трубы имели длину l = 1,5 м и скорость течения достигала v = 700 см/с. Действительно, наблюдалось смещение интерференционных полос, соответствующее, однако, разности хода, примерно в *два раза* меньшей, чем следует из теории эфира, вполне увлекаемого движущейся средой. Таким образом, наблюдаемое смещение не может быть согласовано с теорией Герца. Но оно находится в превосходном согласии с теорией Френеля, сформулированной им еще в 1818 г. по поводу одного опыта Араго, пытавшегося обнаружить влияние движения Земли на преломление света, посылаемого звездами. Араго показал (хотя и с умеренной точностью), что такого влияния не наблюдается. Для объяснения этого результата Френель выдвинул теорию, согласно которой эфир не увлекается движущимися телами, в частности Землей, а проходит через них. Но по общим представлениям Френеля плотность эфира в веществе ρ_1 больше, чем плотность ρ вне его (при одинаковой упругости), так что для показателя преломления получим

$$n = \frac{c}{c_1} = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho}}.$$

Поэтому при движении вещества эфир, входя в него, должен уплотняться. Вообразим цилиндр с сечением в 1 см^2, движущийся вдоль своей оси со скоростью v по отношению к эфиру. Через основание цилиндра внутрь его за 1 с проникает объем v с массой $v\rho$. Так как внутри вещества плотность эфира становится равной ρ_1, то вошедшая масса эфира внутри вещества должна перемещаться со скоростью v_1, определяемой из условия

$$v_1\rho_1 = v\rho, \quad \text{т.е.} \quad v_1 = \frac{v\rho}{\rho_1} = \frac{v}{n^2},$$

где n — показатель преломления. Итак, хотя эфир *не увлекается* при движении тел, однако происходит его перемещение по отношению к движущимся телам, но не с полной скоростью v, а с меньшей v_1. Если свет распространяется в *направлении* движения тела, то скорость его внутри тела по отношению к данному телу есть $c_1 - v_1$, а по отношению к приборам, находящимся вне тела,

$$c_1 - v_1 + v = c_1 + v\left(1 - \frac{v_1}{v}\right) = c_1 + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Если свет распространяется *навстречу* направлению движения, то наблюдаемая скорость будет равна

$$c_1 - v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Следовательно, явление протекает так, как если бы имело место *частичное* увлечение эфира, причем *коэффициент увлечения* равен

$$\varkappa = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Для воды $\varkappa = 0{,}438$; Физо нашел из своих измерений смещение полос интерференции, соответствующее $\varkappa = 0{,}46$, а более точное измерение Майкельсона и Морлея, повторивших опыт Физо в 1886 г., дало $\varkappa = 0{,}434 \pm 0{,}020$, тогда как теория Герца дает $\varkappa = 1$, т.е. резко противоречит опыту.

Следует добавить, что были выполнены также разнообразные электродинамические опыты, относящиеся к вопросу об увлечении эфира при движении весомых тел. Среди них большое значение имеют опыты А.А. Эйхенвальда (1904 г.). Все они дали результаты, не совместимые с теорией Герца.

Таким образом, теория Герца, основанная на представлении о полном увлечении эфира движущимися телами, не согласуется с оптическими и электродинамическими опытами.

Аберрация света; *опыт Эри.* Вопрос о влиянии движения Земли на оптические явления возникает и при последовательном волновом рассмотрении аберрации света.

Если, как допускает Герц, эфир полностью увлекается Землей при ее движении, то аберрацию нельзя объяснить [1]), ибо световые волны перемещаются вместе с движущимся эфиром одновременно с перемещением трубы, так что направление S_0 на звезду в случае неподвижной трубы совпадает с направлением S при движущейся трубе. рис. 22.3 *а*, на котором для ясности вместо трубы нарисовано визирное приспособление, иллюстрирует сказанное: волновой фронт, войдя в трубу при MN, вовлекается в движение вместе с трубой и распространяется вдоль ее оси OA независимо от скорости трубы.

Если же принять, что эфир остается неподвижным при движении Земли, увлекающей трубу, то световые волны, продолжая свой путь в неподвижном эфире, отстанут от передвинувшейся трубы

[1]) Попытки истолковать аберрацию света в рамках представления об увлекаемом эфире привели к выводу, что плотность эфира у поверхности Земли должна быть в e^{11} раз больше, чем вдали от нее, хотя скорость света остается неизменной.

(рис. 22.3 *б*). Наклон, необходимый для удержания звезды на оси трубы, зависит от скорости **v** трубы и угла ψ между **v** и направлением на

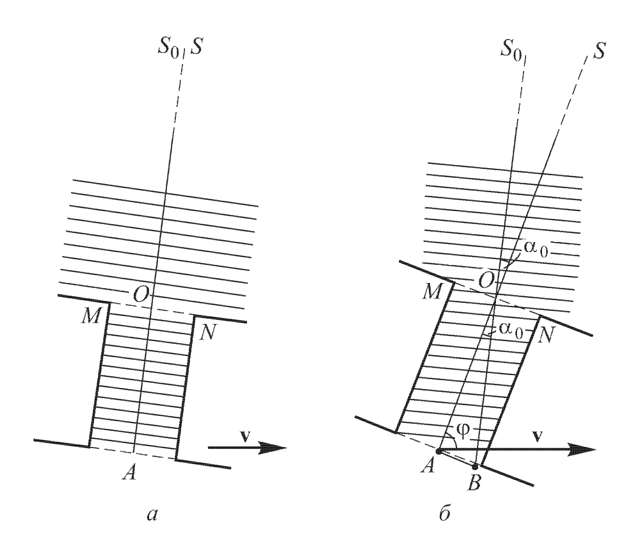


Рис. 22.3. Аберрация света и вопрос об увлечении эфира при движении Земли: *а* — эфир, увлекаемый Землей, аберрации нет; *б* — эфир неподвижен, аберрация имеет место: $\operatorname{tg}\alpha_0 = (v/c)\sin\psi$

звезду. При изменении скорости на **v** наклон трубы должен быть изменен на угол $\alpha_0 = \angle SOS_0$, так что угол аберрации $\alpha_0 = \dfrac{AB}{OA} = \dfrac{v}{c}\sin\psi$, где c — скорость света вдоль трубы (в вакууме или воздухе)[1]. При $\psi = \pi/2$ угол аберрации принимает значение $\alpha_0 = v/c = 20'',45$.

Однако этот простой способ рассуждения приводит к парадоксу. Допустим, что труба (пространство между визирными отверстиями) заполнена каким-нибудь преломляющим веществом, например куском стекла или водой с показателем преломления n. Скорость световых волн в веществе есть $c_1 = c/n$. Направление оси трубы на видимое положение звезды S определяется углом аберрации α, величина которого должна, казалось бы, определяться из следующих рассуждений (рис. 22.4). Световые волны, падая на вещество под углом α, преломятся и пойдут внутри трубы под углом $\gamma = \alpha/n$. В случае неподвижного эфира отставание световых волн вызывает необходимость наклона оси трубы на угол γ, определяемый из условия

$$\gamma = \frac{AB}{OA} = \frac{v}{c}\sin\psi = n\frac{v}{c_1}\sin\psi = n\alpha_0,$$

где $\alpha_0 = \dfrac{v}{c}\sin\psi$ — угол аберрации, найденный для пустой трубы. Так

[1]) Угол аберрации α_0 всегда очень мал, так что $\operatorname{tg}\alpha_0 \approx \alpha_0$.

как $\gamma = \alpha/n$, то угол аберрации α для трубы, наполненной веществом с показателем преломления n, должен равняться

$$\alpha = n\gamma = n^2\alpha_0.$$

Однако, когда был произведен этот опыт (Эри, 1871 г.), было обнаружено, что

$$\alpha = \alpha_0.$$

Объяснение и здесь получается, если принять во внимание коэффициент увлечения. Труба, наполненная водой, увлекает световые волны в направлении своего движения со скоростью $v\varkappa = v(1 - 1/n^2)$. Таким образом, за время τ, в течение которого свет идет вдоль трубы со скоростью $c_1 = c/n$ и проходит путь, равный $c_1\tau$, световые волны отстанут не на величину $v\sin\psi \cdot \tau$, как было бы в отсутствие увлечения, а на величину $\left[v - v\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)\right]\sin\psi{\cdot}\tau = \dfrac{v}{n^2}\sin\psi{\cdot}\tau$. Таким образом,

$$\gamma = \frac{v\sin\psi\cdot\tau}{n^2} : c_1\tau = \frac{v\sin\psi}{c_1 n^2};$$

отсюда угол аберрации

$$\alpha = n\gamma = \frac{v\sin\psi}{c_1 n} = \frac{v\sin\psi}{c} = \alpha_0$$

в соответствии с наблюдениями.

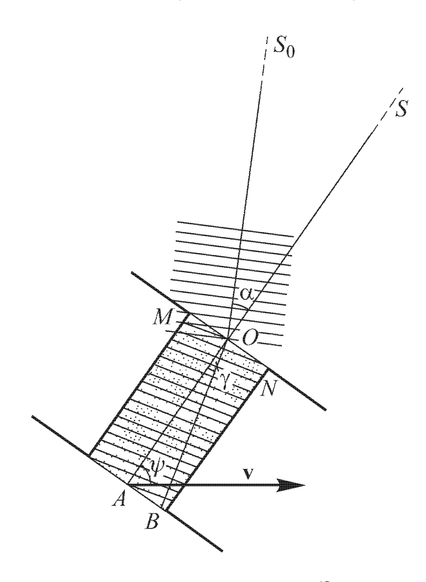


Рис. 22.4. К опыту Эри

Интересно отметить, что Френель, сформулировав свое представление о коэффициенте увлечения, рассмотрел также и этот опыт с аберрацией и писал в письме к Араго (в 1818 г.): «Хотя этот опыт еще не был сделан, но я не сомневаюсь, что он подтвердит это заключение...».

б. Теория неподвижного эфира. Лоренц исходил из допущения, что эфир вполне неподвижен и не принимает участия в движении материальных сред. Таким образом, для электродинамики (и оптики) принцип относительности не имеет места. Абсолютная система отсчета может быть связана с неподвижным эфиром, а все другие системы отсчета будут принципиально отличаться от этой абсолютной системы. Электродинамические и оптические опыты будут протекать различно в зависимости от скорости движущейся инерциальной системы и могут служить для установления этой скорости по отношению к эфиру, т.е. абсолютной скорости: движение тел сквозь неподвижный эфир должно сопровождаться «эфирным ветром», влияние которого может быть обнаружено на опыте. В частности, явление Доплера должно приводить к различиям (второго порядка относительно v/c) между случаями движения источника или прибора

сквозь эфир (как в акустике) и могло бы принципиально быть использовано для установления абсолютного движения (движения относительно эфира) источника или приемника.

Электродинамика (и оптика) движущихся сред, развитая Лоренцом, есть часть его общей электронной теории, в силу которой все электромагнитные свойства вещества обусловливаются распределением электрических зарядов и их движением внутри неподвижного эфира. В качестве формул преобразования координат при переходе от одной инерциальной системы к другой сохраняются преобразования Галилея, и, поскольку отрицается принцип относительности, уравнения электродинамики Лоренца не являются инвариантными по отношению к этим преобразованиям. Теория Лоренца означала очень крупный шаг вперед и разрешала большой круг вопросов, представлявших значительные теоретические трудности. В случае оптических явлений она совпадает с теорией Френеля и также приводит к представлению о частичном увлечении световых волн. По теории Лоренца движение вещества есть движение молекул и связанных с ними зарядов в *неподвижном эфире*, и учет этого движения показывает, что в среде, движущейся со скоростью v, свет распространяется со скоростью $c_1 + (1 - 1/n^2)v$, где c_1 — скорость света в неподвижной среде. Таким образом, теория Лоренца приводит к формуле частичного увлечения Френеля, хорошо подтвержденной тщательными измерениями.

Принимая во внимание коэффициент увлечения, Лоренц мог доказать общую теорему, согласно которой движение системы не влияет с погрешностью до величин порядка $\beta^2 = v^2/c^2$ на результаты оптических опытов с *замкнутым* путем света, т.е. опытов, к которым принадлежат все интерференционные явления. Таким образом, с помощью подобных опытов можно, согласно теории Лоренца–Френеля, обнаружить движение Земли относительно эфира, предполагаемого неподвижным, но лишь при условии, что точность опытов позволяет учитывать величины второго порядка (β^2 по сравнению с единицей), т.е. если погрешности при их выполнении не превышают примерно 10^{-8}. Все эффекты первого порядка в таких опытах с замкнутым оптическим путем компенсируются благодаря явлению частичного увлечения. Поэтому особый принципиальный интерес приобретают опыты, обеспечивающие погрешности не более β^2. Как мы уже упоминали, явление Доплера могло бы, в рамках теории Лоренца, служить для обнаружения абсолютного движения систем в эфире, если бы соответствующие измерения можно было бы произвести с ошибкой, меньшей β^2.

Опыт Майкельсона. Реальным опытом, выполняемым с такой точностью, является интерференционный опыт Майкельсона, представляющий, по существу, определение скорости распространения света в направлении, совпадающем с направлением движения Земли, и в направлении, к нему перпендикулярном. Опыт выполняется по схеме рис. 22.5, причем интерферометр Майкельсона располагается таким образом, чтобы одно плечо его совпадало с направлением движения Земли, а другое было к нему перпендикулярно. При повороте всего

прибора на 90° следует ожидать изменения интерференционной картины, по которому и можно судить о влиянии движения Земли на интерференционный опыт и вычислить абсолютную скорость этого движения в эфире. Действительно, в рамках теории Лорентца время на прохождение пути MB и обратно есть $T_1 + T_2$, где T_1 определится из условия

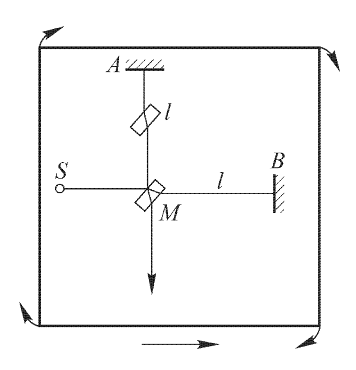


Рис. 22.5. Схема опыта Майкельсона

$$T_1 c = l + vT_1,$$

а T_2 — из условия

$$T_2 c = l - vT_2;$$

здесь $l = MA = MB$ — длина плеча интерферометра.

Итак,

$$T_1 + T_2 = \frac{2lc}{c^2 - v^2} = \frac{2l}{c}\,\frac{1}{1 - v^2/c^2} = \\ = \frac{2l}{c}\,\frac{1}{1-\beta^2} \approx \frac{2l}{c}\left(1 + \beta^2\right) \quad (130.1)$$

(с погрешностью, меньшей β^4). В перпендикулярном направлении, с учетом движения прибора, время прохождения от M до A' и обратно к M' (рис. 22.6) будет равно $2T$, где T определится из следующего условия:

$$Tc = MA' = \sqrt{l^2 + v^2T^2},$$

откуда

$$2T = \frac{2l}{c}\,\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{2l}{c}\left(1 + \frac{\beta^2}{2}\right)$$

(также с погрешностью, меньшей β^4).

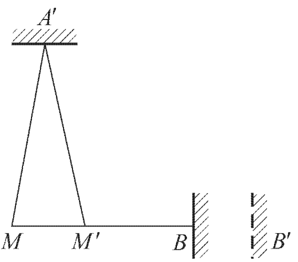


Рис. 22.6. К расчету разности хода в опыте Майкельсона

Таким образом, разность времен, обусловленная движением прибора вместе с Землей, равна

$$T_1 + T_2 - 2T = \frac{l}{c}\,\beta^2.$$

При повороте прибора на 90° разность эта меняет знак, так что интерференционная картина меняется, смещаясь на число полос (точнее, долей полосы), зависящее от величины плеча l.

Опыт был впервые выполнен Майкельсоном в 1881 г. с точностью, лежащей на границе необходимой. Он повторялся многократно со все бо́льшими и бо́льшими усовершенствованиями, причем удлинялся путь l и совершенствовались методы наблюдения. Рисунок 22.7 дает представление об одной из установок (Майкельсон–Морлей, 1887 г.). Таблица 22.1 показывает, что по мере совершенствования опыта все с большей уверенностью констатируется *отсутствие* того смещения полос, которого следует ожидать по теории Лорентца, допускающей «эфирный ветер», возникающий вследствие движения Земли со скоростью 30 км/с в неподвижном эфире.

Отрицательный результат опыта Майкельсона, не возбуждающий сомнения, имеет огромное принципиальное значение. Он является одним из наиболее надежных опытов, подвергающих проверке вопрос об увлечении эфира движущимися телами и, следовательно, исходные

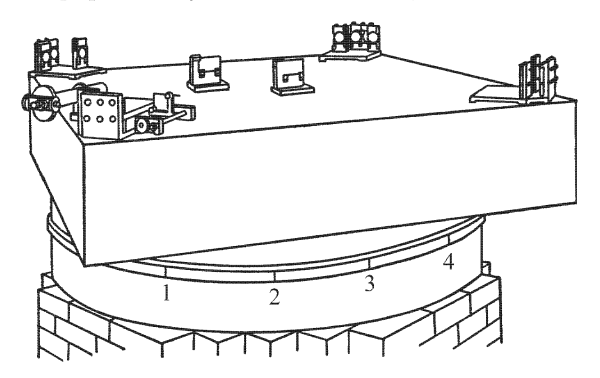


Рис. 22.7. Общий вид установки Майкельсона–Морлея

положения теории Лорентца. Отрицательный результат его противоречит гипотезе неподвижного эфира и мог бы быть истолкован как доказательство полного увлечения эфира телами, т.е. вступил бы в кажущееся противоречие и с результатами опыта Физо. Было сделано поэтому немало попыток разрешить это противоречие.

Таблица 22.1

Результаты опытов по проверке теории увлечения эфира

Данные опыта	Длина плеча, в см	Ожидаемое смещение	Наблюдаемое смещение	Эфирный ветер, км/с
		в долях полосы		
Майкельсон (1881 г.); прибор на металлическом штативе вращается вокруг оси	120	0,04	< 0,015	< 18
Майкельсон–Морлей (1887 г.); прибор монтирован на каменной плите, плавающей в ртути; путь луча l удлинен благодаря системе отражений (см. рис. 22.7)	1 100	0,37	< 0,01	< 7
Морлей–Миллер (1905 г.), дальнейшие улучшения	3 224	1,1	< 0,01	< 3,5
Кеннеди (1926 г.)	800	0,27	< 0,001	< 2
Иллингворт (1927 г.)	—	—	< 0,0005	< 1

Одна из них принадлежит Ритцу и состоит в допущении, что скорость света, испускаемого *движущимся* источником, слагается гео-

метрически из скорости источника и скорости света от неподвижного источника, подобно скорости ядра, выстреливаемого быстро перемещающимся орудием (*баллистическая гипотеза*). Нетрудно видеть, что если бы баллистическая гипотеза была справедлива, то опыт Майкельсона должен был бы дать отрицательный результат, ибо $T_1 + T_2 = 2T = 2l/c$. Однако астрофизические наблюдения над двойными звездами решительно говорят против баллистической гипотезы. Действительно, представим себе двойную звезду (рис. 22.8) на расстоянии L от наблюдателя, одна из компонент которой S' имеет период обращения $2T$ и линейную скорость движения v. Если баллистическая гипотеза справедлива, то свет от компоненты S' в положении I дойдет до наблюдателя к моменту $t_1 = L/(c-v)$, а в положении II — к моменту $t_2 = T + L/(c+v)$, где T — полупериод обращения.

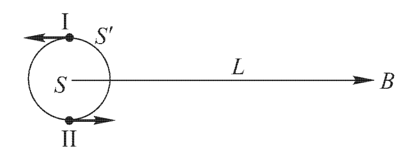


Рис. 22.8. Наблюдения над двойными звездами опровергают баллистическую гипотезу Ритца

Таким образом, наблюдаемое движение звезды может заметно отступать от законов Кеплера. В частность, при очень большом L возможно, что даже при $v \ll c$ получится $t_2 < t_1$, т.е. видимое движение приобретает весьма прихотливый характер. Рассмотрение достаточного числа двойных звезд показывает, что такое следствие баллистической гипотезы противоречит наблюдению и, следовательно, гипотеза Ритца должна быть оставлена.

А.М. Бонч-Бруевич (1956 г.), применив для определения скорости света современные уточненные методы, сравнил скорости света, идущего от правого и левого краев Солнца, т.е. от источников, один из которых приближается, а другой отдаляется от нас со скоростью 2,3 км/с. Опыты с достаточной степенью точности показали, что различие в скорости света, предполагаемое по баллистической гипотезе, не имеет места.

Другое в высшей степени кардинальное допущение, предложенное для объяснения результатов опыта Майкельсона, было сделано, с одной стороны, Фицджеральдом, с другой — самим Лорентцом (1892 г.). Было высказано предположение, что в результате движения линейные размеры всех тел вдоль направления скорости сокращаются в отношении $\sqrt{1-\beta^2}$ (*контракционная гипотеза*); такое допущение объясняет отрицательный результат опыта Майкельсона, ибо при этих условиях, используя формулу (130.1), получаем

$$T_1 + T_2 = \frac{2l\sqrt{1-\beta^2}}{c(1-\beta^2)} = \frac{2l}{c}\,\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 2T.$$

§ 131. Основы специальной теории относительности

Мы уже отмечали значение теории Лорентца, объяснившей с единой точки зрения весьма разнообразные оптические и электродинамические явления первого порядка. Однако после тщательной про-

верки опыта Майкельсона и некоторых других опытов[1]), также — с точностью до β^2 — не обнаруживших эфирного ветра, положение теории Лорентца стало менее прочным. Теория эта отрицала в своем основном положении принцип относительности и исходила из утверждения возможности установления абсолютной системы отсчета. В дальнейшем же она вынуждена была прибегнуть к гипотезе контракции, которая объясняла неудачу попытки обнаружения абсолютного характера движения Земли наличием случайно компенсирующихся эффектов (интерференционный эффект и эффект контракции). Это обстоятельство явилось слабым пунктом теории, тем более, что и контракционная гипотеза не объясняла результатов всех «опытов второго порядка».

А. Эйнштейн (1905 г.) пересмотрел всю проблему, поставив ее совершенно по-новому.

Многочисленными опытами (в первую очередь опытом Майкельсона) была установлена невозможность рассматривать движение Земли как движение относительно абсолютной системы координат, каковой является неподвижный эфир. Эйнштейн обобщил этот основной экспериментальный факт и сформулировал его в виде *постулата*. Таким образом, первый постулат теории Эйнштейна есть *принцип относительности* электродинамики и оптики, покоящийся на экспериментальной базе. Согласно принципу относительности явления *во всех инерциальных* системах отсчета протекают одинаково.

Вторым постулатом своей теории Эйнштейн выбирает *принцип постоянства скорости света в вакууме*, согласно которому скорость света в вакууме не зависит от движения источников или приемников и есть универсальная постоянная c. Этот принцип также является экспериментальным положением, отрицающим опровергаемую опытом баллистическую гипотезу.

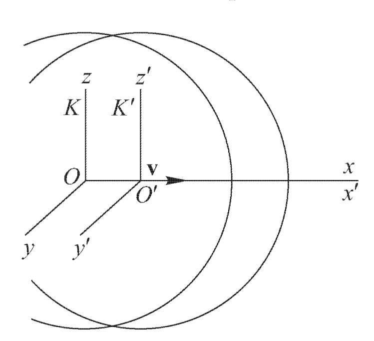


Рис. 22.9. Схема, иллюстрирующая кажущееся противоречие между постулатами теории относительности

Два основных постулата Эйнштейна — принцип относительности и принцип постоянства скорости света — составляют базу теории относительности.

Эти постулаты находятся в *кажущемся* противоречии между собой. Действительно, вообразим себе следующий опыт. Две системы K и K' движутся друг относительно друга (вдоль оси x) со скоростью $\mathbf{v}$ (рис. 22.9). Пусть в момент $t = 0$, когда начала координат O и O' совпадают, возникает световая вспышка и световая волна распространяется в пространстве. Согласно второму постулату скорость света

[1]) Прекрасное изложение этих многочисленных опытов можно найти у С. И. Вавилова. Экспериментальные основы теории относительности. Собрание сочинений, т. IV. М.: Изд-во АН СССР, 1956 г.

как в первой, так и во второй системе координат одна и та же (c). С другой стороны, вид световой волны должен быть идентичен как в первой, так и во второй системе (первый постулат). Другими словами, к моменту t световая волна должна быть представлена сферой с радиусом ct, имеющей центр как в точке O, так и в точке O', что явно невозможно, так как эти точки разойдутся к этому моменту на расстояние vt.

Причина возникшего недоразумения лежит, однако, не в противоречии между двумя заимствованными из опыта положениями (принцип относительности и принцип постоянства скорости света), а в *допущении*, что положение фронтов сферических волн для обеих систем относится к *одному и тому же моменту*, т.е. что от момента вспышки до момента, в который рассматривается положение волновых фронтов для обеих систем отсчета, протекли одинаковые промежутки времени. Это допущение заключено в формулах преобразования Галилея, согласно которым $t = t'$ и, следовательно, $\Delta t = \Delta t'$. Однако справедливость преобразований Галилея не доказана.

Разобранный пример показывает, что постулаты Эйнштейна находятся в противоречии не друг с другом, а с формулами преобразования Галилея. Действительно, возмущение, которое в системе K записывается в виде

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$$

(сфера с центром $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, т.е. в точке O), в системе K' должно иметь, если применимы преобразования Галилея, вид

$$(x' + vt')^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2$$

(сфера с центром $x' = -vt'$, $y' = 0$, $z' = 0$, т.е. в той же точке O); этот вывод противоречит принципу относительности, в силу которого возмущение в системе K' должно иметь вид

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2$$

(сфера с центром $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$, т.е. в точке O').

§ 132. Формулы преобразования теории относительности

Установив противоречие между уравнениями преобразования Галилея и экспериментальными постулатами, Эйнштейн проанализировал представление о способах измерения пространства и времени. По отношению к измерению пространства классическая механика пользовалась вполне реальными приемами сравнения измеряемых величин с образцовым эталоном (например, сравнение с эталонным метром или с длиной световой волны), причем возможность однозначных измерений обеспечивалась существованием жестких тел (не изменяемых при определенных условиях температуры и т.д.).

Суждения же, в которых играет роль *время*, покоятся, как показал Эйнштейн, на представлении об *одновременности*: момент (например, начало какого-то события) устанавливается по показанию эталонных часов, *одновременному* с этим моментом; следовательно,

длительность какого-либо процесса определяется путем сравнения с промежутком времени, отделяющим показание часов, *одновременное с концом процесса*, от показания тех же часов, *одновременного с началом процесса.* Само собой разумеется, что в качестве «часов» можно использовать любой периодический процесс, например, вращение Земли, качание маятника, колебание атома или молекулы и т.д.

Установление одновременности имеет ясный смысл в том случае, когда речь идет об одновременности событий, происходящих в одном месте (одной координатной точке). В этом случае можно определить события как одновременные, если они *совпадают* друг с другом. Так, утверждение, что поезд пришел на станцию в 7 часов, означает, что приход поезда совпадает с определенным расположением стрелок станционных часов. Однако такой прием неприменим, когда речь идет о событиях, разделенных пространственно. Снабдив различные точки A, B и т.д. часами, мы можем по «методу совпадения» определять время только в *каждой* из этих точек. Для сопоставления же времен событий в разных точках необходимо согласовать между собой ход часов в различных точках, т.е. синхронизировать часы.

Это совершенно общее положение осуществляется, конечно, и в классической механике, опирающейся на преобразования Галилея. Преобразования Галилея, устанавливающие связь между координатами и временами в разных системах отсчета, двигающихся друг относительно друга, исходят из допущения, что времена в различных системах отсчета совпадают между собой, т.е. что $t = t'$. Это означает, что синхронизация часов в теории Галилея предполагается осуществленной путем установления связи между пунктами, где расположены синхронизируемые часы, с помощью сигналов, распространяющихся с *бесконечной скоростью.* Если такой сигнал выходит из A в момент t_A (по часам A) и часы в B в момент прихода туда бесконечно быстрого сигнала показывают t_B, то синхронизация часов обеспечена, если $t_B = t_A$.

Привычность преобразований Галилея, которыми в физике и механике пользовались в течение нескольких столетий, привела к тому, что преобразования эти казались вполне естественными и свободными от каких-либо допущений. В действительности же, как мы видим, эти преобразования покоятся на вполне определенном допущении относительно приема синхронизации часов, а именно, на допущении о возможности осуществить такую синхронизацию с помощью бесконечно быстрых сигналов. Именно с бесконечной скоростью синхронизирующего сигнала и связано то обстоятельство, что понятие одновременности в классической механике имеет абсолютный смысл, т.е. события, одновременные в какой-либо одной системе отсчета, оказываются одновременными и во всех остальных.

Если бы последнее положение было правильным, то, как мы видели в предыдущем параграфе, постулат относительности и постулат постоянства скорости света, представляющие собой обобщение опыта, оказались бы в противоречии друг с другом. Однако эти экспериментальные постулаты могут быть согласованы, если отказаться от формул преобразования Галилея и заменить их другими, получаемыми путем математического анализа постулатов теории относительности.

Не останавливаясь на этом несложном выводе, приведем окончательный результат.

Для систем отсчета K и K', выбранных, как указано в § 131 (см. рис. 22.9), формулы эти имеют вид

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, & x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ y' &= y, & y &= y', \\ z' &= z, & z &= z', \\ t' &= \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1-\beta^2}}, & t &= \frac{t' + (v/c^2)x'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \end{aligned} \tag{132.1}$$

где $\beta = v/c$, v — скорость системы K' относительно K и c — скорость света.

Так как новые формулы преобразования выводятся из требования совместимости указанных выше постулатов, то, конечно, они, в отличие от формул Галилея, оказываются в согласии с этими постулатами. Действительно, сферическая световая волна, которая в системе K имеет вид

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2,$$

приобретает в системе K', если применить формулы (132.1), вид

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2,$$

т.е. удовлетворяет принципу относительности.

Хотя формулы (132.1) на первый взгляд радикально отличаются от формул Галилея, однако последние можно получить из них, если положить $c = \infty$. Но, как мы видели, в основе формул Галилея лежит допущение, что синхронизация часов делается с помощью сигналов, имеющих бесконечно большую скорость. Отсюда вытекает, что величина c в формулах (132.1) играет роль скорости тех сигналов, которые использованы для синхронизации часов. Если она бесконечно велика, то получаются преобразования Галилея. Если же эта скорость есть скорость света, то получаются формулы преобразования теории относительности.

Таким образом, в основе формул преобразования теории относительности лежит допущение о синхронизации часов с помощью световых сигналов.

Какое же из этих допущений — допущение теории относительности или допущение механики Галилея — соответствует физическому опыту? То обстоятельство, что весь опыт классической механики находился в полном согласии с формулами преобразования Галилея, отнюдь не означает, что формулы (132.1), выдвигаемые теорией относительности, непригодны. Классическая механика (в том числе и небесная механика) имеет дело со столь малыми скоростями v, что величины v^2/c^2 очень малы по сравнению с единицей (так же как vx/c^2 мало́ по сравнению с t). Поэтому с точностью, далеко превышающей точность механических (и астрономических) измерений, формулы (132.1) дают тот же результат, что и формулы Галилея. Дей-

ствительно, пренебрегая членами vx/c^2 и β^2, получим вместо (132.1)

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t, \tag{132.2}$$

т.е. соотношения, совпадающие с формулами Галилея. Различие сказывается лишь при v, сравнимых со скоростью света. А в этой области формулы Галилея приходят в противоречие с опытными данными, как мы видели уже на примере с экспериментальными постулатами (см. § 131). В дальнейшем мы покажем, что ряд выводов, следующих из формул преобразования (132.1), несмотря на их кажущуюся парадоксальность, находится в прекрасном согласии с опытными фактами.

Таким образом, следует признать, что формулы Галилея являются лишь первым приближением к действительности, пригодным для области скоростей, малых по сравнению со скоростью света, и должны быть заменены формулами преобразования теории относительности, пригодными также и для областей, где v сравнимо с c.

Ясно, что формулы (132.1) сохраняют смысл лишь при условии, что $\beta < 1$, т.е. $v < c$. Другими словами, скорости систем друг относительно друга не могут превосходить скорость света в вакууме c. То обстоятельство, что скорость света c есть *предельная скорость движения*, характерно для теории относительности и лежит в основе всего построения.

Интересно отметить, что полученные Эйнштейном формулы преобразования совпадают с формулами, ранее указанными Лоренцом. Лоренц в своих исследованиях по электродинамике движущихся сред обратил внимание на то, что вычисления упрощаются и в ряде случаев формулы приобретают инвариантный характер, если при переходе от одной системы к другой вместо переменной t ввести переменную $t' = \dfrac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1-\beta^2}}$, которая представляет собой *время*, зависящее от *места* наблюдения (координаты x), и поэтому была названа *местным* временем (в отличие от *универсального* времени t). Впоследствии, когда необходимость истолкования опыта Майкельсона заставила Лоренца ввести контракционную гипотезу, он пришел к выводу, что формулы преобразования, совпадающие с (132.1), оставляют уравнения электродинамики для *вакуума* инвариантными. Поэтому формулы (132.1) нередко называют *формулами Лоренца*.

Однако для Лоренца уравнения преобразования были лишь вспомогательными формулами, облегчающими вычисление. Физический смысл времени оставался за величиной t, а не t'. Сам Лоренц[1]) писал по этому поводу: «... теория (Эйнштейна) электромагнитных явлений в движущихся системах приобрела простоту, которой я не был в состоянии достигнуть. Главной причиной моей неудачи была моя приверженность к идее, что только переменная t может считаться истинным временем и что мое местное время t' должно рассматриваться не более чем вспомогательная математическая величина. Наоборот, в

[1]) Г. А. Лоренц. Теория электронов и ее применение к явлениям света и теплового излучения. Изд. второе.– М.: Гостехиздат, 1956. Примечание 72*, написанное в 1915 г. (с. 438).

теории Эйнштейна t' играет ту же самую роль, как и t; если мы желаем описывать явления в терминах x', y', z', t', мы должны поступать с этими переменными совершенно так же, как мы поступаем с x, y, z, t. Если, например, точка движется, то ее координаты x, y, z испытывают некоторые изменения dx, dy, dz в течение промежутка времени dt и составляющие скорости будут:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Четыре изменения dx, dy, dz, dt вызовут соответствующие изменения dx', dy', dz', dt' новых переменных x', y', z', t', и в системе этих переменных скорость v' будет определена как вектор, имеющий компоненты

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad v'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad v'_z = \frac{dz'}{dt'} \text{»}.$$

§ 133. Выводы из формул преобразования теории относительности

Из формул преобразования Эйнштейна–Лорентца, составляющих существенную часть теории относительности, вытекает ряд следствий, придающих такое своеобразие выводам этой теории.

а. Понятие одновременности. Прежде всего формулы эти показывают, что для событий, относящихся к пространственно разобщенным точкам, одновременность зависит от системы отсчета, а события, пространственно совпадающие, будут одновременны во всех инерциальных системах отсчета, если они одновременны в какой-нибудь из них.

Действительно, пусть в системе K два события относятся к моментам t_1 и t_2 и к координатам x_1 и x_2. В системе K' им соответствуют моменты t'_1 и t'_2 и координаты x'_1 и x'_2. Пусть события в системе K происходят в *одной точке* ($x_1 = x_2$) и являются одновременными, т.е. $t_1 = t_2$. Из формул (132.1) следует, что

$$x'_1 = x'_2 \quad \text{и} \quad t'_1 = t'_2,$$

т.е. эти события будут также одновременными и пространственно совпадающими в любой инерциальной системе отсчета (при любом v). Но если $x_1 \neq x_2$, а $t_1 = t_2$, т.е. события, пространственно разобщенные, являются в системе отсчета K одновременными, то из формул (132.1) следует, что

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad x'_2 = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1-\beta^2}},$$
$$t'_1 = \frac{t - (v/c^2)x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad t'_2 = \frac{t - (v/c^2)x_2}{\sqrt{1-\beta^2}};$$

таким образом,

$$x'_1 \neq x'_2 \quad \text{и} \quad t'_1 \neq t'_2.$$

Другими словами, в системе K' эти события оказываются *неодновременными*, оставаясь также и пространственно разобщенными.

б. Сравнение масштабов. Пусть, например, мы имеем масштаб, расположенный вдоль оси x', неподвижный относительно системы K'; следовательно, относительно системы K этот масштаб движется со скоростью v. Сравним его длину в системах K и K'. В системе K', в которой масштаб покоится, определение длины его не представляет никаких затруднений. Нужно лишь отметить координаты концов масштаба (x'_1 и x'_2); расстояние между ними $l' = x'_2 - x'_1$ и представляет длину масштаба в системе K'. В системе K, относительно которой масштаб движется, дело несколько сложнее: нужно отметить *одновременно* координаты концов (x_1 и x_2) движущегося масштаба. Длина масштаба в системе K будет равна $l = x_2 - x_1$, где координаты x_2 и x_1 установлены, как сказано, для *одного и того же момента времени* t (по часам K.)

Согласно формулам преобразования (132.1)

$$x'_2 = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x'_1 = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

т. е.

$$l = l'\sqrt{1-\beta^2}. \tag{133.1}$$

Другими словами, в системе K, относительно которой движется масштаб, длина его окажется меньше, чем в системе K', относительно которой масштаб неподвижен. Этот вывод аналогичен допущению Лорентца–Фицджеральда, но получается как следствие общих формул, а не является специальной гипотезой.

Вывод о сокращении масштабов находит, таким образом, свое непосредственное подтверждение в опыте Майкельсона.

в. Сравнение часов. Определим также длительность какого-либо процесса, происходящего в точке, неподвижной относительно системы K'. Если длительность этого процесса в системе K равняется τ, а в системе K' равна τ', то

$$\tau = \frac{\tau'}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Действительно, для определения длительности процесса надо найти разность показаний часов в конце и начале процесса. Для системы K' это делается без труда, ибо конец и начало процесса происходят в одной и той же точке (x') данной системы и, следовательно, могут отмечаться по одним и тем же часам, так что $\tau' = t'_2 - t'_1$, где t'_2 — показания часов K' в точке x' в момент окончания процесса, а t'_1 — в момент его начала. Для системы K начало процесса происходит в точке x_1, а конец — в точке x_2, причем $x_2 - x_1 = v\tau$, ибо за время τ (по часам K) механизм, в котором протекает наблюдаемый процесс, двигаясь со скоростью v, переместился в системе K на $v\tau$. Связь между t'_2 и t_2, а также между t'_1 и t_1 найдем с помощью (132.1):

$$t'_2 = \frac{t_2 - (v/c^2)x_2}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{и} \quad t'_1 = \frac{t_1 - (v/c^2)x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Отсюда

$$\tau' = t_2' - t_1' = \frac{(t_2 - t_1) - (v/c^2)(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\tau - (v/c^2)v\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} = \tau\sqrt{1-\beta^2},$$

или

$$\tau = \frac{\tau'}{\sqrt{1-\beta^2}}\,,$$

как и сказано выше.

Найденное соотношение между τ и τ' показывает, что процессы в системе отсчета, относительно которой перемещается изменяющийся механизм, протекают медленнее, чем в той, относительно которой этот механизм покоится. В частности, такой механизм можно использовать в качестве часов, и, следовательно, наш вывод гласит, что ход часов замедляется в системе отсчета, относительно которой часы движутся. И этот вывод теории относительности находит непосредственное опытное подтверждение. Исследования космических лучей установили наличие в их составе так называемых μ-мезонов — элементарных частиц с массой, примерно в 200 раз превышающей массу электрона. Частицы эти нестабильны, они самопроизвольно распадаются подобно атомам радиоактивных веществ. Измерения дают для среднего времени жизни μ-мезонов значение $\tau_0 = 2{,}15 \cdot 10^{-6}$ с. Но мезоны движутся со скоростью, близкой к скорости света. Поэтому за время своей жизни они проходили бы в среднем путь $v\tau_0$, равный примерно $3 \cdot 10^{10} \cdot 2{,}15 \cdot 10^{-6} \approx 600$ м. Между тем опыт показывает, что мезоны успевают пройти без распада в среднем гораздо бóльшие пути. Противоречие разрешается с помощью формул теории относительности. Время $\tau_0 = 2{,}15 \cdot 10^{-6}$ с относится к покоящемуся (или медленно движущемуся) мезону, заторможенному каким-либо плотным веществом, составляющим часть установки, применяемой для измерения продолжительности среднего времени жизни мезона. Наблюдение же над летящим мезоном производится с помощью приборов, относительно которых мезон движется с большой скоростью. По отношению к системе отсчета, связанной с этими приборами, среднее время жизни мезона есть $\tau = \tau_0/\sqrt{1-\beta^2}$. Так как для мезона β близко к единице, то τ значительно превосходит τ_0. Поэтому средний путь $v\tau$, проходимый мезоном в нашей системе отсчета, должен быть значительно больше 600 м, что находится в согласии с данными прямого опыта.

Формулы преобразования как масштабов, так и времен указывают, что β не может быть больше единицы, т.е. скорость системы не может превосходить скорость света c.

г. Теорема сложения скоростей и коэффициент увлечения. Установление соотношений между длительностью процессов и размерами масштабов, указанное выше, ведет к радикальному пересмотру всей кинематики. В частности, задача о сложении скоростей в кинематике теории относительности принимает совсем иной вид, чем в галилеевой кинематике.

Действительно, пусть система K' движется относительно системы K со скоростью v вдоль оси x. Предположим теперь, что какое-нибудь тело движется со скоростью u' в системе K' тоже вдоль оси x, и опре-

делим, какова будет скорость этого тела относительно системы K. Пусть координата нашего тела в системе K' в момент t' есть x'. В таком случае $u' = \dfrac{dx'}{dt'}$. По отношению к системе K скорость данного тела будет равна $u = \dfrac{dx}{dt}$, где x — соответствующая координата, а t — соответствующее время в системе отсчета K. Итак,

$$u' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt}\,\frac{dt}{dt'}.$$

Если бы были справедливы уравнения Галилея (129.1) $x' = x - vt$, $t' = t$, то имело бы место равенство

$$u' = \frac{dx}{dt} - v = u - v, \quad \text{или} \quad u = u' + v,$$

как легко было предвидеть и без вычисления. Но в случае справедливости уравнений Лорентца–Эйнштейна (132.1) найдем

$$u' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt}\,\frac{dt}{dt'} = \frac{(u-v)}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\frac{(1+vu'/c^2)}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

откуда

$$u' = u - v + \frac{vuu'}{c^2}, \quad \text{т. е.} \quad u' = \frac{u-v}{1-vu/c^2}, \quad u = \frac{u'+v}{1+vu'/c^2}. \qquad (133.2)$$

Таким образом, скорость результирующего движения u отличается от простой алгебраической суммы скоростей u' и v. В частности, если складывающиеся скорости u' и v сколь угодно близки к скорости света c, но, конечно, не превосходят ее, то результирующая скорость также будет меньше c. Если $u' = c$, то, как легко видеть, $u = c$, т.е. скорость света в вакууме не зависит от скорости движения системы в согласии со вторым постулатом теории относительности.

Теорема сложения скоростей без всяких затруднений объясняет все те явления, в которых играет роль коэффициент увлечения Френеля. Рассмотрим, например, опыт Физо. Если вода неподвижна, то интерференционная картина определяется скоростью света в воде $u' = c/n$. Если вода движется со скоростью v, то интерференционная картина будет определяться той скоростью света в движущейся воде, которая констатируется приборами, расположенными вне воды. Эта скорость равна

$$u = \frac{c/n + v}{1 + (v/c^2)c/n} = \frac{(c/n+v)(1-v/cn)}{1-v^2/c^2n^2} \approx \frac{c}{n} + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

(множитель при v берется с точностью до нескольких стомиллионных). Итак, наблюдаемое изменение интерференционной картины будет таким, как если бы движение воды изменило скорость распространения света в ней, сделав ее вместо c/n равной $c/n + \varkappa v$, где $\varkappa = 1 - 1/n^2$ — коэффициент увлечения.

д. Явление Доплера. Как уже указывалось в гл. XXI, рассмотрение движения источника и прибора относительно

среды приводит к двум различным выражениям для доплеровского смещения, отличающимся на величину второго порядка относительно v/c. Понятно, что с точки зрения теории относительности оба эти случая должны приводить к тождественным формулам, ибо иначе измерения доплеровского смещения с точностью до v^2/c^2 открывали бы возможность установления абсолютной скорости прибора или источника.

И действительно, принимая во внимание формулы преобразования теории относительности (132.1), мы получим две идентичные формулы, независимо от того, будем ли мы рассматривать движение источника относительно прибора или наоборот. Предположим, например, что прибор B расположен в системе K, а источник S связан с движущейся относительно прибора вдоль оси x системой K', причем прибор и источник расположены на линии движения.

Пусть частота источника (в системе K') есть ν_0. Требуется определить частоту ν, воспринимаемую прибором B в системе K.

Наблюдатель отмечает в координатной системе, связанной с прибором, два момента процесса испускания сигнала t_1 и t_2 и две координаты x_1 и x_2, которые соответствуют положению источника в эти моменты. *Длительность* выделенной части сигнала (по часам K) равна $\tau = t_2 - t_1$, а координата $x_2 = x_1 + v\tau$, где v — скорость источника (системы K').

Так как источник удален от прибора, то моменты θ_1 и θ_2 начала и конца действия выделенной части сигнала на прибор будут отличаться от t_1 и t_2, а именно, будут равны

$$\theta_1 = t_1 + \frac{a}{c}, \quad \theta_2 = t_2 + \frac{a + v\tau}{c},$$

где a — расстояние между прибором и источником в момент t_1. Таким образом, *длительность* воздействия на прибор в системе K есть

$$\theta = \theta_2 - \theta_1 = \tau\left(1 + \frac{v}{c}\right).$$

Каково же число колебаний, дошедших за это время до прибора? Так как источник испускает за 1 с ν_0 колебаний (в системе K'), то для оценки полного числа колебаний в выделенной части сигнала надо знать длительность ее в системе K'. Величина эта есть $\tau' = t'_2 - t'_1$, где t'_2 и t'_1 (моменты конца и начала выделенной части сигнала в системе K') можно найти при помощи преобразования координат

$$t'_2 = \frac{t_2 - (v/c^2)x_2}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{и} \quad t'_1 = \frac{t_1 - (v/c^2)x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Отсюда

$$\tau' = t'_2 - t'_1 = \frac{\tau(1 - v^2/c^2)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \tau\sqrt{1-\beta^2},$$

что можно было бы непосредственно заимствовать из пункта «в» настоящего параграфа.

Итак, число дошедших до прибора за время θ колебаний равно $N = \nu_0 \tau' = \nu_0 \tau \sqrt{1-\beta^2}$, и для воспринимаемой им частоты имеем

$$\nu = \frac{N}{\theta} = \frac{\nu_0 \tau \sqrt{1-\beta^2}}{\tau(1+v/c)} = \nu_0 \sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}\,. \tag{133.3}$$

Совершенно такая же формула получается, если с системой K' связан прибор, а с системой K — источник. Как уже упоминалось, эти формулы отличаются на величины второго порядка относительно β от формул, выведенных в гл. XXI без учета соображений теории относительности. Если линия, соединяющая источник и прибор, составляет угол φ с направлением скорости перемещения, то аналогичное рассмотрение приведет к соотношению [1])

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+(v/c)\cos\varphi}\,. \tag{133.4}$$

При $\varphi = 0$ получим соотношение (133.3). При $\varphi = \pi/2$ найдем $\nu = \nu_0\sqrt{1-\beta^2}$. Таким образом, согласно теории относительности эффект Доплера должен иметь место и в том случае, когда направление распространения света *перпендикулярно* к направлению движения (*поперечный эффект Доплера*).

Это принципиальное отличие, характерное для теории относительности, может служить для новой экспериментальной проверки ее положений. Трудность опыта лежит в том, что ожидаемое смещение мало по сравнению с обычным (продольным) эффектом Доплера, так что даже небольшое отклонение от строгой перпендикулярности между направлением наблюдения и скоростью замаскирует ожидаемый эффект.

Айвсу (1938 г.) удалось, однако, преодолеть это затруднение. В его опытах источником света служил пучок каналовых лучей водорода, несущихся со значительной скоростью ($v \sim 10^8$ см/с), причем специальная конструкция трубки обеспечивала высокую однородность каналовых лучей по скоростям. Наблюдая свет, посылаемый каналовыми частицами непосредственно, и свет, отраженный зеркалом, Айвс

[1]) Нередко эту формулу пишут в виде

$$\nu = \nu_0 \frac{1-(v/c)\cos\psi}{\sqrt{1-\beta^2}}\,,$$

где ψ — угол между направлением наблюдения и направлением скорости, измеренный в системе координат, связанной с источником, тогда как угол φ, приведенный в тексте, измерен в системе координат, связанной с прибором. Обе формулы, конечно, вполне эквивалентны друг другу, ибо углы φ и ψ связаны соотношением

$$\cos\varphi = \frac{\cos\psi - (v/c)}{1-(v/c)\cos\psi}\,.$$

При сравнении с опытом, когда угол наблюдения устанавливается для прибора, удобнее формула, приведенная в тексте.

мог выделить изменение частоты, связанное с поперечным явлением Доплера.

Идея опыта Айвса понятна из следующей схемы (рис. 22.10). Если каналовый луч H направлен под некоторым углом к зеркалу, перпендикулярно к которому расположена ось спектрографа, то имеет место обычный эффект Доплера, соответствующий компоненте скорости вдоль направления наблюдения. Пусть угол между направлением скорости частицы и направлением света, идущего непосредственно от частицы к спектрографу, равен φ (см. рис. 22.10). В таком случае свет, направляющийся от частицы к зеркалу (и от него отраженный в спектрограф), будет составлять с направлением скорости угол $\pi - \varphi$. Поэтому эффект Доплера, соответствующий лучевой компоненте скорости, дает смещения

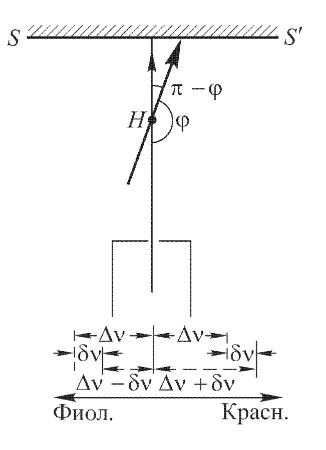


Рис. 22.10. Схема опыта Айвса по обнаружению поперечного эффекта Доплера

$$\Delta\nu = \frac{v}{c}\cos\varphi$$

и

$$\Delta\nu' = \frac{v}{c}\cos(\pi - \varphi) = -\Delta\nu,$$

симметричные относительно несмещенной линии. Поперечный же эффект Доплера, накладываясь на описанный выше, дает для обеих этих компонент смещение в одну и ту же сторону, а именно в красную $(-\delta\nu)$.

В результате обоих эффектов получится картина, *асимметричная* относительно несмещенной линии. Измерив наблюденные результирующие смещения $a = -(\Delta\nu + \delta\nu)$ и $b = \Delta\nu - \delta\nu$, можно вычислить смещение $\delta\nu = -(a+b)/2$, характеризующее поперечный эффект Доплера и соответствующее изменению длины волны в сторону красного конца спектра на величину $\delta\lambda$. Измерения Айвса действительно обнаружили такой эффект и дали для величины $\delta\lambda$ значение, весьма близкое к предсказанному теорией относительности, а именно

$$\text{ожидаемое} \quad \delta\lambda = 0{,}0472\ \text{Å}; \quad \text{наблюдаемое} \quad \delta\lambda = 0{,}0468\ \text{Å}.$$

З а к л ю ч е н и е. Мы привели ряд отдельных фактов, являющихся экспериментальным подтверждением различных выводов теории относительности. Факты были выбраны так, чтобы возможно нагляднее проиллюстрировать справедливость того или иного положения. Но, конечно, все эти отдельные положения связаны в единое целое. Поэтому совокупность указанных фактов, равно как и огромное количество других, является тем арсеналом экспериментальных аргументов, который заставляет нас признать справедливость и плодотворность теории относительности.

Отметим, наконец, что разнообразные выводы теории относительности приводят к заключению о невозможности распространения

какого-либо воздействия или сигнала со скоростью, большей скорости света в вакууме c. В кажущемся противоречии с этим заключением стоит тот факт, что в диспергирующей среде показатель преломления n может быть меньше единицы, так что *фазовая скорость* c_1 будет больше скорости c.

Однако надо иметь в виду, что фазовая скорость не может определять скорость передачи сигнала или действия, ибо она характеризует бесконечную синусоиду, все части которой идентичны. Вызвав какое-либо искажение на синусоиде, мы могли бы сигнализировать, но тем самым будет нарушена монохроматичность, и сигнал будет распространяться не со скоростью фазы, а с так называемой скоростью *сигнала*, которая меньше c (ср. § 125).

§ 134. Общие выводы

Изложенное показывает, что теория относительности представляет собой стройную систему, которая не только устраняет кажущиеся противоречия между отдельными экспериментальными наблюдениями, но и приводит к очень углубленному пересмотру наших понятий об измерениях пространства и времени. Сверх того, теория относительности установила ряд новых общих положений, в частности положения, выражающие зависимость массы тела от скорости и связь между энергией и массой:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad E = mc^2, \tag{134.1}$$

где m_0 соответствует *массе покоя*, т.е. массе при v, малом по сравнению с c. Обширные применения этих соотношений особенно плодотворны в ядерной физике, где мы имеем дело с огромными скоростями и огромными элементарными порциями энергии $h\nu$ (для жестких γ-квантов).

Поверхностное знакомство с теорией относительности может привести к представлению, что все наши физические понятия теряют реальность, ибо, будучи относительными, они могут по-разному оцениваться в разных системах отсчета без возможности выбора из этих разных суждений. Такое заключение совершенно неправильно, подобно тому как, например, неправильно было бы суждение о нереальности пространственных величин на том основании, что в зависимости от выбора системы декартовых координат (например, направления осей) меняется числовое значение координат x, y, z. Относительный характер каждого из этих координатных отрезков не лишает реальности понятия *длины* как расстояния между двумя точками, ибо длина эта, равная

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2},$$

не зависит от выбора координат, а инвариантна по отношению к ним. Относительны же лишь компоненты этой реальной длины по осям координат.

Совершенно так же в теории относительности относительный характер времени и длины означает относительность лишь отдельных компонент некоторой физической величины, которая как целое имеет вполне определенный реальный смысл, не зависящий от выбора координатной системы. Пользуясь нашей геометрической аналогией, мы можем уяснить себе смысл этой физической величины следующим образом. *Точка* в геометрии есть совокупность трех координат x, y, z, и расстояние между двумя точками есть вполне определенная длина, величина которой не зависит от выбора системы координат. В физике реальность имеет *событие*, для определения которого должно быть задано место и время, т.е. четыре координаты x, y, z, t (*мировая точка*). Реальный физический смысл имеет «расстояние» между двумя событиями, т.е. «длина»

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2(\Delta t)^2}.$$

Эта величина, называемая *интервалом*, имеет определенное значение, ибо она не зависит от выбора системы координат и является инвариантной.

Совершенно так же формула (134.1) приводит к выводу, что масса частицы зависит от системы отсчета; то же относится к импульсу частицы (количеству движения) $p = mv$ и ее энергии $E = mc^2$. Таким образом, все эти величины — «относительные» подобно рассмотренным выше пространственным и временным координатам. Величиной же инвариантной, не зависящей от системы отсчета и, следовательно, имеющей вполне реальный физический смысл, является длина четырехмерного вектора, так называемого вектора энергии-импульса, равная

$$\sqrt{E^2 - c^2(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)} = \sqrt{m^2c^4 - c^2m^2v^2} = mc^2\sqrt{1-\beta^2} = m_0c^2,$$

т.е. величина, действительно сохраняющаяся неизменной в любой системе отсчета. Компоненты этого четырехмерного вектора равны

$$iE = imc^2, \quad cp_x, \quad cp_y, \quad cp_z,$$

т.е. связаны с энергией и импульсом частицы, значения которых *зависят* от выбора инерциальной системы отсчета.

Таким образом, правильное истолкование следствий теории относительности не дает решительно никаких оснований для выводов субъективистского или идеалистического характера. Взаимосвязь массы и энергии с особенной убедительностью показывает, что масса и энергия представляют собой неотъемлемые атрибуты материи, независимо от того, имеем ли мы эту последнюю в форме вещества или в форме электромагнитного поля (свет).

Пространственно-временные соотношения между событиями реального мира определяются *интервалом*, величина которого не зависит от произвольного выбора системы отсчета и не является, следовательно, относительной.

Теория относительности делает значительный шаг вперед по сравнению с классической физикой, для которой пространство и время были самостоятельными, не связанными друг с другом категориями.

Рассматривая время и пространство в их неразрывной связи, теория относительности дает более глубокие представления о пространстве и времени, являющиеся по сравнению с представлениями классической физики дальнейшим приближением к соотношениям объективного мира.

Развитие этих представлений мы имеем в так называемой общей теории относительности, которая рассматривает не только равномерное, но и ускоренное движение систем отсчета. Общая теория относительности приходит к выводу о зависимости свойств пространства и времени от распределения материальных масс.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВЕТА ЧЕРЕЗ ГРАНИЦУ ДВУХ СРЕД

Глава XXIII

ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ СВЕТА НА ГРАНИЦЕ ДВУХ ДИЭЛЕКТРИКОВ

§ 135. Отражение и преломление на границе двух диэлектриков. Формулы Френеля

В предшествующем изложении мы неоднократно использовали законы отражения и преломления света, установленные на основе опытных данных.

В настоящей главе мы рассмотрим вопрос о распространении света сквозь границу двух сред в рамках электромагнитной теории света. При этом мы должны, очевидно, не только обосновать упомянутые выше законы геометрической оптики, но и продвинуть исследование задачи об отражении и преломлении дальше, а именно, рассчитать амплитуды и фазы отраженных от границы раздела световых волн и волн, прошедших через границу раздела.

К решению поставленной задачи (как и большинства физических задач) возможны два разных подхода.

Можно детально рассмотреть воздействие световой волны на электрические заряды атомов среды (электроны, ионы): электромагнитные волны возбуждают колебания зарядов, происходящие с частотой колебаний электрического вектора; вследствие этих колебаний атомы среды излучают вторичные электромагнитные волны, интерференция всех вторичных волн с волной, падающей на среду, приводит к возникновению отраженной и преломленной волн.

В такой постановке сформулированная общая задача успешно разрешена, однако требуемые вычисления очень громоздки из-за необходимости учитывать действие на каждый атом не только падающей волны, но и вторичных волн от всех остальных атомов.

Другой путь решения поставленной задачи опирается на феноменологическую электродинамику, т.е. на систему уравнений Максвелла и на вытекающие из них граничные условия для электромагнитного поля. Свойства среды при этом задаются ее показателем преломления или диэлектрической проницаемостью.

Мы воспользуемся последним методом, поскольку он позволяет просто найти направление распространения, амплитуды и фазы отраженной и преломленной волн, т.е. теоретически вывести законы от-

ражения и преломления световых волн. При этом способе, однако, вопрос о связи между показателем преломления и свойствами атомов, составляющих среду, остается открытым.

Итак, пусть на границу раздела двух изотропных однородных диэлектриков падает плоская электромагнитная волна. В таком случае, как показывает опыт, от границы раздела диэлектриков будут распространяться две плоские волны — отраженная и преломленная.

Граничные условия для электромагнитного поля состоят в том, что в любой момент времени и в любой точке границы раздела выполняются следующие соотношения для тангенциальных компонент векторов напряженности электрического и магнитного полей:

$$\mathbf{E}_{\tau 1} = \mathbf{E}_{\tau 2}, \quad \mathbf{H}_{\tau 1} = \mathbf{H}_{\tau 2}, \tag{135.1}$$

где индекс τ служит для обозначения тангенциальных компонент векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, т.е. проекций векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ на границу раздела между средами. Очевидно, в первой среде результирующее значение напряженности поля вблизи границы раздела определится суммой полей падающей и отраженной волн, а внутри второй среды — лишь полем проходящей волны. Падающая волна может быть поляризована любым образом.

Из уравнений Максвелла, как показано в § 3, для плоских волн получается соотношение $\sqrt{\varepsilon}\,E = \sqrt{\mu}\,H$, которое в оптической части спектра для прозрачных диэлектриков можно записать в виде

$$\sqrt{\varepsilon}\,E = H,$$

так как в этом случае $\mu \approx 1$. Векторы $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и единичный вектор $\mathbf{s}$, определяющий направление распространения волны, взаимно перпендикулярны и составляют правовинтовую систему (см. рис. 2.6, где направление распространения волны задается вектором $\mathbf{v}$). Убедимся, прежде всего, в том, что *геометрические законы отражения и преломления*, определяющие направления распространения отраженной и преломленной волн, одни и те же при любой поляризации падающей волны. При теоретическом анализе проблемы отражения волн удобно пользоваться комплексной записью колебаний. В соответствии с этим запишем выражения для падающей, отраженной и преломленной волн следующим образом:

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}_i \exp\left[i(\omega_i t - k_i \mathbf{r}\mathbf{s}_i)\right], \quad k_i = \frac{\omega_i}{v_i} = \frac{\omega_i}{c}\,n_1, \\ &\mathbf{E}_r \exp\left[i(\omega_r t - k_r \mathbf{r}\mathbf{s}_r)\right], \quad k_r = \frac{\omega_r}{v_r} = \frac{\omega_r}{c}\,n_1, \\ &\mathbf{E}_d \exp\left[i(\omega_d t - k_d \mathbf{r}\mathbf{s}_d)\right], \quad k_d = \frac{\omega_d}{v_d} = \frac{\omega_d}{c}\,n_2. \end{aligned} \tag{135.2}$$

Здесь $\mathbf{r}$ — радиус-вектор; ω_j, v_j — частоты и скорости волн ($j = i, r, d$); $\mathbf{E}_j$ — амплитуды волн; n_1, n_2 — показатели преломления граничащих сред; $\mathbf{s}_j$ — единичные векторы. Поскольку условие $\mathbf{s}_j\mathbf{r} = \mathrm{const}$ определяет плоскость, перпендикулярную к $\mathbf{s}_j$, то выражения (135.2) описывают плоские волны, распространяющиеся вдоль векторов $\mathbf{s}_j = \mathbf{s}_i$, $\mathbf{s}_r$, $\mathbf{s}_d$. Согласно сказанному в § 4 о комплексной записи колебаний, физическое содержание связано с вещественной частью этих выражений. Аргументы декартовых слагающих комплексных векторов $\mathbf{E}_i$, $\mathbf{E}_r$, $\mathbf{E}_d$

суть начальные фазы соответствующих колебаний. Как разъяснено в § 110, разность начальных фаз составляющих вектора $\mathbf{E}_j$ влияет на состояние поляризации волны.

Если ввести выражения (135.2) в граничные условия для электрического вектора, то они принимают вид

$$\mathbf{E}_{i\tau} \exp\left[i(\omega_i t - k_i \mathbf{s}_i \mathbf{r})\right] + \mathbf{E}_{r\tau} \exp\left[i(\omega_r t - k_r \mathbf{s}_r \mathbf{r})\right] = \\ = \mathbf{E}_{d\tau} \exp\left[i(\omega_d t - k_d \mathbf{s}_d \mathbf{r})\right].$$

Для выполнения этого равенства в любой момент времени t в любой точке границы раздела необходимо и достаточно, чтобы во всех трех показателях экспонент были одинаковы коэффициенты при t и при проекции $\mathbf{r}_\tau$ радиус-вектора $\mathbf{r}$ на границу раздела, т.е. чтобы выполнялись равенства

$$\omega_i = \omega_r = \omega_d, \tag{135.3}$$

$$k_i \mathbf{s}_{i\tau} = k_r \mathbf{s}_{r\tau} = k_d \mathbf{s}_{d\tau}. \tag{135.4}$$

Согласно (135.3) частоты всех трех волн должны быть равны между собой. В рамках молекулярных представлений, изложенных в начале параграфа, этот результат очевиден, так как частоты колебаний зарядов, вынуждаемых электрическим вектором световой волны, совпадают с частотой вынуждающей силы, т.е. ω_i. В дальнейшем индексы при ω_i, ω_r, ω_d будут опущены и частота будет обозначаться просто буквой ω.

Из равенства (135.4) следует, что единичные векторы $\mathbf{s}_i$, $\mathbf{s}_r$ и $\mathbf{s}_d$ находятся в одной плоскости, проходящей через нормаль к плоскости раздела и $\mathbf{s}_i$ (*плоскость падения*), что соответствует опыту (см. § 1).

Выберем систему координат таким образом, чтобы плоскость xOy совпадала с плоскостью раздела сред, а плоскость zOx — с плоскостью падения, причем ось Oz направим из среды I в среду II (рис. 23.1). Углы между $\mathbf{s}_i$, $\mathbf{s}_d$ и осью z обозначим через φ, ψ (углы падения и преломления), а угол между Oz и $\mathbf{s}_r$ обозначим через $\pi - \varphi'$ (φ' — угол отражения, см. рис. 23.1).

В указанной системе координат y-компоненты векторов $\mathbf{s}_{j\tau}$ равны нулю, а x-компоненты можно выразить через углы φ, φ', ψ следующим образом:

$$s_{ix} = \sin\varphi, \quad s_{rx} = \sin\varphi', \quad s_{dx} = \sin\psi.$$

Таким образом, равенствам (135.4) можно придать вид

$$\frac{\sin\varphi}{v_1} = \frac{\sin\varphi'}{v_1} = \frac{\sin\psi}{v_2}. \tag{135.5}$$

Первое равенство означает, что $\varphi = \varphi'$, т.е. мы приходим к закону отражения. Для преломленной волны имеем цепочку равенств

$$\frac{\sin\psi}{\sin\varphi} = \frac{n_1}{n_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} = \frac{1}{n} = \frac{v_2}{v_1}, \tag{135.6}$$

что совпадает с законом преломления, установленным экспериментально. Кроме того, соотношения (135.6) существенно дополняют содержание эмпирического закона преломления, а именно, относительный показатель преломления n двух сред равен отношению скоростей

распространения волн v_1 и v_2. Итак, геометрические законы отражения и преломления непосредственно вытекают из электромагнитной теории света.

В рассуждениях, приведших к геометрическим законам, мы не делали никаких предположений, ограничивающих значения составляющих векторных амплитуд и их начальных фаз. Поскольку именно эти величины определяют поляризацию волн, то можно утверждать, что геометрические законы отражения и преломления справедливы при любых состояниях поляризации падающей волны.

В отличие от геометрических законов, амплитуды отраженной и преломленной волн зависят от поляризации падающей волны. Из дальнейшего будет видно, что целесообразно раздельно рассматривать два случая, когда электрический вектор либо лежит в плоскости

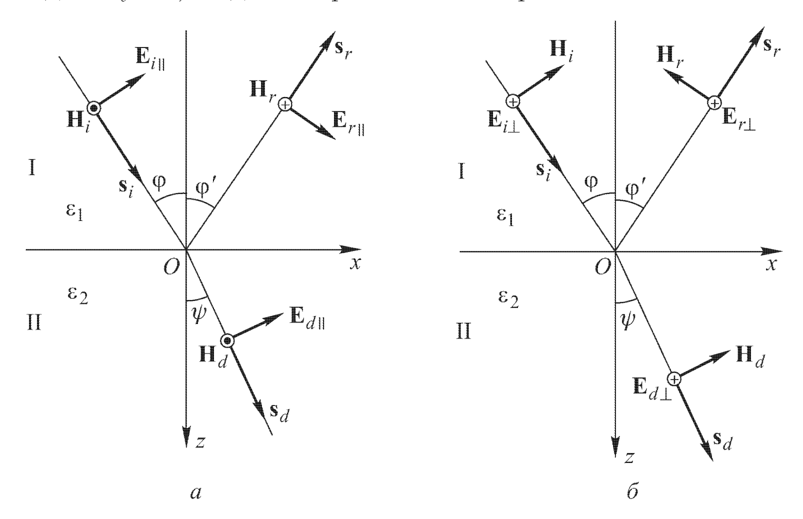


Рис. 23.1. Схемы расположения векторов и напряженностей в падающей, отраженной и преломленной волнах: *а* — компоненты напряженности электрического вектора $\mathbf{E}_{j\parallel}$ лежат в плоскости падения, *б* — компоненты напряженности электрического вектора $\mathbf{E}_{j\perp}$ перпендикулярны плоскости падения

падения, либо перпендикулярен к ней. Другими словами, разложим амплитуды $\mathbf{E}_i$, $\mathbf{E}_r$, $\mathbf{E}_d$ на компоненты $\mathbf{E}_\parallel$ и $\mathbf{E}_\perp$, лежащие соответственно в плоскости падения и перпендикулярные к ней:

$$\mathbf{E}_j = \mathbf{E}_{j\parallel} + \mathbf{E}_{j\perp}, \quad j = i, r, d.$$

Результаты вычисления $\mathbf{E}_{j\parallel}$ и $\mathbf{E}_{j\perp}$ позволяют, очевидно, решить задачу об отражении и преломлении света произвольной поляризации. Взаимные ориентации векторов $\mathbf{s}_j$, $\mathbf{E}_{j\parallel}$, $\mathbf{E}_{j\perp}$ и соответствующих им напряженностей $\mathbf{H}_{j\parallel}$, $\mathbf{H}_{j\perp}$ магнитного поля приведены на рис. 23.1 *а* и *б*.

Начнем с рассмотрения случая, когда компоненты напряженности электрического вектора $\mathbf{E}_{j\parallel}$ лежат в плоскости падения

(см. рис. 23.1 *а*). Граничные условия для такой поляризации принимают вид

$$E_{i\|}\cos\varphi + E_{r\|}\cos\varphi = E_{d\|}\cos\psi, \quad n_1E_{i\|} - n_1E_{r\|} = n_2E_{d\|}. \tag{135.7}$$

Решая эту систему уравнений и используя закон преломления, найдем

$$r_\| = \frac{E_{r\|}}{E_{i\|}} = -\frac{\sin 2\varphi - \sin 2\psi}{\sin 2\varphi + \sin 2\psi} = -\frac{\operatorname{tg}(\varphi-\psi)}{\operatorname{tg}(\varphi+\psi)}, \tag{135.8}$$

$$t_\| = \frac{E_{d\|}}{E_{i\|}} = \frac{2\sin\psi\cos\varphi}{\sin(\varphi+\psi)\cos(\varphi-\psi)}. \tag{135.9}$$

Величины $r_\|$ и $t_\|$ носят названия *амплитудных коэффициентов отражения* и *пропускания* для волны, линейно-поляризованной в плоскости падения.

Для компонент напряженностей электрического вектора, перпендикулярных к плоскости падения (рис. 23.1 *б*), граничные условия (135.1) принимают вид

$$E_{i\perp} + E_{r\perp} = E_{d\perp}, \quad n_1(E_{i\perp} - E_{r\perp})\cos\varphi = n_2E_{d\perp}\cos\psi,$$

и амплитудные коэффициенты отражения и пропускания $r_\perp$, $t_\perp$ даются выражениями

$$r_\perp = \frac{E_{r\perp}}{E_{i\perp}} = -\frac{\sin(\varphi-\psi)}{\sin(\varphi+\psi)}, \tag{135.10}$$

$$t_\perp = \frac{E_{d\perp}}{E_{i\perp}} = \frac{2\sin\psi\cos\varphi}{\sin(\varphi+\psi)}. \tag{135.11}$$

Соотношения (135.8)–(135.11) между амплитудами падающей, отраженной и преломленной волн известны под названием *формул Френеля.*

Нетрудно получить аналогичные соотношения для магнитных векторов (см. упражнение 185).

Установим с помощью формул Френеля соотношения между фазами падающей, преломленной и отраженной волн. Амплитудные коэффициенты отражения — величины вещественные (случай полного внутреннего отражения, когда это не так, рассматривается в гл. XXIV). Поэтому фазы отраженной, преломленной и падающей волн либо совпадают, либо отличаются на π. Заметим, что направления, выбранные для наших векторов в качестве положительных, конечно, условны (так же как во всякой геометрической задаче). Но поскольку мы придерживаемся их на всем протяжении нашего рассмотрения, то найденные таким путем соотношения имеют общий смысл. Наш *выбор* положительных направлений означает, в частности, что волны i, r, d совпадают по фазе, если амплитуды E_i, E_r, E_d имеют одинаковые знаки, и противоположны по фазе, если знаки различны.

Из формул (135.9) и (135.11) следует, что при любом значении углов ψ и φ знаки $E_{d\|}$ и $E_{i\|}$ и знаки $E_{d\perp}$ и $E_{i\perp}$ совпадают между собой. Это означает, что на поверхности раздела и фазы их совпадают, т.е. преломленная волна во всех случаях сохраняет без изменения фазу падающей. Для компонент *отраженной* волны ($E_{r\|}$ и $E_{r\perp}$) дело

обстоит сложнее. Как показывают формулы (135.8) и (135.10), в зависимости от угла падения и значения показателя преломления граничных сред будут иметь место различные соотношения, сведенные в табл. 23.1.

Таблица 23.1

	$\varphi + \psi < \pi/2$	$\varphi + \psi > \pi/2$
$\varphi > \psi$, т.е. $n_2 > n_1$, или $n > 1$	$E_{r\perp}$ и $E_{i\perp}$ противоположны по фазе (противоположны по знаку) $E_{r\parallel}$ и $E_{i\parallel}$ противоположны по фазе (противоположны по знаку)	$E_{r\perp}$ и $E_{i\perp}$ противоположны по фазе (противоположны по знаку) $E_{r\parallel}$ и $E_{i\parallel}$ совпадают по фазе (совпадают по знаку)
$\varphi < \psi$, т.е. $n_2 < n_1$, или $n < 1$	$E_{r\perp}$ и $E_{i\perp}$ совпадают по фазе (совпадают по знаку) $E_{r\parallel}$ и $E_{i\parallel}$ совпадают по фазе (совпадают по знаку)	$E_{r\perp}$ и $E_{i\perp}$ совпадают по фазе (совпадают по знаку) $E_{r\parallel}$ и $E_{i\parallel}$ противоположны по фазе (противоположны по знаку)

Таким образом, при малых углах падения ($\varphi + \psi < \pi/2$) фаза обеих компонент электрического вектора отраженной волны противоположна фазе падающей для случая, когда $n_2 > n_1$, и совпадает с фазой падающей волны при $n_2 < n_1$. В частности, это имеет место и при нормальном падении. Это явление потери полуволны при отражении от оптически более плотной среды ($n > 1$) многократно упоминалось нами при изучении различных случаев интерференции. В приведенных формулах содержится полный разбор всех возможных случаев для электрического вектора. Аналогично может быть разобрано поведение фаз магнитного вектора.

Энергия света I_i, падающего на единицу площади поверхности границы раздела в единицу времени, есть проекция вектора Умова–Пойнтинга на нормаль к границе раздела. Усредняя энергию за период колебаний $2\pi/\omega$, найдем

$$I_i = \frac{cn_1}{8\pi}\,(E_{i\perp}^2 + E_{i\parallel}^2)\cos\varphi.$$

Соответственно для отраженной и преломленной волн энергия, покидающая единицу площади поверхности в единицу времени, выразится соотношениями

$$I_r = \frac{cn_1}{8\pi}\,[E_{t\perp}^2 + E_{r\parallel}^2]\cos\varphi, \quad I_d = \frac{cn_2}{8\pi}\,[E_{d\perp}^2 + E_{d\parallel}^2]\cos\psi.$$

Отношение отраженного потока к падающему определяется, таким образом, квадратами амплитудных коэффициентов отражения $r_\perp^2$ и $r_\parallel^2$:

$$r_\perp^2 = \left[\frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)}\right]^2, \quad r_\parallel^2 = \left[\frac{\operatorname{tg}(\varphi - \psi)}{\operatorname{tg}(\varphi + \psi)}\right]^2. \tag{135.12}$$

В случае нормального падения ($\varphi = \psi = 0$) из формул (135.8) и (135.10), раскрывая неопределенность, находим

$$r_\perp = r_\parallel = -\frac{n-1}{n+1} = -\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}. \tag{135.13}$$

Равенство коэффициентов отражения $r_\perp$ и $r_\parallel$ при нормальном падении вполне понятно, так как в этом случае и $E_{i\perp}$, и $E_{r\parallel}$ параллельны границе раздела и физически равноправны. Знаки $r_\perp$ и $r_\parallel$ по-прежнему выражают соотношение фаз отраженной и падающей волн.

Для $n = 1{,}5$ (стекло–воздух) находим

$$r_\perp^2 = r_\parallel^2 = 1/25 = 4\,\%.$$

Отражение света от многих поверхностей даже при падении, близком к нормальному, может заметно ослабить интенсивность света, с чем приходится считаться при построении сложных оптических систем. Одним из способов борьбы с этими потерями является склеивание отдельных поверхностей канадским бальзамом; относительный показатель преломления границы канадский бальзам–стекло близок к единице, так что отражения на поверхности склейки практически не наблюдается.

Был разработан метод, позволяющий чрезвычайно сильно уменьшать отражение света на свободной поверхности стекла (*просветление оптики*). Путем химической обработки или осаждением постороннего вещества на стекле образуют поверхностный слой, показатель преломления и толщину которого стремятся подобрать так, чтобы лучи, отраженные от верхней и нижней границ этого слоя, благодаря интерференции взаимно погашались (см. упражнение 192). При хорошем подборе констант слоя удается весьма значительно ослабить отражение. Это крайне важно при конструировании приборов, состоящих из многих оптических частей, т.е. обладающих большим числом отражающих поверхностей. Так, в некоторых приборах, например, в перископах, подобная обработка ведет к уменьшению потерь на отражение в несколько раз.

Особого внимания заслуживает случай, когда выполняется условие $\varphi + \psi = \pi/2$ и $\operatorname{tg}(\varphi + \psi) \to \infty$. Нетрудно показать, что это условие удовлетворяется при угле падения

$$\varphi_\text{Б} = \operatorname{arctg}\frac{n_2}{n_1} = \operatorname{arctg} n. \tag{135.14}$$

Такому условию всегда можно удовлетворить на опыте. Для стекла, например, с $n = 1{,}5$ находим $\varphi_\text{Б} = 56^\circ 19'$, а для воды ($n = 1{,}33$) имеем $\varphi_\text{Б} = 53^\circ 4'$ (в обоих случаях первой средой служил воздух, $n_1 = 1$). При угле падения $\varphi = \varphi_\text{Б}$ коэффициент отражения $r_\parallel$ для $E_{r\parallel}$ равен нулю, а $r_\perp$ дается формулой (см. упражнение 186)

$$r_\perp = -\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}\,.$$

Таким образом, при $\varphi = \varphi_\text{Б}$ отраженный свет линейно поляризован в плоскости, перпендикулярной плоскости падения. Обращение в нуль коэффициента отражения $r_\parallel$ при $\varphi = \varphi_\text{Б}$ называют *законом Брюстера*, а угол $\varphi_\text{Б}$ — *углом Брюстера*. Более детально закон Брюстера и его использование для получения поляризованного света обсуждается в § 136.

Если $\varphi \to \pi/2$ (скользящее падение), то

$$r_{\parallel}^2 = r_{\perp}^2 = 1,$$

т.е. происходит полное отражение света. С этим связаны, в частности, яркие изображения предметов в спокойной воде (берега рек, фонари, заходящее солнце и т.п.).

На рис. 23.2 изображены графики зависимости $r_{\perp}^2$ и $r_{\parallel}^2$ (кривые I и III) от угла падения φ для $n = 1{,}52$, в соответствии с чем угол Брюстера равен $56°40'$. Кривая II отвечает коэффициенту отражения для неполяризованного света. В этом случае $E_{i\parallel}^2 = E_{i\perp}^2$ и

$$I_r = \frac{(r_{\parallel}^2 + r_{\perp}^2)}{2}\, I_i,$$

т.е. коэффициент отражения равен среднему арифметическому из $r_{\perp}^2$ и $r_{\parallel}^2$.

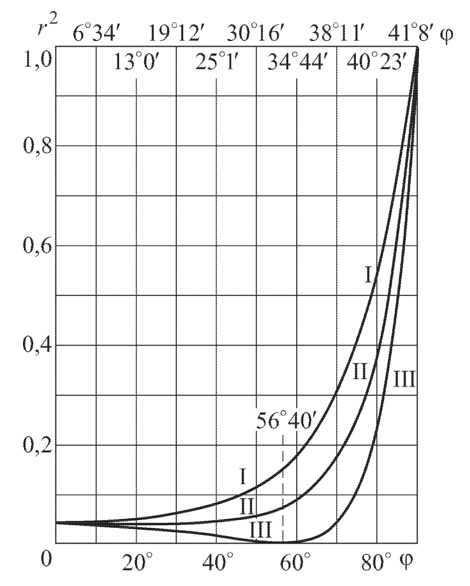


Рис. 23.2. Коэффициент отражения света в функции угла падения φ ($n = 1{,}52$). I — для $r_{\perp}^2$, II — для естественного света, III — для $r_{\parallel}^2$

Если направить луч в противоположном направлении (из стекла в воздух), то углы φ и ψ поменяются местами и, как видно из соотношений (135.12), значения $r_{\parallel}^2$ и $r_{\perp}^2$ останутся неизменными. Поэтому графики рис. 23.2 относятся и к отражению при $n = 1/1{,}52$ (соответствующие углы падения указаны наверху диаграммы).

Отметим качественные изменения, которые претерпели бы графики рис. 23.2 при увеличении относительного показателя преломления. Начальная точка графиков, отвечающая $\varphi = 0$, согласно (135.13), сместится вверх; график для $r_{\perp}^2$ останется монотонным, угол Брюстера увеличится, график для $r_{\parallel}^2$ приобретет все более глубокий минимум и еще резче приблизится к единице при $\varphi \to \pi/2$. При достаточно больших значениях показателя преломления и $r^2 = (r_{\parallel}^2 + r_{\perp}^2)/2$ будет изменяться немонотонно, уменьшаясь при малых углах падения и увеличиваясь при $\varphi > \varphi_{\text{Б}}$.

Соотношения, изображенные на указанных кривых (или в соответствующих формулах), подвергались многократно опытной проверке и хорошо подтверждены опытом. Опытную их проверку можно выполнить на любой установке, дающей возможность исследования интенсивности света, направленного под разными углами (фотометр, соеди-

ненный с гониометром). При этом обычно исследуются отдельно $\perp$- и $||$-компоненты, так что либо применяется поляризационный фотометр, либо прибор снабжается дополнительно поляризационной призмой.

Экспериментальное подтверждение формул Френеля служит веским аргументом в пользу электромагнитной теории света. Не вдаваясь в суть дела, подчеркнем, что строгое решение задачи об отражении света в рамках теории упругого эфира встречает непреодолимые трудности. Хотя Френель и получил свои формулы при рассмотрении прохождения упругой волны через границу двух сред, его вывод внутренне противоречив и неубедителен. Электромагнитная же теория, как было показано выше, дает простой и изящный вывод, основанный на анализе граничных условий для напряженностей электрического и магнитного векторов. В противоположность формулам Френеля, геометрические законы отражения справедливы для волн любой природы и не могут поэтому служить для выбора между упругой и электромагнитной теориями света.

§ 136. Поляризация света при прохождении через границу двух диэлектриков. Наглядная интерпретация закона Брюстера

Как мы видим, формулы Френеля дают возможность рассчитать амплитуду каждой из компонент $E_\perp$ и $E_{||}$ в отраженном и проходящем свете, и поэтому они содержат полное решение задачи о степени поляризации отраженного и преломленного света. В них заключаются все законы, уже известные нам из опыта и описанные в гл. XVI. Таким образом, электромагнитная теория света объясняет великое открытие Малюса.

Если свет естественный, то $\overline{E_{||}^2} = \overline{E_\perp^2}$, т.е. за промежуток времени, короткий по сравнению со временем наблюдения, но длинный по отношению к продолжительности внутриатомных процессов, квадраты компонент вектора напряженности электрического поля, лежащие в плоскости падения и перпендикулярные к ней, в среднем равны между собой.

Для отраженного света, однако,

$$\overline{E_{n||}^2} \neq \overline{E_{r\perp}^2}. \tag{136.1}$$

Поэтому отраженный свет оказывается более или менеее поляризованным. Так как $\overline{E_{r\perp}^2} \geqslant \overline{E_{r||}^2}$, то электрический вектор, перпендикулярный к плоскости падения, имеет бóльшую амплитуду.

За меру степени поляризации естественно принять отношение

$$\Delta = \frac{I_\perp - I_{||}}{I_\perp + I_{||}} \cdot 100\,\%,$$

где $I_\perp$ и $I_{||}$ — интенсивности, соответствующие компонентам $E_\perp$ и $E_{||}$. Величину Δ называют *степенью поляризации*. Множитель 100 введен для того, чтобы выразить Δ в процентах. Таким образом, степень поляризации равна нулю, если $I_\perp = I_{||}$ (свет естественный); поляризация

достигает 100 %, если одна из компонент электрического вектора обращается в нуль. При выбранном определении Δ равенство $\Delta = 100\,\%$ означает полную поляризацию при направлении колебаний электрического вектора, перпендикулярном к плоскости падения; $\Delta = -100\,\%$ означает полную поляризацию с колебаниями электрического вектора в плоскости падения.

Если $\varphi + \psi = \pi/2$, то $I_{r\perp} = 0$, $I_{r\parallel} \neq 0$ и $\Delta = 100\,\%$, т.е. отраженный свет полностью поляризован, причем электрический вектор перпендикулярен к плоскости падения (закон Брюстера). Коэффициенты пропускания $t_\perp$, $t_\parallel$ не обращаются в нуль ни при каком значении угла падения φ, т.е. полная поляризация проходящего света невозможна. Однако всегда $E^2_{d\parallel} \geqslant E^2_{d\perp}$, т.е. $I_{d\parallel} \geqslant I_{d\perp}$ и $\Delta \leqslant 0$. Это означает, что имеет место частичная поляризация, и притом такая, что преимущественное направление колебаний лежит в плоскости падения.

При падении света под углом Брюстера получаем, как легко убедиться (см. упражнение 187),

$$\frac{E_{d\perp}}{E_{d\parallel}} = \frac{2n}{1+n^2}, \quad \frac{I_{d\perp}}{I_{d\parallel}} = \frac{4n^2}{(1+n^2)^2},$$
$$\Delta = \frac{4n^2 - (n^2+1)^2}{4n^2 + (n^2+1)^2} = -\frac{(n^2-1)^2}{4n^2+(n^2+1)^2}. \tag{136.2}$$

При $n = 1{,}5$ (воздух–стекло) имеем приблизительно $\Delta = -8\,\%$, т.е. проходящий свет частично (на 8 %) поляризован. Если свет проходит внутрь плоскопараллельной пластинки, то на второй поверхности вновь происходит преломление под углом Брюстера и степень поляризации прошедшего через пластинку света увеличивается еще приблизительно на 8 %. Если сложить последовательно несколько пластинок (*стопа Столетова*), то поляризация проходящего света будет быстро возрастать при увеличении числа пластинок в стопе и ее можно вычислить при помощи формул Френеля (см. упражнение 189).

Из формул Френеля следует (см. табл. 23.1 на с. 433), что компоненты $E_{r\parallel}$ и $E_{r\perp}$ совпадают по фазе, пока угол падения меньше угла Брюстера ($\varphi + \psi < \pi/2$), и становятся противоположными по фазе, когда $\varphi + \psi > \pi/2$. При угле Брюстера должно иметь место изменение фазы $E_{r\parallel}$ скачком на 180° (рис. 23.3). Кроме того, при падении под углом Брюстера в отраженном свете колебания должны быть перпендикулярны к плоскости падения (ибо $E_{r\parallel} = 0$). Однако наблюдения показали, что сказанное выполняется не вполне строго.

Как показали специальные опыты, закон Брюстера выполняется неточно, а именно, при отражении поляризованного света под углом, близким к углу Брюстера, наблюдается не плоскополяризованный, а *эллиптически-поляризованный* свет. Это значит, что между компонентами $E_{r\parallel}$ и $E_{r\perp}$ имеется некоторая разность фаз, отличная от 0 и 180°, т.е. что изменение фазы $E_{r\parallel}$ при прохождении через угол Брюстера происходит не скачком, а постепенно, хотя и очень быстро. На рис. 23.3 скачкообразное изменение фазы показано штриховой линией; сплошная линия дает фактически наблюдаемое изменение. Указанные результаты можно объяснить существованием переходного слоя

на поверхности раздела двух сред, где ε_1 (а значит, и n_1) переходит в ε_2 (в n_2) быстрым, но непрерывным изменением, а не скачком.

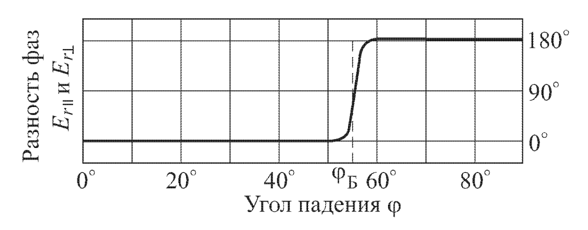


Рис. 23.3. Отступление от формул Френеля вблизи угла Брюстера $\varphi_Б$

Физический смысл закона Брюстера. При выводе формул Френеля и их интерпретации мы пользовались граничными условиями для электромагнитного поля, не прибегая к представлениям о вторичных волнах, испускаемых атомами или молекулами вещества. Привлекая эти рассуждения, мы могли бы внести бо́льшую физическую ясность в наши формулы. Покажем это на примере истолкования физического смысла закона Брюстера.

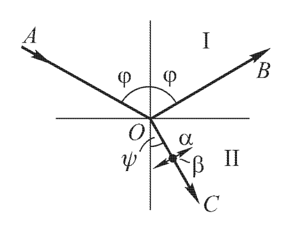


Рис. 23.4. К пояснению физического смысла закона Брюстера

Падающая волна возбуждает в среде II (рис. 23.4) колебания электронов, которые становятся источником вторичных волн; эти волны и дают отраженный свет. Направление колебаний совпадает с направлением электрического вектора световой волны[1]), т.е. для среды II оно перпендикулярно к OC. Мы можем представить себе это колебание как сумму двух колебаний, одно из которых (α) лежит в плоскости AOC, а другое (β) — к ней перпендикулярно. Другими словами, мы изображаем колебание электронов в молекуле как суперпозицию колебаний двух элементарных излучателей, оси которых направлены соответственно по α и β.

Представим себе теперь, что свет падает под углом Брюстера, т.е. $\varphi + \psi = \pi/2$. При этом, очевидно, $OB \perp OC$. Следовательно, $OB \parallel \alpha$. Известно, однако, что колеблющийся электрический заряд не излучает электромагнитных волн вдоль направления своего движения. Поэтому излучатель типа α вдоль OB не излучает. Таким образом, по направлению OB идет свет, посылаемый излучателями типа β, направление колебаний которых перпендикулярно к OB, т.е. перпендикулярно к плоскости чертежа. Другими словами, отраженный свет вполне поляризован, и колебание вектора напряженности электрического поля в нем перпендикулярно к плоскости падения (закон Брюстера).

Если угол падения отличается от угла Брюстера, то вдоль OB может распространяться волна, содержащая наряду с компонентой β

[1]) Ради простоты мы считаем молекулы изотропными.

и компоненту α, доля которой будет тем больше, чем больше угол между направлением α и направлением отраженной волны. Таким образом, отраженный свет будет частично поляризован, и степень поляризации возрастает по мере приближения к углу Брюстера.

Как мы говорили, опыт показывает, что закон Брюстера не соблюдается вполне строго. Может быть, одна из причин отступлений лежит в том, что мы считали молекулы изотропными, а это далеко не всегда имеет место. Впрочем, причины отступления от закона Брюстера до сих пор не вполне выяснены.

Глава XXIV

ПОЛНОЕ ВНУТРЕННЕЕ ОТРАЖЕНИЕ[1]

§ 137. Явление полного внутреннего отражения

Закон преломления, найденный на опыте и вытекающий из теории, гласит, что $\sin\psi = \sin\varphi/n$. Легко видеть, что если $n < 1$, то согласно этому соотношению возможно такое значение угла падения φ, при котором $\sin\psi > 1$, что не имеет смысла, ибо подобная формула не определяет никакого реального угла преломления. Подобный случай имеет место для всех значений угла φ, удовлетворяющих условию $\sin\varphi > n$, что возможно, когда $n < 1$, т.е. когда свет идет из более преломляющей среды в среду менее преломляющую (например, из стекла в воздух). Угол φ, соответствующий условию $\sin\varphi = n$, принято называть *критическим* или *предельным*. Как известно, при этих условиях мы не наблюдаем преломленной волны, а весь свет полностью отражается обратно в первую среду, в соответствии с чем явление носит название *полного внутреннего отражения*.

Поскольку при этом условии угол ψ не имеет смысла, мы не можем интерпретировать для данного случая и формулы Френеля в приведенном выше виде, ибо в них непосредственно входит угол ψ. Мы можем, однако, преобразовать эти формулы, введя в них n. Раскрывая выражения $\sin(\varphi+\psi)$, $\sin(\varphi-\psi)$ и т.д., заменим $\sin\psi$ на $\sin\varphi/n$ и $\cos\psi$ на $\pm\sqrt{1-\sin^2\varphi/n^2}$. Для рассматриваемого случая величина $\sin\varphi/n > 1$, а значит, и $\sin^2\varphi/n^2 > 1$, т.е. $\cos\psi$ становится мнимым:

$$\cos\psi = \pm i\sqrt{\frac{\sin^2\varphi}{n^2} - 1}. \tag{137.1}$$

Как показывает анализ, знаку плюс соответствует бесконечное возрастание амплитуды по мере удаления от отражающей поверхности во вторую среду, что физически невозможно; поэтому в дальней-

[1] Изложение в настоящей главе приводится без доказательств большинства положений, ибо относящийся сюда материал выходит за рамки общего курса. Цель изложения — дать лишь общее представление о рассматриваемых вопросах.

шем сохраним

$$\cos\psi = -i\sqrt{\frac{\sin^2\varphi}{n^2} - 1}. \qquad (137.2)$$

Выполняя соответственные вычисления, мы получим E_r и E_d выраженными через E_i, φ и n, но при этом найденные выражения будут не действительными, а комплексными. Комплексное выражение для амплитуд отраженной и преломленной волн имеет весьма простой смысл: аргумент комплексной амплитуды определяет сдвиг фазы колебания (см. упражнение 193 и § 4). Таким образом, появление комплексных величин в выражениях для амплитуд отраженной и преломленной волн означает, что эти волны отличаются от падающей волны не только по амплитудам, но и по фазам. Рассмотрим отраженную и преломленную волны отдельно.

§ 138. Исследование отраженной волны. Эллиптическая поляризация

Исследование получающихся для отраженной волны соотношений приводит к следующим выводам.

а. $|E_{r\perp}|^2 = |E_{i\perp}|^2$ и $|E_{i\|}|^2 = |E_{r\|}|^2$ (см. упражнение 196), а следовательно, $|E_{i\perp}|^2 + |E_{i\|}|^2 = |E_{r\perp}|^2 + |E_{r\|}|^2$, т.е. интенсивность [1]) отраженного света равна интенсивности падающего. Так как согласно закону отражения сечения падающего и отраженного пучков равны между собой, то найденное соотношение означает, что вся падающая энергия *сполна* отражается. Явление получило поэтому, как сказано выше, название *полного внутреннего отражения*. Оно легко наблюдается и демонстрируется множеством способов. Примером может служить часто применяемая в многочисленных оптических установках призма полного внутреннего отражения (рис. 24.1 *а*), поворачивающая лучи под прямым углом, или оборотная призма (рис. 24.1 *б*), перевертывающая изображение.

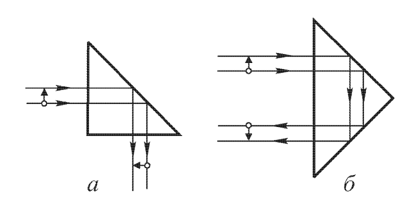


Рис. 24.1. Призмы полного внутреннего отражения: *а* — поворачивающая призма, *б* — оборотная призма

Явлением полного внутреннего отражения объясняется эффектный демонстрационный опыт, изображенный на рис. 24.2. Свет падает горизонтальным параллельным пучком вдоль струи воды, свободно вытекающей из отверстия в боковой стенке сосуда. Благодаря явлению полного внутреннего отражения свет не может выйти через боковую поверхность и следует вдоль струи, которая уподобляется, таким образом, изогнутому светопроводу. Фактически вследствие рассеяния на случайных пылинках и пу-

[1]) При комплексной записи полей интенсивность пропорциональна квадрату модуля амплитуды (см. § 4).

зырьках часть света проходит через боковые стенки, и поэтому струя видна в затемненной аудитории. Свечение струи становится еще более заметным, если вместо воды вытекает флуоресцирующий раствор (свет флуоресценции распространяется по всем направлениями, не испытывая полного внутреннего отражения для углов падения, меньших предельного, частично выходит из струи).

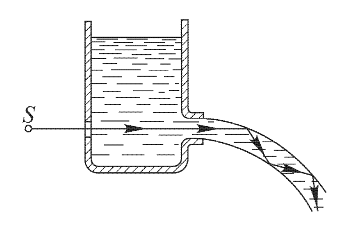


Рис. 24.2. Явление полного отражения в струе жидкости

На явлении полного внутреннего отражения основано устройство прибора, позволяющего быстро и просто определять показатель преломления (рефрактометр Аббе–Пульфриха), схема которого показана на рис. 24.3. Полное внутреннее отражение происходит на границе между стеклом (с известным и по возможности высоким показателем преломления) и тонким слоем жидкости, наносимым на поверхность стекла. На шкале прибора,

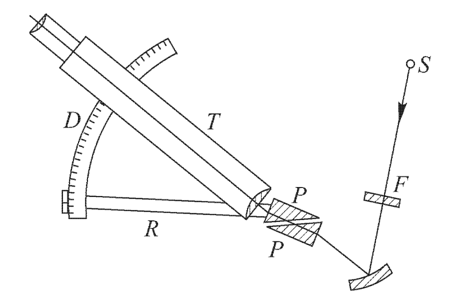


Рис. 24.3. Схема рефрактометра Аббе: PP — призмы из стекла с большим показателем преломления, между которыми помещают каплю исследуемой жидкости; пучок света от источника S проходит через светофильтр F и испытывает полное внутреннее отражение на границе капля–призма; призма вместе с рычагом R поворачивается около трубы T; положение трубы по отношению к призме отсчитывается по дуге D, проградуированной в значениях показателя преломления

определяющей положение трубы по отношению к призме при визировании светлой границы (указывающей начало полного внутреннего отражения), обычно наносят непосредственно значения показателя преломления. Такой рефрактометр обеспечивает определение показателя преломления с погрешностью, не превышающей 0,1 %.

б. Компоненты $E_{r\perp}$ и $E_{r\parallel}$ испытывают изменения фазы по отношению к $E_{i\perp}$ и $E_{i\parallel}$, обозначаемые соответственно через $\delta_\perp$ и $\delta_\parallel$, причем $\delta_\perp$ отлично от $\delta_\parallel$, так что

$$\operatorname{tg}\frac{\delta_\parallel - \delta_\perp}{2} = \frac{\cos\varphi\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}}{\sin^2\varphi} \tag{138.1}$$

(см. упражнение 197).

Таким образом, если в падающей волне $E_{i\perp}$ и $E_{i\|}$ находятся в одной фазе, то в отраженном свете между взаимно перпендикулярными компонентами $E_{r\perp}$ и $E_{r\|}$ появится сдвиг фазы, зависящий от φ и n. Следовательно, явление полного внутреннего отражения позволяет получить *эллиптически-поляризованный* свет, как и пропускание света через кристаллическую пластинку. Разумеется, для осуществления эллиптической поляризации при полном внутреннем отражении надо, чтобы падающий пучок не был естественным, но обладал поляризацией, например, линейной (см. § 109).

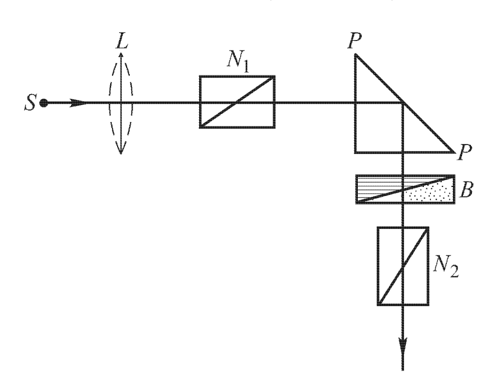


Рис. 24.4. Наблюдение эллиптической поляризации света при явлении полного внутреннего отражения: S — источник света; L — линза, обеспечивающая параллельность падающего на систему пучка; N_1 — поляризатор; P — призма полного внутреннего отражения; B — компенсатор Бабине; N_2 — анализатор

Из формулы (138.1) следует, что если $\sin\varphi = n$, т.е. если параллельный пучок испытывает полное внутреннее отражение точно при предельном угле, то

$$\operatorname{tg}\frac{\delta_{\|} - \delta_{\perp}}{2} = 0,$$

т.е. сдвиг фаз равен нулю, и плоскополяризованный свет остается плоскополяризованным, не переходя в эллиптически-поляризованный.

Эллиптическую поляризацию, возникающую при полном внутреннем отражении плоскополяризованной волны, можно исследовать обычными методами. Рисунок 24.4 иллюстрирует схему подобного опыта. Плоскость поляризатора N_1 должна, конечно, составлять некоторый угол с плоскостью падения на грань PP.

Для стекла ($n = 1{,}5$) можно подобрать такие значения φ, чтобы сдвиг фазы был равен 45°, а именно, при $\varphi = 48°37'$ или $\varphi = 54°37'$ имеем

$$\delta_{\|} - \delta_{\perp} = 45°.$$

Двукратное полное внутреннее отражение под указанным углом в стекле дает изменение фазы на $\pi/2$, т.е. действует как пластинка в четверть волны.

Френель изготовил параллелепипед из стекла с подходящим показателем преломления, действующий указанным образом (рис. 24.5).

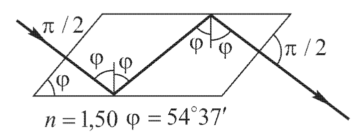


Рис. 24.5. Параллелепипед Френеля

Если $E_{i\|} = E_{i\perp}$, то при полном внутреннем отражении $|E_{r\perp}| = |E_{r\|}|$, и так как $\delta_{\|} - \delta_{\perp} = \pi/2$, то свет получится поляризованным по кругу. Лег-

ко видеть, что для этой цели надо на параллелепипед Френеля направить плоскополяризованный свет так, чтобы плоскость поляризации составила угол 45° с плоскостью падения.

Пластинка в четверть волны, осуществленная в виде параллелепипеда Френеля, конечно, менее удобна в обращении, чем соответствующие кристаллические пластинки. Она может, однако, иметь преимущество в том отношении, что сообщаемая ею разность фаз меньше зависит от длины волны, чем в случае обычных пластинок в четверть волны из слюды. Для этого нужно только в качестве материала выбрать стекло с малой дисперсией (легкий крон), где n мало зависит от λ.

§ 139. Исследование преломленной волны

Для преломленной волны дело обстоит значительно сложнее. Как мы видели, закон преломления не дает в данном случае ответа на вопрос о направлении распространения преломленной волны, и поэтому нельзя говорить о преломленной волне в обычном смысле слова. Однако электрическое и магнитное поля волны не обрываются на границе раздела, а существуют и во второй среде.

Исследование этих полей показывает, что по мере углубления во вторую среду они быстро убывают по экспоненциальному закону, и на глубине, сравнимой с длиной волны, амплитуды полей уменьшаются в несколько раз. Такое их ослабление происходит *не вследствие* поглощения света, ибо мы предполагаем обе среды вполне прозрачными, в соответствии с чем вся падающая энергия *полностью* отражается, возвращаясь в первую среду,

Подробное теоретическое исследование этого вопроса, выполненное А.А. Эйхенвальдом на основе электромагнитной теории света, дало ясную картину движения энергии при явлении полного внутреннего отражения.

Как показали эти исследования, движение энергии на границе двух сред происходит таким образом, что в среднем поток энергии, проникающий из первой среды во вторую, равен обратному потоку, причем места входа и выхода прямого и обратного потоков несколько смещены друг относительно друга вдоль границы раздела. В результате имеется движение энергии вдоль границы раздела с выходом обратно в первую среду [1]). Во второй среде сколько-нибудь заметное поле захватывает лишь тонкий слой с толщиной, сравнимой с длиной световой волны и зависящей от угла падения φ и показателя преломления n.

---

[1]) В данном случае фронт волны во второй среде перпендикулярен к поверхности раздела двух сред, так что направление распространения фазы волны параллельно этой поверхности. Вектор же Пойнтинга–Умова, вдоль которого движется энергия, последовательно изменяет свое направление, входя во вторую среду и вновь выходя из нее. Поэтому напряженности **E** и **H**, перпендикулярные к этому вектору, не всюду строго перпендикулярны к направлению распространения волны, т.е. волна во второй среде не поперечна (ср. сноску на с. 338).

Процесс захода волны во вторую среду можно наблюдать экспериментально. Толщина такого «освещенного» слоя тем больше, чем больше длина волны, и поэтому изучение его легче удается с длинными электромагнитными волнами. Так, Шеффер и Гросс, применяя электромагнитные волны с $\lambda = 15$ см, наблюдали их полное внутреннее отражение при помощи парафиновой призмы. Они могли убедиться в существовании волнового поля и во второй среде (воздух), помещая воспринимающий прибор (детектор) достаточно близко к поверхности парафина. Квинке осуществил опыт со световыми волнами, основанный на описанном явлении, пользуясь следующим приемом. Так как световое поле во второй среде может достигать заметных размеров на расстояниях, меньших длины световой волны, то, делая прослойку этой второй среды (воздух) тоньше λ, мы заставим световое поле проникнуть при значительных еще амплитудах во второй слой стекла, где оно будет распространяться дальше по обычным законам и может быть исследовано, как обычно.

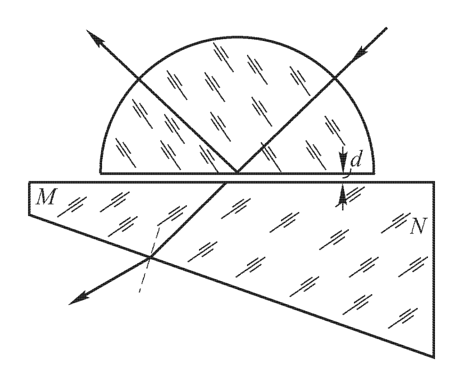


Рис. 24.6. Проникновение волны во вторую среду. Схема опыта Квинке

Схема расположения опыта Квинке дана на рис. 24.6. Чем меньше зазор d, тем больше света проникает во вторую стеклянную пластинку MN и из нее выходит наружу. Меняя толщину d, можно варьировать количество проходящего через всю систему света, т.е. модулировать его интенсивность. На этом принципе построен один из световых модуляторов. Изменение толщины зазора d делается под действием звуковых волн (речь). Таким образом, модуляция интенсивности света происходит в темпе этих звуковых волн. Воспринимая модулированный свет на фотоэлемент, мы получаем переменный электрический ток, который можно усилить и использовать для воспроизведения звука (световой телефон).

Другой, более простой и интересный метод исследования волны во второй среде был предложен Л.И. Мандельштамом и Зелени. Явление наблюдается на границе между стеклом и жидкостью, в которой растворено некоторое количество флуоресцирующего вещества. Волна, заходящая во вторую среду, в тонком слое (меньше λ) будет иметь еще значительную интенсивность и вызовет в нем заметную

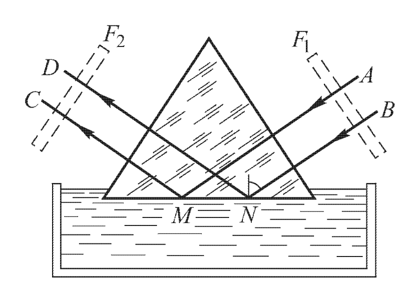


Рис. 24.7. Проникновение волны во вторую среду. Схема опыта Мандельштама–Зелени. F_1, F_2 — скрещенные светофильтры

флуоресценцию. Наблюдение флуоресцирующего слоя и является методом исследования интересующего нас явления.

Схема опыта ясна из рис. 24.7. Пучок параллельных лучей падает на границу раздела стекло–флуоресцеин под углом, бо́льшим предельного, и испытывает полное внутреннее отражение. Весь отраженный свет концентрируется в направлении MC, ND. Однако зеленоватый свет флуоресценции в слое жидкости, прилегающем к участку призмы MN, виден и по иным направлениям, что служит доказательством флуоресценции тонкого слоя жидкости под действием зашедшей туда волны. Явление выступает еще отчетливее, если использовать два «скрещенных» фильтра F_1 и F_2, выбранных так, что через их последовательность свет от источника не проходит. Но свет, прошедший через F_1, способен вызвать флуоресценцию с другим спектральным составом, чем возбудивший ее свет (закон Стокса, см. § 216). Этот измененный свет пропускается вторым фильтром F_2. Таким образом, скрещенные фильтры задерживают полностью свет от источника, но свет флуоресценции, возбужденный волной, зашедшей во вторую среду, явственно виден.

Глава XXV

ОСНОВЫ МЕТАЛЛООПТИКИ

§ 140. Характеристика оптических свойств металла

Особенности отражения света от металлической поверхности обусловлены наличием в металлах большого числа электронов, настолько слабо связанных с атомами металла, что для многих явлений эти электроны можно считать *свободными*. Вторичные волны, вызванные вынужденными колебаниями свободных электронов, порождают сильную отраженную волну, интенсивность которой может достигать 95 % (и даже больше) интенсивности падающей, и сравнительно слабую волну, идущую внутрь металла. Так как плотность свободных электронов весьма значительна (порядка 10^{22} в 1 см^3), то даже очень тонкие слои металла отражают бо́льшую часть падающего на них света и являются, как правило, практически непрозрачными. Та часть световой энергии, которая проникает внутрь металла, испытывает в нем поглощение. Свободные электроны, приходя в колебание под действием световой волны, взаимодействуют с ионами металла, в результате чего энергия, заимствованная от электромагнитной волны, превращается в тепло.

Таким образом, электромагнитная волна быстро затухает внутри металла, и обычно лишь очень тонкие слои металла играют роль во всем описанном процессе.

Какая доля света не пропускается металлом вследствие отражения и какая задерживается в нем благодаря поглощению, зависит от его проводимости. В идеальном проводнике, где потери на джоулево тепло вообще отсутствуют, поглощение равно нулю, так что падающий свет полностью отражается. Очень чистые серебряные пленки, при-

меняемые в интерферометрах Фабри–Перо, приближаются к этому идеалу. Удавалось изготовить пленки, у которых отражение достигало 98–99 %, а поглощение составляло около 0,5 %. Особенно высока отражательная способность (до 99,8 %) такого хорошо проводящего металла, как натрий, и поглощение в нем соответственно незначительно. В металлах, хуже проводящих, например в железе, отражение может составлять всего лишь 30–40 %, так что непрозрачная пленка железа толщиной не более доли микрона поглощает около 60 % падающего на нее света.

Таким образом, характерная особенность металла, состоящая в его высокой отражательной способности и проявляющаяся в наличии особого «металлического» блеска чистой (не покрытой окислами) поверхности металлов, связана с электропроводностью металла. Чем больше коэффициент электропроводности, тем, вообще говоря, выше отражательная способность металлов.

При сравнительно небольших частотах (инфракрасные лучи) оптические свойства металла обусловливаются главным образом поведением свободных электронов. Но при переходе к видимому и ультрафиолетовому свету начинают играть заметную роль связанные электроны, характеризующиеся собственной частотой, лежащей в области более коротких длин волн. Участие этих электронов обусловливает, так сказать, неметаллические оптические свойства металла. Так, например, серебро, которое в видимой области характеризуется очень большим коэффициентом отражения (свыше 95 %) и заметным поглощением, т.е. типичными оптическими особенностями металла, в области ультрафиолета обладает резко выраженной областью плохого отражения и большой прозрачности; вблизи $\lambda = 316$ нм отражательная способность серебра падает до 4,2 %, т.е. соответствует отражению от стекла. Ниже приведены коэффициенты отражения серебра (в процентах) для разных длин волн при нормальном падении:

λ, в нм	251	288	305	316	326	338	
r^2, в %	34	21,2	9,1	4,2	14,6	55,5	
λ, в нм	357	385	420	450	500	700	1000
r^2, в %	74,4	81,4	86,6	90,5	91,3	96,0	97,5

В соответствии с этими данными серебро в тонких слоях представляется на просвет фиолетовым. Точно так же тонкие слои щелочных металлов, совершенно непрозрачные для видимого света, прозрачны для ультрафиолета (заметная прозрачность начинается у цезия при $\lambda = 440$ нм, у рубидия при $\lambda = 360$ нм, у калия при $\lambda = 315$ нм, у натрия при $\lambda = 210$ нм, у лития при $\lambda = 205$ нм). Вуду удалось даже обнаружить у этих металлов в ультрафиолетовой области угол Брюстера и вызывать при отражении от металла поляризацию естественного света.

Полная теория прохождения света через металлы и отражения от них должна учитывать указанные особенности. Это тем более трудно, что электронная теория металлов требует применения квантовой механики.

§ 141. Оптические постоянные металлов и их определение

При упрощенной трактовке вопроса, основанной на электромагнитной теории Максвелла, задача сводится к учету проводимости металла, т.е. формально к введению в уравнения Максвелла членов, зависящих от коэффициента электропроводности σ. Для световой волны, распространяющейся внутри металла, мы получаем в таком случае выражение, означающее, что амплитуда волны уменьшается по мере проникновения в глубь металла. Другими словами, из наших формул в согласии с данными опыта следует, что в металле происходит *поглощение* света.

В слое малой толщины (dz) поглощается определенная часть падающего света, пропорциональная толщине слоя, т.е. $dI = -\alpha I\,dz$. В соответствии с этим интенсивность света убывает по мере проникновения в глубь металла по закону $I = I_0 \exp(-\alpha z)$, где α — коэффициент поглощения, показывающий, что на глубине $z = 1/\alpha$ интенсивность света падает в e раз. Теоретические формулы принимают более простой вид, если ввести вместо коэффициента поглощения α величину $\varkappa$, связанную с α соотношением $\varkappa = \alpha\lambda/4\pi$, где λ — длина волны света в веществе. Если показатель преломления нашего вещества есть n, то длина волны в вакууме $\lambda_0 = n\lambda$, так что

$$\alpha = \frac{4\pi}{\lambda_0}\,n\varkappa, \quad \text{т.е.} \quad I = I_0 \exp\left(-\frac{4\pi}{\lambda_0}\,n\varkappa z\right).$$

Если $n\varkappa$ равно единице, то в слое толщиной в одну длину волны ($z = \lambda_0$) интенсивность света уменьшается в $e^{4\pi}$, т.е. приблизительно в 10^5 раз. Планк предложил считать поглощение «металлическим», если $n\varkappa > 1$. Действительно, при измерениях в видимой области спектра для большинства металлов значение $n\varkappa$ лежит между 1,5 и 5. При переходе в более длинноволновую область значения $n\varkappa$ еще больше возрастают; так, для серебра при $\lambda = 6$ мкм $n\varkappa$ достигает значения 40 и при увеличении λ растет еще более.

Так как интенсивность света пропорциональна *квадрату* амплитуды световой волны, то в результате поглощения амплитуда изменяется по закону

$$A = A_0 \exp\left(-\frac{\alpha z}{2}\right) = A_0 \exp\left(-\frac{2\pi}{\lambda_0}\,n\varkappa z\right),$$

и, следовательно, световая волна в металле имеет вид

$$s = A\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}\,z\right) = A_0 \exp\left(-\frac{2\pi}{\lambda_0}\,n\varkappa z\right)\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0}\,nz\right).$$

Введение комплексной записи колебания после простого преобразования дает

$$s = A_0 \exp\left(-\frac{2\pi}{\lambda_0}\,n\varkappa z\right)\operatorname{Re}\left\{\exp\left[i\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0}\,nz\right)\right]\right\} = \\ = A_0 \operatorname{Re}\exp\left\{i\left[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0}\,n(1 - i\varkappa)z\right]\right\}. \quad (141.1)$$

Таким образом, при использовании комплексной формы волну в металле можно записать в обычном виде, но вместо обычного показателя преломления n в формулу входит *комплексный* показатель преломления $n' = n(1 - i\varkappa)$, причем мнимая часть его $(n\varkappa)$ определяет поглощение волны.

Два параметра n и $\varkappa$ являются константами, характеризующими оптические свойства металла. Выводя волновое уравнение из уравнений Максвелла для металла, мы получим соотношения между оптическими постоянными металла и его электрическими характеристиками ε и σ:

$$n^2(1 - \varkappa^2) = \varepsilon, \quad n^2\varkappa = \frac{\sigma}{\nu}, \tag{141.2}$$

где ν — частота света, ε — диэлектрическая проницаемость, σ — электропроводность. Для металлов измерение электропроводности σ выполняется просто лишь для постоянного поля или для полей не очень большой частоты. Непосредственные же измерения ε вообще невозможны.

Поэтому *вычисление* оптических постоянных n и $\varkappa$ для обычного или ультрафиолетового света (высокая частота) на основании этих формул выполнить нельзя. Однако оказывается возможным экспериментальное определение n и $\varkappa$ и притом двумя способами. Первый способ принадлежит Кундту (1888 г.), который непосредственно промерил эти постоянные для некоторых металлов, приготовляя из них очень тонкие призмочки с малым преломляющим углом, дающие возможность определить n и $\varkappa$. Второй, более совершенный и более общий способ был указан Друде (1889 г.). Он основан на изучении свойств света, отраженного от металлов. Как указано выше, оптические особенности металла по сравнению с диэлектриком учитываются тем, что вместо обычного показателя преломления n вводится комплексный показатель преломления $n' = n(1 - i\varkappa)$. В соответствии с этим в формулах Френеля для металла амплитуды отраженной (и преломленной) волны становятся комплексными, т.е. возникает разность фаз между компонентами отраженной (и преломленной) и падающей волн. Это различие в фазах не одинаково для компонент электрического вектора, лежащих в плоскости падения и перпендикулярно к ней. Поэтому между двумя взаимно перпендикулярными компонентами в отраженном (и преломленном) свете $E_{r\parallel}$ и $E_{r\perp}$ возникает разность фаз, и, следовательно, если на поверхность металла падает плоскополяризованный свет, то отраженный свет будет *эллиптически-поляризованным*. Характер поляризации (эксцентриситет и положение эллипса) зависит от оптических свойств металла (n и $\varkappa$).

Теория Друде связывает эти величины с экспериментально находимыми данными об эллиптической поляризации и позволяет таким образом определять оптические постоянные металла. В тех случаях, когда возможно было сопоставление результатов, полученных по методу Друде, с данными Кундта, наблюдалось удовлетворительное согласие.

Для простого случая нормального падения на металл нетрудно вычислить как разность фаз между E_r и E_i, так и коэффициент от-

ражения. Для этого в выражении $r_\perp = r_\parallel = -(n-1)/(n+1)$ надо заменить n на $n' = n(1 - i\varkappa)$, т.е.

$$-r_\perp = -r_\parallel = \frac{n(1-i\varkappa)-1}{n(1-i\varkappa)+1} = \frac{(n-1)-i\varkappa n}{(n+1)-i\varkappa n} = |r|\exp(i\delta_r), \qquad (141.3)$$

откуда (см. упражнение 198)

$$\operatorname{tg}\delta_r = \frac{2(n\varkappa)}{1-n^2-(n\varkappa)^2}\,.$$

Для отыскания коэффициента отражения по интенсивности $|r|^2$ надо умножить выражение (141.3) на сопряженную ему величину $|r|\exp(-i\delta_r)$ (см. упражнение 193 б), и в итоге найдем

$$|r|^2 = \frac{(n-1)^2+\varkappa^2 n^2}{(n+1)^2+\varkappa^2 n^2}\,. \qquad (141.4)$$

Согласно (141.4) измерение коэффициента отражения по интенсивности металла также можно использовать для определения оптических постоянных металла.

Приведенная табл. 25.1, дающая значения $n\varkappa$, n и $|r|^2$ для ряда металлов при $\lambda = 589{,}3$ нм, позволяет проверить, в какой степени выполняется соотношение (141.4).

Таблица 25.1

Оптические постоянные некоторых металлов для $\lambda = 589{,}3$ нм

Металл	$n\varkappa$	n	$\lvert r\rvert^2$, %
Натрий	2,61	0,05	99,8
Серебро	3,64	0,18	95,0
Магний	4,42	0,37	92,9
Золото	2,82	0,37	85,1
Золото электролитическое	2,83	0,47	81,5
Ртуть	4,41	1,62	73,3
Медь цельная	2,62	0,64	70,1
Никель цельный	3,32	1,79	62,0
Никель электролитический	3,48	2,01	62,1
Никель распыленный	1,97	1,30	43,3
Железо распыленное	1,63	1,51	32,6

Непосредственное сопоставление данных этой таблицы с обычными значениями электропроводности (см. (141.2)) не дает удовлетворительного результата, что, впрочем, не является неожиданным. Формулы (141.2) исходят из представления о металле как о системе, электроны которой могут считаться свободными (электроны проводимости); оптические же явления, относящиеся к области сравнительно высоких частот (видимый и ультрафиолетовый свет), зависят заметным образом от влияния связанных электронов (электронов поляризуемости), как об этом несколько подробнее будет сказано в главе о

дисперсии. Действительно, взяв для меди, например, статическое значение электропроводности $\sigma = 5{,}14 \cdot 10^{17}$ с$^{-1}$, найдем для желтого света, т.е. для $\nu = 5 \cdot 10^{14}$ с$^{-1}$, что $\sigma/\nu = 1000$, тогда как $n^2\varkappa = 1{,}67$. Точно так же произведение $n^2\varkappa$ для ртути значительно больше, чем для натрия, тогда как обычная электропроводность натрия несравненно больше, чем для ртути. Однако проверка указанных соотношений возможна, если определять n и $\varkappa$ для более низких частот (инфракрасных), где и для оптических свойств металлов главную роль играют свободные электроны. Так, например, для $\lambda = 12$ мкм требуемая теорией связь между оптическими константами и коэффициентом электропроводности металла хорошо оправдывается на опыте.

Современная квантовая теория явлений металлооптики приводит к более сложным соотношениям, которые хорошо согласуются с опытными данными.

ОПТИКА АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

Глава XXVI

ОСНОВЫ КРИСТАЛЛООПТИКИ

§ 142. Анизотропные среды

Мы уже ознакомились с важнейшими фактами, характеризующими распространение света в кристаллах. Основное отличие кристаллической среды от сред, подобных стеклу или воде, состоит в явлении двойного лучепреломления, обусловленном, как мы видели, различием скорости распространения света в кристалле для двух световых волн, поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях. С этой особенностью связано и различие в скорости распространения света по разным направлениям в кристалле, т.е. *оптическая анизотропия* кристаллической среды. Обычно, если среда анизотропна по отношению к одному какому-либо ее свойству, то она анизотропна и по другим свойствам. Однако можно указать случаи, когда среда может рассматриваться как изотропная в одном классе явлений и оказывается анизотропной в другом. Так, кристалл каменной соли обнаруживает изотропию оптических свойств, но механические свойства его вдоль ребра и диагонали различны.

Анизотропия реальной среды обусловлена особенностями составляющих ее атомов или молекул, которые сами по себе могут представлять анизотропные системы, т.е. их свойства могут зависеть от направления внутри атома или молекулы. При этом, однако, надо помнить, что свойства изолированного атома еще далеко не определяют свойств среды. Во-первых, надо иметь в виду, что, соединяясь в некоторое целое, например образуя кристалл, атомы (или молекулы) могут превратиться в соответствующие ионы (или молекулярные группы), которые и располагаются в узлах кристаллической решетки. Так, исследование при помощи дифракции рентгеновских лучей с несомненностью показало, что кристаллы щелочно-галоидных солей, например каменная соль NaCl или сильвин KCl, представляют собой кубическую решетку, в узлах которой помещаются *ионы* галоида Cl^- и *ионы* щелочного металла Na^+ (или K^+), причем их свойства сильно отличаются от свойств нейтральных атомов. Кроме того, каждая такая частица (атом, ион и т.д.) находится в поле окружающих ее частиц, которое зависит от расположения последних и может быть различно по разным направлениям. Поэтому свойства кристалла могут существенно зависеть от его структуры. Так, углекислый кальций $CaCO_3$ известен в виде двух различных кристаллических форм — ис-

ландского шпата и арагонита, — отличающихся взаимным расположением своих элементов и в связи с этим обладающих различными свойствами. Исландский шпат обладает плотностью 2,72 и представляет собой в оптическом смысле одноосный кристалл, тогда как арагонит имеет плотность 2,93 и является оптически двуосным кристаллом.

Анизотропия среды может обусловливаться как анизотропией составляющих ее частиц, так и характером их взаимного расположения. При этом изотропная среда может быть построена из анизотропных частиц, а анизотропная среда — из частиц изотропных; равным образом возможны и иные комбинации. Так, нетрудно видеть, что, например, молекула водорода H_2 анизотропна, т.е. свойства ее вдоль линии, соединяющей оба атома водорода, отличны от свойств в направлении, перпендикулярном к осевой линии: поляризуемость молекулы, т.е. смещение электрона под влиянием заданной электрической силы, вдоль оси иная, чем перпендикулярно к ней. Тем не менее, водородный газ не обнаруживает анизотропных свойств: вследствие беспорядочности ориентаций водородных молекул усредненные свойства газа оказываются идентичными по всем направлениям. Если же подобные анизотропные молекулы ориентируются определенным образом, то и вещество в целом обнаруживает анизотропию.

Подобная ориентация нередко наблюдается в веществе под действием междумолекулярных сил (кристаллы); иногда же она может возникать под влиянием внешних воздействий (искусственная анизотропия). Конечно, возможно также сохранение изотропных свойств и у кристаллических тел, т.е. при некотором регулярном расположении атомных групп. Так, например, кристаллы каменной соли или сильвина, представляющие собой, как уже упоминалось, кубическую решетку, построенную из ионов Na^+ (или K^+) и Cl^-, являются в первом приближении оптически изотропной средой [1]). Причина состоит в том, что ионы, из которых построена решетка, сами по себе обладают изотропными свойствами, а благодаря их симметричному расположению в узлах кубической решетки воздействие окружающих частиц также оказывается не зависящим от направления. Если деформировать кристалл каменной соли или сильвина, например сжимая его в одном направлении, то нарушается симметрия в расположении ионов и кристаллы становятся двоякопреломляющими.

Замечательно, что каменная соль и сильвин дают двойное лучепреломление противоположных знаков. Учет связанного с деформацией кристалла изменения междумолекулярных сил позволяет качественно объяснить это различие; однако для количественного истолкования наблюдающихся явлений приходится допустить в данном случае возникновение некоторой анизотропии и в *самих ионах* под действием внешнего сжатия.

С другой стороны, известно много случаев, когда анизотропию кристалла можно полностью объяснить различием по разным направлениям междумолекулярных сил, обусловленных анизотропным рас-

[1]) Мы здесь не принимаем во внимание так называемые эффекты пространственной дисперсии. О них см. ниже § 149.

положением ионов в кристаллической решетке, причем сами ионы могут считаться вполне изотропными. Так, было показано, что значительная часть двойного преломления тетраэдрических кристаллов зависит от их структуры, а не от анизотропии входящих в их состав атомов.

Оптически анизотропия среды характеризуется различной по разным направлениям способностью среды реагировать на действие падающего света. Реакция эта состоит в смещении электрических зарядов под действием поля световой волны. Для оптически анизотропных сред величина смещения в поле данной напряженности зависит от направления, т.е. диэлектрическая проницаемость, а следовательно, и показатель преломления среды различны для разных направлений электрического вектора световой волны. Другими словами, показатель преломления, а следовательно, и скорость света зависят от направления распространения световой волны и плоскости ее поляризации. Поэтому для анизотропной среды волновая поверхность, т.е. поверхность, до которой распространяется за время t световое возбуждение, исходящее из точки L, отлична от сферической, характерной для изотропной среды, где скорость распространения v не зависит от направления.

В связи с этим отметим одно крайне важное обстоятельство. Волновой фронт характеризуется в каждой точке плоскостью, касательной к поверхности волны, а направление распространения волны — нормалью к этой поверхности. В случае изотропной среды, когда волновая поверхность имеет форму сферы, нормаль к волне совпадает с лучом, т.е. линией, вдоль которой распространяется световое возбуждение и которая представлена радиусом-вектором, проведенным из точки L к соответствующей точке P волновой поверхности Σ (рис. 26.1). Но для анизотропной среды волновая поверхность отлична от сферической (рис. 26.2), и направление распространения

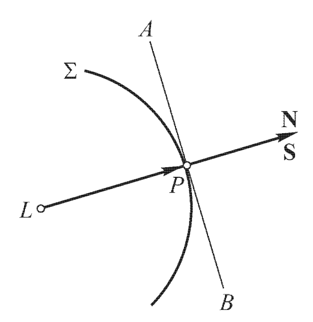


Рис. 26.1. Луч S и нормаль N волны в изотропной среде совпадают

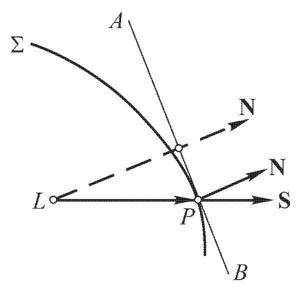


Рис. 26.2. Луч S и нормаль N волны в анизотропной среде

поверхности постоянной фазы (нормаль $\mathbf{N}$ к волновой поверхности Σ) не совпадает с лучом $\mathbf{S}$, указывающим направление распространения энергии (радиус-вектор LP).

Таким образом, для анизотропной среды надо различать направление распространения фазы (нормаль **N**) и направление распространения энергии (луч **S**).

Полное решение задачи о распространении волны в кристаллической решетке можно получить, как указывалось в § 135, путем учета интерференции вторичных волн, посылаемых центрами, составляющими решетку. Но вместо решения этой задачи проще ограничиться формальным приемом максвелловой теории, разрешая уравнения Максвелла с учетом тех особенностей для диэлектрической проницаемости ε и, следовательно, показателя преломления ($n^2 = \varepsilon$) среды, которые накладываются ее кристаллической структурой. Вследствие анизотропии диэлектрической проницаемости связь между векторами электрической напряженности **E** и электрической индукции **D** оказывается более сложной, чем для изотропных сред. Для изотропного тела связь эта дается соотношением $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, где ε — постоянная, не зависящая от направления скалярная величина [1]). Поэтому вектор **D** совпадает по направлению с вектором **E**. В случае анизотропной среды это, вообще говоря, не имеет места.

Общие закономерности, касающиеся диэлектрической проницаемости анизотропной среды, сводятся к возможности представить всю совокупность ее значений при помощи трехосного эллипсоида с главными осями α, β, γ. Величины диэлектрической проницаемости для любого направления выражаются длиной радиус-вектора нашего эллипсоида, проведенного из его центра по выделенному направлению [2]). Три значения диэлектрической проницаемости α, β, γ, соответствующие осям нашего эллипсоида, выделяют три взаимно перпендикулярных *главных направления* в кристалле, характеризующиеся тем, что для них направления векторов электрической индукции **D** и электрической напряженности **E** совпадают. Выберем эти главные направления в качестве осей координат x, y, z; соответствующие значения диэлектрической проницаемости удобно обозначить через ε_x, ε_y, ε_z вместо написанных выше α, β, γ. Мы будем называть их *главными* значениями диэлектрической проницаемости. Обозначая соответствующие компоненты векторов **D** и **E** через D_x, D_y, D_z и E_x, E_y, E_z, мы можем изобразить упомянутое выше свойство главных направлений (совпадение направлений векторов **E** и **D**) в виде соотношений

$$D_x = \varepsilon_x E_x, \quad D_y = \varepsilon_y E_y, \quad D_z = \varepsilon_z E_z.$$

Так как ε_x, ε_y и ε_z не равны между собой, то для всех направлений в кристалле, кроме главных, **D** и **E** не совпадают между собой по на-

---

[1]) Величина ε может зависеть от частоты электрического поля. Мы будем пока рассматривать лишь монохроматический свет, отложив изучение зависимости ε от частоты до гл. XXVIII.

[2]) Величины этого рода, совокупность значений которых можно представить в виде эллипсоида, носят название *тензоров второго ранга*. Таким образом, оптическая анизотропия среды характеризуется тензором диэлектрической проницаемости или эллипсоидом диэлектрической проницаемости.

правлению [1]). Действительно, если по некоторому направлению действует электрическое поле напряженности **E**, то соответствующее значение индукции можно получить следующим образом. Разложим поле **E** на компоненты E_x, E_y, E_z вдоль главных осей. Каждая из этих компонент обусловит вдоль осей слагающие индукции $D_x = \varepsilon_x E_x$, $D_y = \varepsilon_y E_y$, $D_z = \varepsilon_z E_z$. Результирующий вектор **D** получится простым построением. Рисунок 26.3 показывает, что **E** и **D** не совпадают по направлению, если ε_x, ε_y и ε_z не равны между собой. Наоборот, если $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon$, то направления **E** и **D** всегда совпадают между собой и для любого направления $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, т.е. среда изотропна. Ось наименьшей диэлектрической проницаемости принято называть осью x, ось наибольшей — осью z, а ось промежуточной — осью y. Таким образом, оси координат выбраны в соответствии с условием

$$\varepsilon_x \leqslant \varepsilon_y \leqslant \varepsilon_z. \qquad (142.1)$$

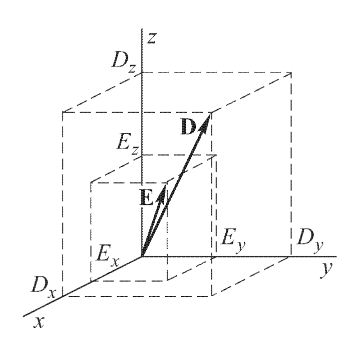


Рис. 26.3. В анизотропной среде направления векторов **E** и **D** не совпадают

Полная молекулярная теория должна, исходя из особенностей поляризации молекул среды, обусловленных их строением и специальным расположением, дать возможность вычислить значения трех главных диэлектрических проницаемостей ε_x, ε_y, ε_z и найти расположение осей эллипсоида диэлектрической проницаемости относительно кристаллографических осей.

§ 143. Оптические свойства анизотропной среды

Используя связь между **D** и **E**, характеризующую анизотропную среду, можно применить в дальнейшем формальную теорию Максвелла, составив соответствующие уравнения, причем в качестве осей координат удобно выбрать главные направления диэлектрической проницаемости. Не производя соответствующего исследования, ограничимся сообщением результатов. Решение уравнений Максвелла для анизотропной среды, в отличие от решения для изотропной среды, характеризуется следующими особенностями.

1. По данному направлению **N** могут распространяться две плоскополяризованные волны с двумя различными фазовыми скоростями, соответствующими двум различным направлениям вектора индукции **D**.

Эти два особенных направления колебания определяются свойствами среды (кристалла) и взаимно перпендикулярны между собой. Поляризованная волна с колебаниями, параллельными какому-либо из этих двух направлений, распространяется через кристалл со своей

[1]) Несовпадение направлений **E** и **D** имеет для кристаллооптики чрезвычайно важное значение, выясняемое дальше.

скоростью, оставаясь плоскополяризованной. Если направление первоначального колебания составляет угол с указанными особенными направлениями, то можно разложить его на два, распространяющихся с разными скоростями и, следовательно, приобретающих разность фаз. Наличие двух особенных, или главных[1]), направлений колебания, соответствующих двум разным скоростям, обусловливает явление *двойного лучепреломления* (см. главы XVI–XVIII).

2. В плоскости волнового фронта, т.е. в плоскости, перпендикулярной к **N**, расположены вектор **D** (электрической индукции) и вектор **H** (напряженности магнитного поля), который совпадает с вектором магнитной индукции $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, ибо μ в оптике для большинства сред равно 1. Вектор же **E** (напряженность электрического поля), не совпадающий с **D**, образует с **N** угол, отличный от прямого[2]). Оба вектора **E** и **D** всегда перпендикулярны к **H**, так что общее расположение векторов соответствует рис. 26.4. Сказанное и построение рисунка относится к каждой из указанных выше линейно-поляризованных волн в отдельности.

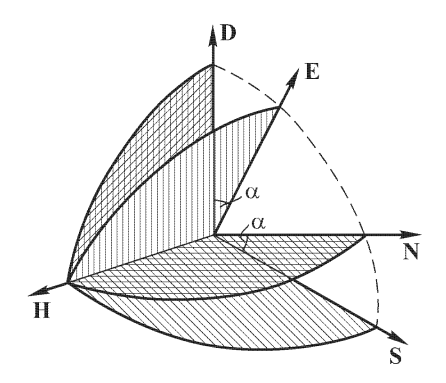


Рис. 26.4. Взаимное расположение векторов **E**, **D**, **H**, **S** и **N**. Вектор **H** нормален к плоскости, в которой лежат остальные векторы

Если нормаль **N** располагается в главном сечении эллипсоида диэлектрической проницаемости (например, xOy), то одно особое направление вектора **D** лежит в том же сечении, а другое — перпендикулярно ему, т.е. параллельно третьей оси (Oz). Для последнего векторы **D** и **E** параллельны, для первого — непараллельны. Если нормаль **N** направлена вдоль одной из осей эллипса, то особые направления колебаний вектора **D** соответствуют двум другим осям и в обеих волнах **D** и **E** параллельны. Следовательно, в отличие от изотропных сред, совпадение направлений **D** и **E** и их перпендикулярность к **N** имеют место лишь в перечисленных исключительных случаях.

Таким образом, плоскость фронта волны, распространяющейся вдоль **N**, есть плоскость **DH**. Однако и плоскость **EH**, повернутая на угол α относительно плоскости фронта **DH**, имеет существенное значение, ибо нормаль к ней определяет направление потока лучистой энергии, несомой волной (вектор Умова–Пойнтинга **S**), т.е. направле-

[1]) Эти «главные» направления колебания или поляризации волны в кристалле не следует смешивать с главными направлениями кристалла, определяемыми осями эллипсоида диэлектрической проницаемости.

[2]) Таким образом, вектор **E** не перпендикулярен к направлению распространения волны **N**, т.е. волна не строго поперечна в том смысле, какой придан этому понятию (см. примечание на с. 338).

ние светового луча. Для изотропной среды *луч и нормаль* к фронту волны совпадали, ибо **E** и **D** имели одинаковые направления. В анизотропной среде это имеет место только в указанных выше частных случаях.

Итак, направление распространения фазы волны (вдоль нормали **N**) и направление распространения энергии волны (вдоль луча **S**) не совпадают между собой. К этому выводу, полученному путем исследования законов электромагнитного поля в анизотропной среде, мы пришли раньше из простого рассмотрения формы поверхности волны для анизотропной среды (см. § 142). Скорость фазы q, измеренная вдоль нормали, будет отличаться от скорости световой энергии v, измеренной вдоль луча (лучевой скорости), так что $q = v\cos\alpha$ (см. упражнение 201). Двум значениям скорости фронта по нормали q' и q'', обусловливающим двойное лучепреломление, соответствуют и два значения скорости распространения энергии, v' и v''.

3. Две скорости (q' и q'' или v' и v''), характеризующие распространение света по какому-либо направлению в кристалле, равно как и направления колебаний соответствующих векторов (**D** или **E**), можно найти при помощи простых правил. Правила эти, так же как и все решение задачи о распространении света в кристаллах, были впервые указаны Френелем, и применительно к электромагнитной теории света их можно сформулировать следующим образом.

Для определения лучевых скоростей v' и v'' в кристалле воспользуемся вспомогательной поверхностью, носящей название эллипсоида Френеля и описываемой уравнением

$$\varepsilon_x x^2 + \varepsilon_y y^2 + \varepsilon_z z^2 = 1. \quad (143.1)$$

Здесь ε_x, ε_y, ε_z — главные значения диэлектрической проницаемости, и уравнение эллипсоида отнесено к главным осям.

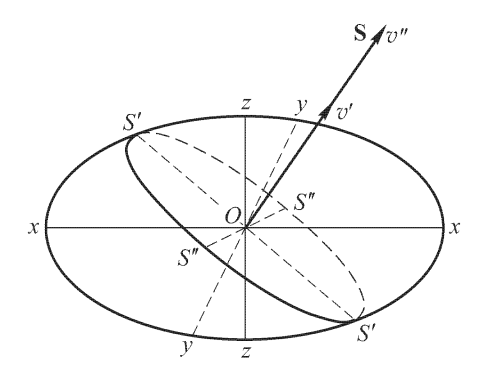


Рис. 26.5. Нахождение v' и v'' с помощью эллипсоида Френеля: xx, yy, zz — главные оси эллипсоида; OS — направление распространения лучей; $S'S''S'S''$ — эллиптическое сечение, перпендикулярное к OS и определяющее своими главными осями $S'S'$ и $S''S''$ направление колебания вектора **E** и значение лучевых скоростей распространения света v' и v''

Эллипсоид Френеля и служит, как показал Френель, для определения с помощью следующего построения лучевых скоростей v' и v'' по любому направлению в кристалле. Проведем сечение эллипсоида, перпендикулярное к направлению **S**, вдоль которого распространяется свет (рис. 26.5). Сечение это, вообще говоря, будет иметь форму эллипса, главные оси которого $S'S'$ и $S''S''$ взаимно перпендикулярны. Направления этих осей дают направление колебания вектора **E** двух волн, поляризован-

ных взаимно перпендикулярно и распространяющихся вдоль OS, а длины полуосей ($OS' = v'$, $OS'' = v''$) — лучевые скорости этих двух волн, отнесенные к скорости света в вакууме c.

Подобным же образом можно составить представление и о скоростях распространения фазы (вдоль нормали $\mathbf{N}$). Для этого удобнее использовать связанную с эллипсоидом Френеля вспомогательную поверхность, также имеющую вид эллипсоида, носящего название эллипсоида индексов (или эллипсоида нормалей) и описываемого уравнением

$$\frac{x^2}{\varepsilon_x} + \frac{y^2}{\varepsilon_y} + \frac{z^2}{\varepsilon_z} = 1. \tag{143.2}$$

Повторяя по отношению к эллипсоиду индексов построение, описанное выше, мы найдем, что эллиптическое сечение его, перпендикулярное к любому направлению распространения ON, укажет два взаимно перпендикулярных колебания вектора $\mathbf{D}$, совпадающих с осями эллипса. Значения соответствующих скоростей q' и q'', называемых *нормальными скоростями*, обратно пропорциональны длинам полуосей этого эллипса.

§ 144. Поверхность волны (лучевая) и поверхность нормалей

Если вычислить по данным о свойствах кристалла или измерить экспериментально значения лучевых скоростей по всем направлениям, то можно построить поверхность, до которой дойдет к моменту t световое возбуждение, распространяющееся из точки O кристалла. Для этой цели надо по любому направлению отложить отрезки, пропорциональные $v't$ и $v''t$, где v' и v'' — лучевые скорости. Получится поверхность с двумя полостями, вообще говоря, довольно сложного вида.

Некоторое представление о виде лучевой поверхности можно составить по трем главным ее разрезам, нормальным к главным осям эллипсоида Френеля, используя построение предыдущего параграфа. Полуоси эллипсоида Френеля обозначим через a, b и c, т.е.

$$a = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_x}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_y}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_z}},$$

и в соответствии с условием (142.1) имеем

$$a \geqslant b \geqslant c. \tag{144.1}$$

Начнем с разреза лучевой поверхности, нормального к оси XX, т.е. лежащего в плоскости YOZ. С помощью построения Френеля найдем, что вдоль OZ лучи распространяются со скоростями, определяемыми длиной a и b (рис. 26.6 a). Вдоль OY соответствующие скорости будут равны a и c. Поворачивая сечение эллипсоида Френеля около оси OX, мы заставим нормаль этого сечения пройти все положения между OZ и OY, и таким образом получим значения всех пар лучевых скоростей рассматриваемого разреза; поскольку одна из осей френелева сечения все время есть OX, то, следовательно, одна из этих лучевых скоростей во всем разрезе YOZ есть a, другая же пробегает все значения между b и c. Так получается разрез, состоящий из

окружности радиуса a и эллипса с полуосями b и c (см. рис. 26.6 *а*), причем направления колебаний в каждой паре лучей, будучи взаимно перпендикулярными, обозначены точками и штрихами.

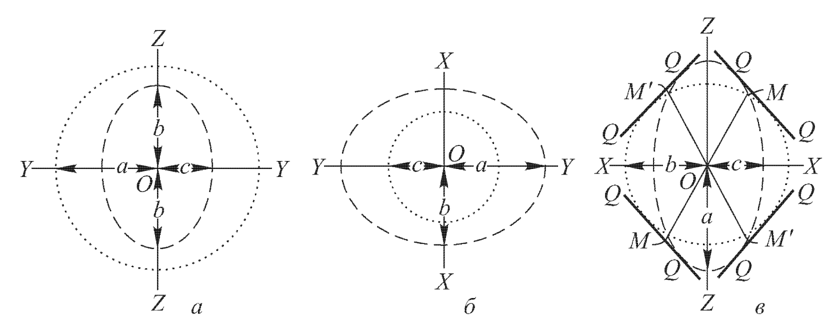


Рис. 26.6. Поверхность волны в двуосном кристалле: сечения волны, перпендикулярные к главным осям эллипсоида Френеля

Совершенно аналогично найдем разрез лучевой поверхности, перпендикулярный к наименьшей оси OZ эллипсоида Френеля (плоскость XOY): заставляя вращаться сечение Френеля около OZ, получим разрез (см. рис. 26.6 *б*), состоящий из окружности радиуса c, лежащей внутри эллипса с полуосями a и b.

Разрез, перпендикулярный к средней оси OY (плоскость XOZ), получаемый вращением сечения около OY, дает окружность радиуса b и эллипс с полуосями a и c, которые, очевидно, пересекаются (ибо $a > b > c$), как показано на рис. 26.6 *в*.

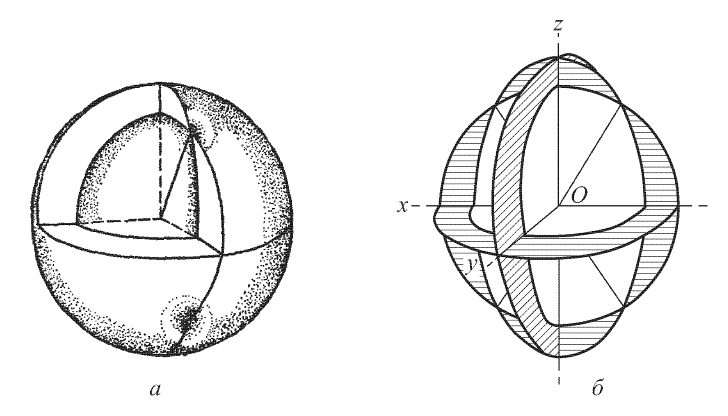


Рис. 26.7. Трехмерная модель поверхности волны в двуосном кристалле (*а*) и перспективное изображение трех главных ее сечений (*б*)

Еще яснее представление о поверхности волны можно составить из рис. 26.7 *а* и *б*, где изображены трехмерная модель и перспективное изображение трех главных сечений лучевой поверхности. Внешняя

поверхность отдаленно напоминает эллипсоид, но обладает четырьмя воронкообразными углублениями в точках, соответствующих M и M' на рис. 26.6 *в*, и похожих на углубления в яблоке. Точки пересечения M и M' на рис. 26.6 *в* соответствуют точкам рис. 26.7, где внешняя и внутренняя полости встречаются, так что по направлениям MM и $M'M'$ обе скорости распространения светового возбуждения одинаковы ($v' = v''$). Эти направления называются *оптическими осями* [1]) кристалла; они располагаются симметрично относительно главных направлений кристалла.

Величина угла между осями у разных кристаллов различна. Так, для KNO_3 она равна $7°12'$, а для $FeSO_4$ $85°27'$. В предельном случае угол между осями становится равным нулю, обе оси сливаются. Такие кристаллы называются *одноосными* (кварц, исландский шпат и др.). У одноосных кристаллов точки M и M' совпадают, и наша двухполостная поверхность переходит в совокупность эллипсоида вращения и шара с общим диаметром a (или b), т.е. мы получаем поверхность волны одноосного кристалла с осью a (или b).

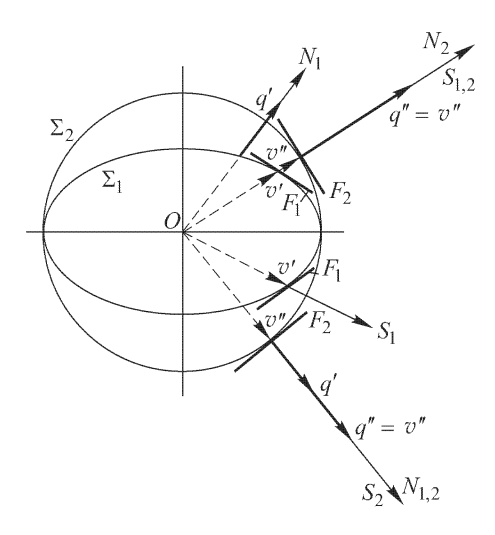


Рис. 26.8. Соотношение лучей S и нормалей N в анизотропоной среде. Для упрощения чертежа нормаль N_1 к волновому фронту F_1 и нормальная скорость q' смещены влево относительно точки пересечения S_1 с поверхностью Σ_1

Описанная поверхность есть поверхность световой волны, или *лучевая поверхность*. Радиус-вектор, проведенный из O (рис. 26.8, верхняя часть) к любой точке поверхности волны, представляет собой направление луча. Плоскости же F_1 и F_2, касательные к поверхностям в точках их пересечения с лучом, суть плоскости волновых фронтов. Двум лучам (со скоростями v' и v''), идущим по *одному и тому же направлению* $S_{1,2}$, соответствуют две не параллельные между собой плоскости фронтов (с нормалями N_1 и N_2), распространяющиеся со скоростями q' и q''. Наоборот, по любому направлению $N_{1,2}$ (см. рис. 26.8, нижняя часть) идут два параллельных фронта волн (с разными скоростями q' и q''), которым соответствуют два луча S_1 и S_2 со скоростями v' и v'', образующие некоторый угол друг с другом.

[1]) Их иногда называют *оптическими осями первого рода* или *бирадиалями*, чтобы отметить, что они соответствуют равенству *лучевых* скоростей.

Наряду с *лучевой поверхностью* (геометрическое место концов отрезков, пропорциональных лучевым скоростям) можно построить и *поверхность нормалей* (геометрическое место концов отрезков, пропорциональных нормальным скоростям). Так как, вообще говоря, угол между **S** и **N** невелик, то различие между формами этих поверхностей незначительно. Для двуосного кристалла опять получается сложная двухполостная поверхность с четырьмя точками встречи обеих полостей (аналогичных M и M' на рис. 26.6 *в*). Направления, соединяющие попарно эти точки (аналогичные MM, $M'M'$), являются направлениями совпадающих нормальных скоростей и называются *оптическими осями второго рода* или *бинормалями*. Направления их, вообще говоря, мало отличаются от направлений осей первого рода.

Конечно, вместо того чтобы строить поверхность нормалей путем преобразования лучевой поверхности, можно было бы начать с построения поверхности нормалей, исходя из эллипсоида индексов и пользуясь построением Френеля для отыскания пар значений q' и q''. Построив поверхность нормалей, т.е. геометрическое место концов нормальных скоростей, мы путем соответствующего преобразования могли бы перейти к лучевой поверхности (геометрическое место концов лучевых скоростей).

§ 145. Одноосные и двуосные кристаллы

Изложенное в предыдущих параграфах показывает, что решение задач кристаллооптики можно свести к построению некоторых вспомогательных поверхностей. Мы рассмотрели две из них: эллипсоид Френеля (для лучей) и эллипсоид индексов (для нормалей). Разумеется, все вспомогательные поверхности связаны между собой, так что знание одной из них позволяет более или менее сложным путем найти и остальные. Тем не менее применение различных поверхностей может оказаться полезным при разборе отдельных конкретных задач, решения которых особенно просто удается найти путем обсуждения свойств подходящей вспомогательной поверхности.

При помощи эллипсоида Френеля нетрудно геометрически определить в кристалле направления оптических осей первого рода. Оптические оси первого рода представляют собой те направления в кристалле, вдоль которых обе лучевые скорости равны друг другу ($v' = v''$). Поэтому, согласно правилу Френеля (см. § 143), сечение эллипсоида, перпендикулярное к оптической оси первого рода, должно характеризоваться равенством своих полуосей. Другими словами, это сечение имеет форму круга. Таким образом, направление оптической оси первого рода соответствует линии, перпендикулярной к *круговому* сечению эллипсоида Френеля. Так как эллипсоид имеет не больше *двух* круговых сечений, расположенных симметрично относительно его главных осей, то кристалл в самом общем случае имеет *две* оптические оси, угол между которыми зависит от формы эллипсоида, т.е. от свойств кристалла (рис. 26.9).

Существование двуосных кристаллов было установлено в 1815 г. Брюстером, который использовал для обнаружения слабого двойного лучепреломления открытое в 1811 г. Араго явление окрашивания дво-

якопреломляющих веществ, помещенных между скрещенными поляризаторами (см. § 148). Брюстер, изучив свыше 150 различных кристаллов, обнаружил, что наряду с кристаллами, подобными кварцу или исландскому шпату, к которым применимо построение Гюйгенса, существует другой тип кристаллов, характеризующихся двумя направлениями, вдоль которых не наблюдается двойного лучепреломления, и названных поэтому *двуосными*. Замечательно, что Брюстер чисто эмпирически смог установить, какие типы кристаллической симметрии относятся к двуосным и какие — к одноосным кристаллам, в полном соответствии с современным решением этого вопроса.

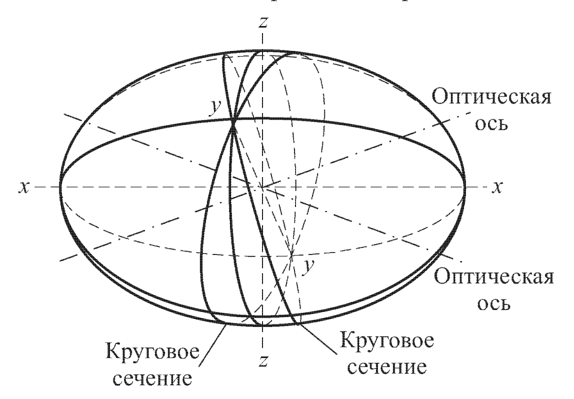


Рис. 26.9. Определение направлений оптических осей с помощью эллипсоида Френеля или эллипсоида индексов. Оптические оси перпендикулярны к круговым сечениям эллипсоида

Открытие двуосных кристаллов имело очень большое теоретическое значение и вначале послужило сильным аргументом против зарождающейся волновой теории. Для двуосных кристаллов оказывалось неприменимым построение Гюйгенса, с помощью которого он истолковал на волновом языке явление двойного лучепреломления в одноосных кристаллах, и, таким образом, один из главных аргументов волновой теории потерял свою убедительность. Лишь позднее, когда Френель развил свою кристаллооптику, открытие Брюстера стало, наоборот, одним из блестящих подтверждений волновой системы взглядов.

Если оба круговых сечения эллипсоида *совпадают* друг с другом, то обе оси сливаются и мы имеем *одноосный* кристалл. В этом случае эллипсоид будет эллипсоидом вращения, причем ось вращения, определяющая направление оптической оси кристалла, совпадает с одним из главных направлений кристалла. Два возможных случая $c < b = a$ и $c = b < a$ соответствуют *положительным* (например, кварц) и *отрицательным* (например, исландский шпат) одноосным кристаллам [1]). Наконец, если $a = b = c$, то эллипсоид Френеля обращается в

[1]) Иногда, в отличие от договоренности (142.1), (144.1), оптическую ось называют осью z и для положительных, и для отрицательных кристаллов.

сферу; все его сечения круговые, т.е. по любому направлению обе лучевые скорости совпадают между собой ($v' = v''$) — среда оптически изотропна и двойное лучепреломление отсутствует. Аналогичным образом можно рассмотреть вопрос о направлении и числе осей второго порядка, для чего надо исходить из эллипсоида индексов.

В случае одноосного кристалла угол между оптическими осями обращается в нуль, и две слившиеся оси определяют направление, вдоль которого распространяется волна в кристалле только с одной скоростью. В соответствии с этим волновая поверхность имеет для одноосных кристаллов более простой вид, чем для двуосных, и представляет собой две соприкасающиеся поверхности: сферу (для обыкновенного луча) и эллипсоид вращения (для необыкновенного луча). Точки соприкосновения этих поверхностей лежат на оптической оси. Волновая поверхность для положительных кристаллов $c < a = b$ представляет собой эллипсоид вращения, *вписанный* в сферу (рис. 26.10 *а*); для отрицательных кристаллов $c = b < a$ она представляет собой эллипсоид вращения, *описанный* около сферы (рис. 26.10 *б*).

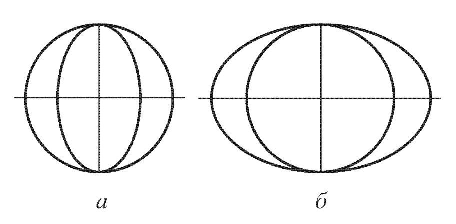


Рис. 26.10. Сечение волновой поверхности положительного (*а*) и отрицательного (*б*) кристалла

Показатель преломления, соответствующий направлению малой полуоси эллипсоида в случае положительных кристаллов и большой — в случае отрицательных кристаллов, называется показателем преломления необыкновенного луча [1]).

Значения показателей преломления (для $\lambda = 589{,}3$ нм): для исландского шпата $n_o = 1{,}658$ для обыкновенного луча и $n_e = 1{,}486$ для необыкновенного луча; для кварца $n_o = 1{,}543$, $n_e = 1{,}552$.

Существуют кристаллы с еще более резко выраженным различием в показателях преломления. Так, для натронной селитры $NaNO_3$ $n_o = 1{,}585$, $n_e = 1{,}337$. К сожалению, недостаточная устойчивость селитры к влаге и механическим повреждениям затрудняет применение ее для оптических приборов.

Различие между поведением обыкновенного и необыкновенного лучей внутри кристалла соответствует различию направления электрического вектора в этих лучах по отношению к оптической оси. Для обыкновенного луча этот вектор всегда расположен перпендикулярно к оптической оси, ибо он направлен перпендикулярно к главной плоскости, в которой лежит оптическая ось. Поэтому при любом направлении обыкновенного луча электрический вектор его ориентирован одинаково по отношению к оптической оси и скорость его не зависит от направления. Электрический вектор необыкновенного луча лежит в главной плоскости, т.е. в той же плоскости, что и оптическая ось.

[1]) Точнее, необыкновенные лучи в зависимости от направления распространения имеют различные показатели преломления от n_o до n_e.

Поэтому, вообще говоря, его направление составляет тот или иной угол с осью (от нуля до 90°), в зависимости от направления луча.

§ 146. Построение Гюйгенса для анизотропных сред

Обычно в учебниках встречается утверждение, что законы преломления не приложимы к необыкновенному лучу в одноосном кристалле и к обоим лучам в двуосном. Это — правильное утверждение, но оно имеет чисто отрицательный характер, показывая, что простое построение, предписываемое законом преломления, *не приложимо* к решению задачи о направлении распространения светового луча. Если взамен не дается никаких правил, то решение даже весьма простых вопросов кристаллооптики оказывается затруднительным. Между тем существует гораздо более общий прием отыскания направления распространения преломленной световой волны, а именно, построение, основанное на принципе Гюйгенса, следствием которого для изотропной среды является закон преломления Декарта–Снеллия. Напомним, что сам Гюйгенс рассматривал при помощи этого приема вопрос о распространении света в двоякопреломляющих телах (исландский шпат) и получил крайне важные результаты. Применение построения Гюйгенса является простым и действенным средством для разбора вопроса о распространении света в анизотропных средах. Поверхность, фигурирующая в построении Гюйгенса, есть, очевидно, *лучевая* поверхность, а не поверхность нормалей. Действительно, по правилу Гюйгенса для получения фронта (плоской) волны проводят плоскость, касательную к поверхности Гюйгенса. А фронт волны *касателен*

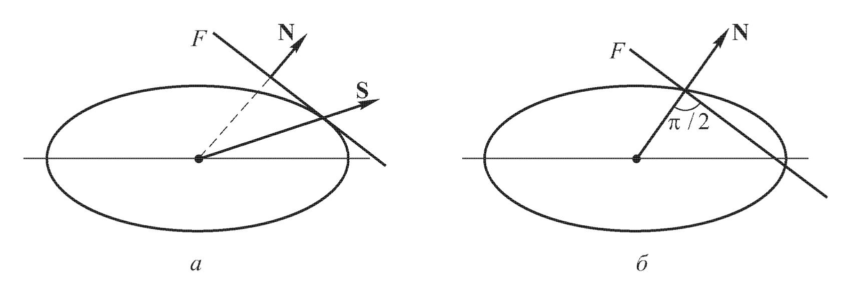


Рис. 26.11. Фронт волны касается лучевой поверхности (*а*) и пересекает поверхность нормалей (*б*)

именно к лучевой поверхности (рис. 26.11 *а*) и *пересекает* поверхность нормалей (рис. 26.11 *б*).

Нетрудно показать, что построение Гюйгенса дает непосредственно положение волнового фронта и, следовательно, направление *нормалей*, а не лучей. При этом по отношению к нормалям законы преломления в обычной формулировке *сохраняются* и для анизотропных сред, а именно: 1) нормали к обеим волновым поверхностям лежат в плоскости падения; 2) отношение синусов углов, образованных нормалями к волновым фронтам с перпендикуляром к поверхности разде-

ла, равно отношению нормальных скоростей для сред по обе стороны границы раздела. Действительно, пусть плоская волна, фронт которой в первой среде есть MQ (рис. 26.12), падает на плоскость раздела. Оба фронта преломленных волн во второй среде представляют собой плоскости, касательные к лучевым поверхностям во второй среде и проходящие через линию пересечения фронта падающей волны с поверхностью раздела, т.е. линию, след которой показан на рис. 26.12 точкой P. Линия эта перпендикулярна к плоскости падения; поэтому оба фронта преломленных волн как плоскости, проходящие через эту линию, также перпендикулярны к плоскости падения. Следовательно, нормали к ним обе лежат в плоскости падения, какой бы вид ни имели лучевые поверхности. Таким образом, первый закон преломления для *нормалей* всегда справедлив. На рис. 26.12 точки A и B являются местами пересечения нормалей, проведенных из M, с плоскостями фронтов. Согласно доказанному выше они лежат в плоскости чертежа (плоскость падения). Точки же касания фронта с лучевыми поверхностями могут, вообще говоря, не находиться в плоскости падения, и потому они на чертеже не показаны.

Обозначив через τ время, в течение которого волновые фронты во второй среде проходят до положений PA и PB (см. рис. 26.12), через c_0 — скорость света в первой среде (вакуум), а через q' и q'' — нормальные скорости обеих преломленных волн, найдем, как обычно,

$$QP = c_0\tau = MP\sin\varphi,$$
$$MA = q'\tau = MP\sin\psi_1,$$
$$MB = q''\tau = MP\sin\psi_2,$$

или

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi_1} = \frac{c_0}{q'}, \qquad \frac{\sin\varphi}{\sin\psi_2} = \frac{c_0}{q''},$$

т.е. для нормалей соблюдается и второй закон преломления. Наши рассуждения в одинаковой степени относятся как к одноосным, так и к двуосным кристаллам. Если бы мы желали путем построения Гюйгенса отыскать направление *лучей*, то необходимо было бы выполнить его при помощи пространственных моделей, ибо точки касания волнового фронта и лучевой поверхности не лежат, вообще говоря, в плоскости падения. Построив таким образом направления *лучей*, мы убедились бы, что по отношению к ним законы преломления Декарта–Снеллия, вообще говоря, не имеют силы. Хотя непосредственно на опыте мы наблюдаем направление лучей, представляющих пути распространения световой энергии, действующей на наши приборы, тем не менее легко выполнимое построение Гюйгенса для нормалей чрезвычайно облегчает в ряде случаев правильное решение задачи. Так, например, в отрицательном одноосном кристалле скорость необыкновенной волны

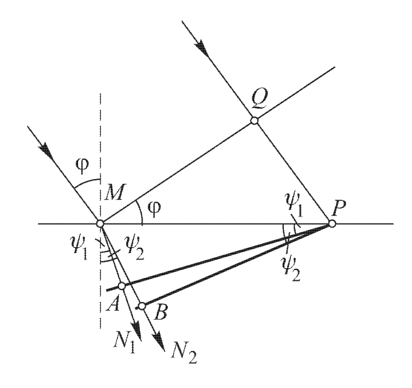


Рис. 26.12. Нахождение направления нормалей в анизотропной среде с помощью построения Гюйгенса

больше, чем обыкновенной, и, значит, необыкновенная волна должна преломляться *меньше* обыкновенной. Но это справедливо именно для нормалей; направление же *лучей* иное, и возможны случаи, когда необыкновенный *луч* будет преломляться сильнее обыкновенного в одноосном отрицательном кристалле.

Рисунок 26.13 иллюстрирует этот случай. Пусть кристалл вырезан так, что оптическая ось расположена в плоскости грани кристалла, а MK — одно из главных направлений эллипсоида Френеля.

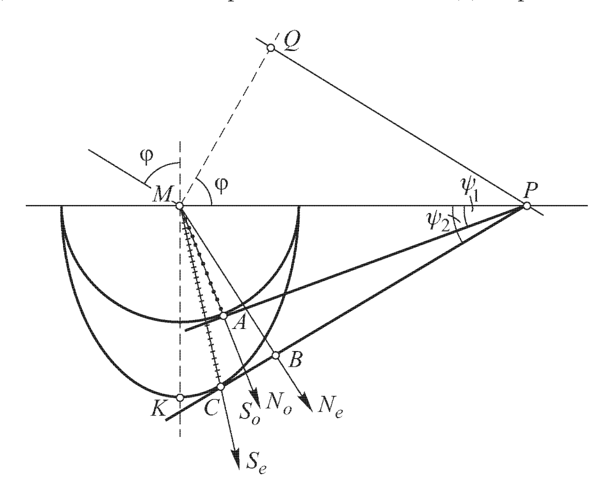


Рис. 26.13. В отрицательном одноосном кристалле нормаль необыкновенной волны преломляется всегда меньше нормали обыкновенной, но необыкновенный луч может преломляться и сильнее обыкновенного

В таком случае лучи и нормали обеих преломленных волн лежат в плоскости падения и нормаль преломленной необыкновенной волны N_e преломлена *меньше*, чем нормаль обыкновенной N_o, а необыкновенный луч S_e преломлен *больше*, чем луч обыкновенный S_o. Рассмотрев подобным образом несколько случаев, приведенных в упражнениях 202а, б, в, можно убедиться в плодотворности этого приема.

§ 147. Экспериментальные данные о распространении света в одноосных кристаллах

После общих соображений, изложенных в предыдущих параграфах, рассмотрим более детально характер распространения света в одноосном кристалле, опираясь на данные наблюдения. Так как мы наблюдаем непосредственно за поведением *луча* (а не нормали к волне), то выводы наши относятся к лучевой поверхности. Для целей такого рассмотрения заставим свет проходить не через естественный кристалл, а через пластинки исландского шпата, вырезанные определенным образом относительно оси.

Случай I. Пластинка вырезана *перпендикулярно* к оптической оси. Рассмотрим преломление света в такой пластинке при разном его падении относительно оптической оси.

а. Луч естественного света направлен вдоль оптической оси. В этом случае двойного лучепреломления нет и луч выходит из пластинки, не меняя своего направления. Нетрудно видеть, что свет при этом должен остаться естественным. Действительно, в данном случае положение главной плоскости, проходящей через оптическую ось и волновую нормаль, остается неопределенным, а следовательно, неопределенным остается и направление колебания в обоих лучах, и они неотличимы друг от друга.

б. Луч естественного света падает наклонно к оптической оси (рис. 26.14 *а* и *б*). В этом случае происходит явление двойного лучепреломления, и если падающий пучок достаточно

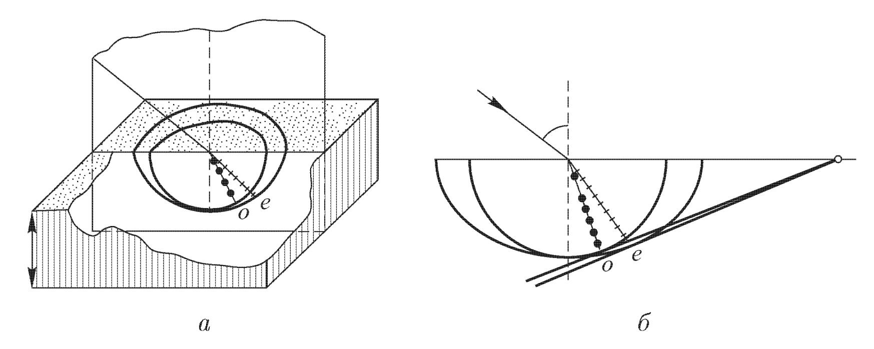


Рис. 26.14. Прохождение света через пластинку одноосного кристалла, вырезанную перпендикулярно к оптической оси (*а*), и построение Гюйгенса (*б*)

узок, а кристаллическая пластинка достаточно толста, из нее выйдут два раздельных пучка, параллельных падающему и поляризованных в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Если менять угол падения φ, то меняются и углы преломления ψ_o и ψ_e. Исследование с помощью николя или поляроида показывает, что луч с колебаниями, перпендикулярными к главной плоскости, которая в нашем случае совпадает с плоскостью падения, преломляется под углом ψ_o так, что отношение $\sin\varphi/\sin\psi_o$ не зависит от угла падения. Отношение же $\sin\varphi/\sin\psi_e$ для того луча, направление колебания в котором лежит в главной плоскости, меняется в зависимости от угла падения. Как уже указывалось, первый из этих двух лучей носит название *обыкновенного*, второй — *необыкновенного*. Таким образом, для обыкновенного луча показатель преломления n_o остается одним и тем же для любого направления внутри кристалла, а для необыкновенного луча n_e зависит от направления распространения света внутри кристалла. В связи с этим и скорость его зависит от направления луча в кристалле.

Случай II. Пластинка вырезана *параллельно* главной оси. Опыт с преломлением света в такой пластинке показывает следующее.

а. Плоскость падения P совпадает с главной плоскостью (рис. 26.15 *а* и *б*).

Оба луча *o* и *e* лежат в одной плоскости с падающим лучом (плоскость падения и преломления). Колебания в обыкновенном луче перпендикулярны к главной плоскости (плоскости падения), т.е.

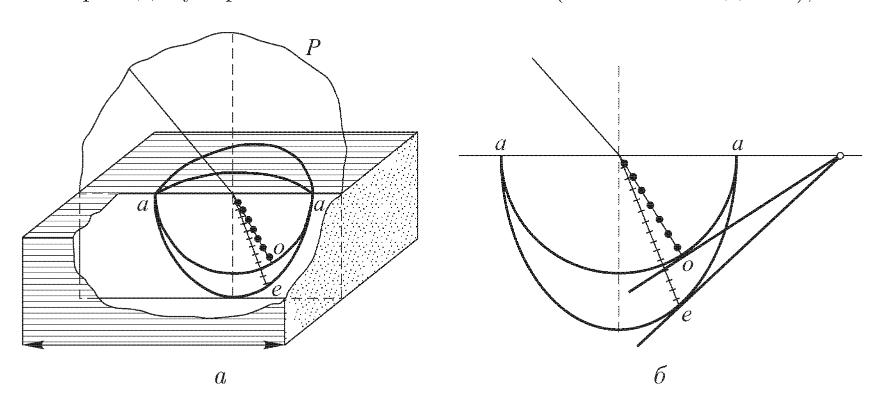


Рис. 26.15. Прохождение света через пластинку одноосного кристалла, вырезанную параллельно оптической оси (плоскость падения совпадает с главной плоскостью кристалла) (*а*) и построение Гюйгенса (*б*)

при любом направлении луча перпендикулярны к оптической оси. Поверхность волны *o* пересекается с плоскостью падения по окружности. Колебания в необыкновенном луче лежат в главной плоскости, т.е. в плоскости падения, и составляют с осью различный угол в зависимости от направления луча. В соответствии с этим показатель преломления для необыкновенного луча по разным направлениям различен, так что поверхность волны *e* имеет в сечении плоскостью падения вид эллипса. Вдоль оси *aa* эллипс и круг имеют общий диаметр, т.е. оба луча распространяются вдоль оси с одинаковой скоростью. Соотношения между кругом и эллипсом для наглядности утрированы: $n_o = 1{,}658$, n_e лежит между 1,658 и 1,486 в зависимости от угла падения.

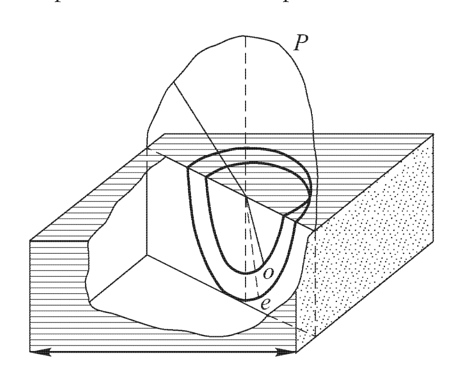


Рис. 26.16. Прохождение света через пластинку одноосного кристалла, вырезанную параллельно оптической оси (плоскость падения лежит под углом к главной плоскости кристалла)

Построение преломленных лучей показывает, что в этом случае в отрицательном кристалле необыкновенный луч преломляется *сильнее*, чем обыкновенный (в положительном — наоборот).

б. Плоскость падения P составляет угол с главной плоскостью.

Луч o (рис. 26.16) после преломления остается в плоскости падения, но луч e из нее выходит. Скорость луча o не зависит от направления, скорость луча e зависит от него. Изобразить направления колебаний и направление оси в этом случае на плоском чертеже затруднительно.

в. Плоскость падения P перпендикулярна к главной плоскости.

Оба луча o и e (рис. 26.17 *а* и *б*) остаются в плоскости падения. Колебания в обыкновенном луче o перпендикулярны к главной плоскости, т.е. лежат в плоскости падения и, как всегда, при любом направлении луча оказываются *перпендикулярными* к оси. Колебания

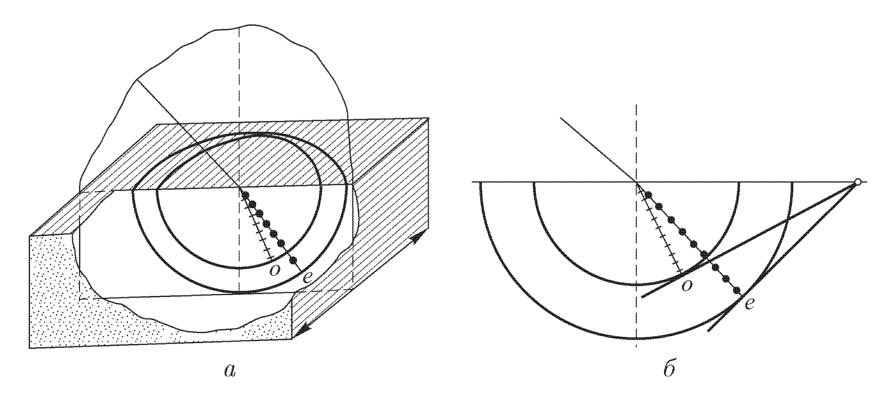


Рис. 26.17. Прохождение света через пластинку одноосного кристалла, вырезанную параллельно оптической оси (плоскость падения перпендикулярна к главной плоскости) (*а*) и построение Гюйгенса (*б*)

в необыкновенном луче e лежат в главной плоскости, т.е. перпендикулярны к плоскости падения. Как видно из чертежа, в этом случае колебания в необыкновенном луче при любом его направлении оказываются *параллельными* оси, т.е. в данном случае показатель преломления для *необыкновенного* луча не зависит от направления и равен 1,486. Обе поверхности волны рассекаются плоскостью падения по окружности.

После рассмотрения частных случаев (а, б, в) легко проследить, как будут протекать явления при поворачивании пластинки, вырезанной параллельно оптической оси, около линии, нормальной к ее поверхности. Если N — след нормали к пластинке на экране, то в случае, показанном на рис. 26.15 *а*, расположение необыкновенного и обыкновенного лучей изобразится точками e_a и o (рис. 26.18). При вращении пластинки вокруг нормали N положение обыкновенного луча o остается неизменным, как и для изотропной пластинки. Положение же следа необыкновенного луча e меняется. При повороте пластинки в положение, соответствующее рис. 26.16, конец e выходит из плоскос-

ти No, и его расположение изобразится точкой e_b (см. рис. 26.18). При дальнейшем повороте до положения, показанного на рис. 26.17 *а*, луч *e* окажется вновь в плоскости No, но по другую сторону *o*, в положении, отмеченном точкой e_c; дальнейшее вращение вновь выводит *e* из плоскости No, и при повороте на 180°, когда восстанавливается расположение рис. 26.15 *а*, луч *e* вновь приходит в положение e_a, описав около *o* полный круг. При дальнейшем вращении явления повторяются. Таким образом, при полном повороте пластинки вокруг нормали луч *e дважды* описывает окружность вокруг точки *o*, четыре раза проходя через плоскость падения (два раза по одну сторону от точки *o* и два раза по другую сторону от нее).

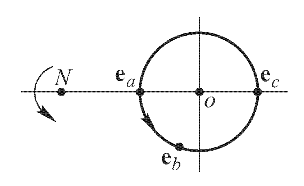


Рис. 26.18. Прохождение необыкновенного луча при полном повороте кристаллической пластинки вокруг нормали

§ 148. Цвета кристаллических пластинок и интерференция поляризованных лучей

а. Явления в параллельных лучах. Поместив кристаллическую пластинку K между *двумя* поляризаторами N_1 и N_2 (рис. 26.19), можно наблюдать следующие интерференционные явления.

При наблюдениях со светофильтрами на поверхности пластинки неравномерной толщины обнаруживается распределение светлых и темных пятен. При поворачивании одного из поляризаторов на 90°

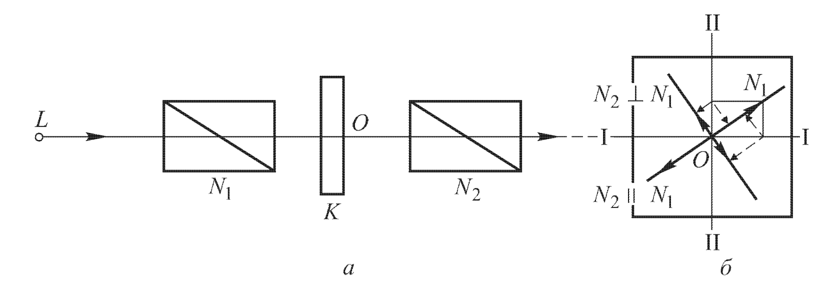


Рис. 26.19. Схема расположения для наблюдения цветов кристаллической пластинки в параллельных лучах (*а*) и диаграмма разложения колебаний по главным направлениям пластинки (*б*)

светлые места становятся темными, и обратно. В случае белого света пластинка испещрена цветными пятнами; при повороте одного из поляризаторов на 90° цвета сменяются на дополнительные. Если убрать один из поляризаторов, то исчезают всякие следы интерференционной картины и поверхность пластинки оказывается освещенной равномерно.

Нетрудно понять смысл наблюдаемых явлений. Плоскополяризованный свет, выходящий из поляризатора N_1, падая на кристаллическую пластинку, дает начало двум когерентным волнам, идущим с различной скоростью и приобретающим известную разность фаз, зависящую от толщины пластинки и различия в показателях преломления для обоих пучков. Так как колебания в этих волнах взаимно перпендикулярны, то они ведут к образованию эллиптически-поляризованного света. В точках, соответствующих различным толщинам кристаллической пластинки, форма и ориентация эллипсов могут быть различны, но *интенсивность* результирующего света везде одинакова, и пластинка кажется равномерно освещенной. Поместив после кристаллической пластинки второй поляризатор N_2, мы от каждой волны можем пропустить лишь ту слагающую колебаний, которая параллельна главной плоскости поляризатора N_2. Таким образом, в обеих волнах остаются лишь колебания, лежащие в одной плоскости. Итак, поляризатор N_1 создает поляризованный свет, обусловливая *когерентность* волн, взаимодействие которых мы хотим наблюдать; кристаллическая пластинка K обеспечивает приобретение некой *разности фаз* двумя компонентами, на которые разлагается пришедшая волна; поляризатор N_2 пропускает волны лишь с колебаниями, лежащими в определенной плоскости. Очевидно, что эта разность фаз зависит от длины волны распространяющегося света и различна для волн, принадлежащих к разным участкам спектра.

Обозначим через I и II направления, по которым совершаются колебания в двух волнах в кристаллической пластинке; тогда рис. 26.19 *б* ясно показывает значение поворота одного из поляризаторов. Если $N_2 \parallel N_1$, то из второго поляризатора оба луча выходят с той же разностью фаз, какую они приобрели в пластинке K. Если же $N_2 \perp N_1$, то при проецировании колебаний I и II на главную плоскость N_1 сообщается дополнительная разность фаз, равная π. Поэтому при $N_2 \parallel N_1$ и $N_2 \perp N_1$ распределения освещенностей в наблюдаемых картинах получаются взаимно дополнительными, т.е. максимумы освещенности сменяются минимумами и т.д.

Нетрудно также видеть, что если I и II совпадают с главной плоскостью N_1 или N_2, то из аппарата выходит только одна волна и интерференция не имеет места. Действительно, наблюдение показывает, что если при неизменных ориентациях N_1 и N_2 вращать пластинку, то интерференционная картина исчезает всякий раз, когда I или II становится параллельным одной из главных плоскостей N_1 или N_2. Таким путем можно очень просто определить главные направления I и II в кристаллической пластинке.

Описанные явления позволяют создать очень чувствительный метод определения различия в показателях преломления вещества. Они были открыты Араго в 1811 г. и получили исторически установившееся, но физически не вполне удачное название «хроматической поляризации».

Если между скрещенными поляризаторами N_1 и N_2 введен слой вещества хотя бы со слабыми признаками оптической анизотропии, то поле становится несколько светлее в случае монохроматического света или дает более или менее прихотливое окрашивание в случае бело-

го света. Поворот объекта приводит к изменению интерференционной картины. В частности, таким методом можно обнаружить слабую анизотропию в кусках стекла и других материалах, обычно изотропных, но подвергнувшихся каким-либо деформациям вследствие сжатия или неравномерного нагрева (см. гл. XXVII).

б. Явления в сходящихся пучках. Более сложные интерференционные картины получаются в сходящихся световых пучках. В этом случае разность фаз между обыкновенной и необыкновенной волнами, приобретаемая при прохождении через пластинку, приближенно может быть записана в виде

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\,\frac{h}{\cos\psi}\,(n_1 - n_2), \qquad (148.1)$$

где h — толщина пластинки, ψ — угол между волновой нормалью и нормалью к поверхности пластинки (т.е. $h/\cos\psi$ — геометрическая длина пути света внутри пластинки), n_1 и n_2 — показатели преломления для обеих волн в данном направлении. Даже когда пластинка плоскопараллельна (h постоянно), δ будет различно для волн с разным наклоном волновых нормалей и будет определяться ориентацией пластинки относительно проходящих сквозь нее световых пучков, ибо от ориентации зависит разность n_1 и n_2. Схема, осуществляющая необходимое расположение, изображена на рис. 26.20.

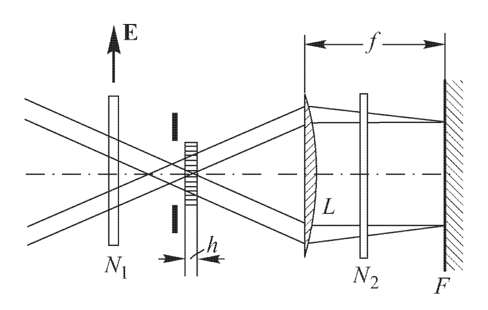


Рис. 26.20. Схема расположения для наблюдения цветов кристаллической пластинки в сходящихся лучах

Рассмотрим простейший случай, когда конус сходящихся световых пучков от протяженного источника света падает на плоскопараллельную пластинку одноосного кристалла, вырезанную перпендикулярно к оптической оси, причем ось конуса совпадает с оптической осью кристалла. Тогда при постоянном ψ разность фаз δ будет также постоянной, так как вследствие симметрии ориентации световых пучков относительно оси кристалла разность $n_1 - n_2$ зависит только от значения ψ. Таким образом, разность фаз для обыкновенной и необыкновенной волн будет определяться, как указано выше, значением угла ψ при фиксированном h.

Следовательно, мы будем иметь дело со случаем интерференции, до известной степени аналогичным тому, при котором получаются полосы равного наклона. Интерференционную картину можно наблюдать в фокальной плоскости F объектива L на расположенном в ней экране.

Однако, поскольку явление происходит в поляризованном свете, у него будет своя специфика. Нетрудно предсказать, что интерференционная картина должна обладать аксиальной симметрией и в фокальной плоскости объектива она должна иметь вид концен-

трических светлых и темных окружностей. Первые будут соответствовать выходу из пластинки волн, поляризованных так, что они создают результирующее колебание (см. рис. 26.19 *б*) с поляризацией, совпадающей с главным направлением анализатора. Вторые — волнам, результирующий вектор которых нормален к направлению колебаний, пропускаемых анализатором.

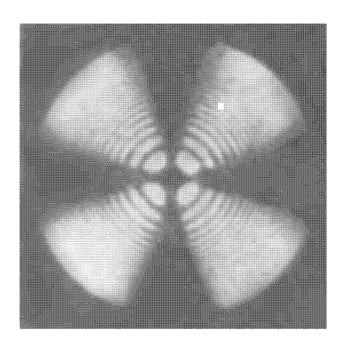


Рис. 26.21. Вид изохромат для пластинки одноосного кристалла, вырезанного перпендикулярно к оптической оси

Однако интерференционная картина, видимая на экране, не исчерпывается концентрическими окружностями. Как показывает опыт, если поляризатор и анализатор ориентированы одинаково, то система концентрических интерференционных полос перерезана светлым «мальтийским крестом»; если же они скрещены, то интерференционные кольца перерезаны темным «мальтийским крестом» (рис. 26.21). Крест представляет собой область, где интерференция отсутствует. В этих направлениях распространяется только одна поляризованная волна (обыкновенная или необыкновенная).

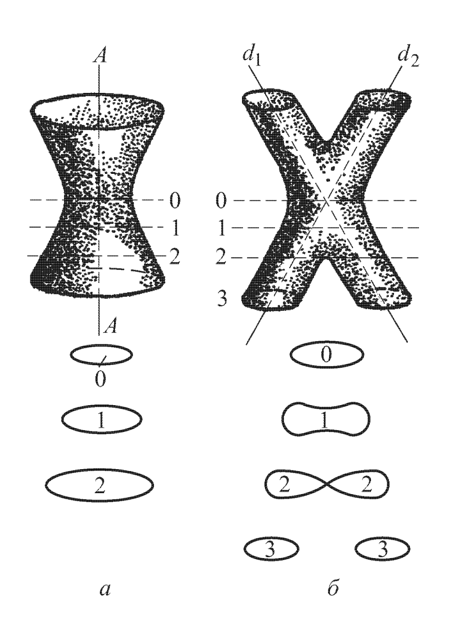


Рис. 26.22. Изохроматические поверхности и их сечения для одноосного (*а*) и двуосного (*б*) кристаллов

Если пластинка вырезана под углом к оптической оси, то разность $n_1 - n_2$ была бы различной при данном ψ для лучей, лежащих в разных азимутах, так как они составляли бы различные углы с оптической осью. Интерференционная картина имела бы иной вид, чем рассмотренный выше, поскольку совокупность точек поверхности, для которых $\delta = \text{const}$, не представляла бы в этом случае концентрических окружностей.

Геометрическое место точек на поверхности кристалла, для которых $\delta = \text{const}$, принято называть *изохроматической* кривой (кривая постоянного цвета). Если через точку O, представляющую вершину конуса лучей (внутри кристалла), провести все возможные направления (лучи) и найти на них точки, соответствующие заданной разности фаз δ, то геометрическое место точек составит *изохроматиче-*

скую поверхность. Поверхность эта для одноосного кристалла представляет собой (приблизительно) гиперболоид вращения, ось которого совпадает с осью кристалла (рис. 26.22 *а*). Сечения таких поверхностей плоскостью пластинки и представляют собой *изохроматы.* Для случая, когда пластинка вырезана перпендикулярно к оптической оси, они имеют вид окружностей; для пластинки, вырезанной параллельно оси, это (приблизительно) гиперболы.

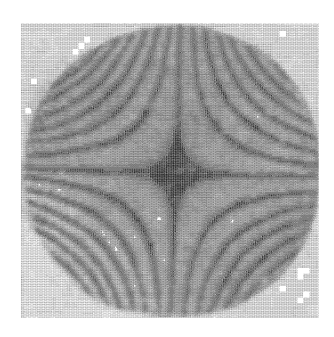


Рис. 26.23. Вид изохромат для пластинки одноосного кристалла, вырезанного параллельно оптической оси

Картина на экране F (см. рис. 26.20) не является изображением плоскости кристалла: освещенность в какой-либо точке экрана характеризует волны, вышедшие из пластинки в каком-то определенном направлении. В качестве же точки O, которая фигурировала при построении изохроматической поверхности, можно выбрать любую точку на первой плоскости кристалла. Однако интерференционные полосы на экране F имеют тот же общий вид, что и сечения изохроматической поверхности второй плоскостью пластинки, и эти полосы часто также называют изохроматическими линиями или изохроматами.

Рисунки 26.21 и 26.23 относятся к одноосному кристаллу, вырезанному перпендикулярно и параллельно оптической оси. В соответствии со сказанным относительно свойств изохроматической поверхности полосы имеют вид колец или гипербол.

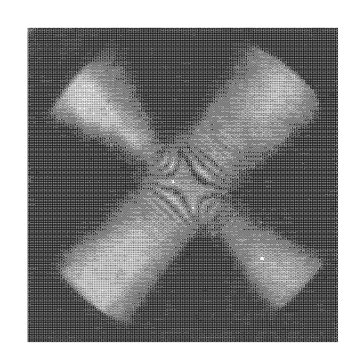


Рис. 26.24. Вид изохромат для пластинки двуосного кристалла, вырезанного перпендикулярно к биссектрисе угла между осями

В случае двуосного кристалла, характеризующегося наличием двух направлений, вдоль которых скорости обоих световых лучей совпадают, изохроматическая поверхность подобна двум сросшимся цилиндрам, оси которых совпадают с оптическими осями кристалла (см. рис. 26.22 *б*). Для пластинки, вырезанной параллельно осям, изохроматы имеют вид гипербол; для пластинки, вырезанной перпендикулярно к биссектрисе угла между осями, изохроматы имеют вид лемнискат[1]), полюсами которых служат места кажущегося (вследствие преломления) выхода оптических осей. Вместо темного (светлого)

[1]) Лемниската — кривая, каждая точка M которой отстоит от точек P и P' (полюсы лемнискаты) на расстоянии, удовлетворяющем условию $MP \cdot MP' = \text{const}$.

креста, характеризующего одноосную пластинку, вырезанную перпендикулярно к биссектрисе угла между осями, получим две гиперболы, проходящие через полюсы лемнискаты (рис. 26.24). При повороте пластинок они изменяются и в двух положениях сливаются в черный (светлый) крест. По положению полюсов лемнискат можно судить о кажущемся направлении оптических осей двуосного кристалла, а введя соответствующую поправку на преломление, найти истинный угол между осями.

§ 149. Эффекты пространственной дисперсии. Оптическая анизотропия кубических кристаллов

В § 142 отмечалось, что кубические кристаллы, в силу высокой степени их симметрии, должны быть оптически изотропными. Сравнительно недавно была обнаружена, однако, зависимость поглощения от поляризации света в кубическом кристалле закиси меди Cu_2O (Е.Ф. Гросс и А.А. Каплянский, 1960 г.) и анизотропия показателя преломления в кубическом кристалле кремния (Пастернак и Ведам, 1971 г.). Известны и другие явления, для описания которых обычная связь между электрической индукцией $\mathbf{D}$ и электрической напряженностью $\mathbf{E}$, введенная в § 142, оказывается недостаточной. Наиболее важным примером этих эффектов может служить естественная оптическая активность (гиротропия) кристаллов, сравнительно легко наблюдаемая и описанная в гл. XXX.

Формальную причину перечисленных выше явлений можно пояснить следующим образом. В § 142 неявно предполагалось, что индукция $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ в какой-либо точке $\mathbf{r}$ кристалла однозначно определяется значением напряженности электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ в той же точке:

$$D_i(\mathbf{r}) = \sum_j \varepsilon_{ij}(\omega) E_j(\mathbf{r}), \tag{149.1}$$

где $D_i(\mathbf{r})$, $E_i(\mathbf{r})$ — декартовы составляющие векторов $\mathbf{D}(\mathbf{r})$, $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, $\varepsilon_{ij}(\omega)$ — компоненты тензора диэлектрической проницаемости; индексы i, j нумеруют координатные оси x, y, z. В действительности такая *локальная* связь между $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ не всегда достаточна, так как $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ зависит также от значений $\mathbf{E}(\mathbf{r}')$ в иных точках кристалла $\mathbf{r}'$, расположенных вблизи точки $\mathbf{r}$.

Возможность нелокальной связи между $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ ясна из качественного рассмотрения, основанного на самой простой модели кристалла, согласно которой частицы, составляющие кристаллическую решетку (атомы, молекулы, ионы), совершают колебания около своих положений равновесия и, что особенно важно для нашей цели, взаимодействуют друг с другом. Электрическое поле смещает заряды из положения равновесия. В результате взаимодействия между частицами, расположенными в различных ячейках кристаллической решетки, смещение зарядов в какой-либо частице вызывает дополнительное смещение зарядов в соседних и более удаленных частицах. Поэтому поляризация среды $\mathbf{P}(\mathbf{r})$, а, следовательно, и индукция

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) + 4\pi\mathbf{P}(\mathbf{r})$$

зависят от значений напряженности не только в выделенной точке, но и в ее окрестности. Аналогичные соображения применимы и к изотропным средам, состоящим из асимметричных молекул (см. § 163, 164).

Размер a области взаимного влияния оказывается сравнительно небольшим и составляет обычно величину порядка постоянной решетки кристалла ($a \sim 10^{-8}$–10^{-7} см). Длина волны λ в оптической области спектра значительно больше, чем a, и на протяжении области влияния поле не может измениться сколько-нибудь существенно. Поэтому для описания взаимного влияния частиц достаточно представить электрическое поле в соседних точках $\mathbf{r}'$ в виде разложения в ряд Тейлора по степеням декартовых смещений относительно точки $\mathbf{r}$ и ограничиться первыми членами разложения. В связи со сказанным приходим к заключению, что соотношение между индукцией и напряженностью можно записать в виде

$$D_i(\mathbf{r}) = \\ = \sum_j \varepsilon_{ij}(\omega)E_j(\mathbf{r}) + \sum_{j,l} \gamma_{ijl}(\omega)\frac{\partial E_j}{\partial x_l} + \sum_{j,l,m} \alpha_{ijlm}(\omega)\frac{\partial^2 E_j}{\partial x_l\,\partial x_m}, \quad (149.2)$$

где x_j, x_l, x_m — декартовы компоненты вектора $\mathbf{r}$, а производные вычисляются в точке $\mathbf{r}$. Первая сумма в выражении (149.2) соответствует локальной связи (см. (149.1)) между $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, и все явления, рассмотренные ранее в главах XXVI, XXVII, описываются этой суммой. Вторая и третья суммы в (149.2) учитывают эффекты взаимного влияния, причем тензоры $\gamma_{ijl}(\omega)$ и $\alpha_{ijlm}(\omega)$ третьего и четвертого рангов не зависят от координаты $\mathbf{r}$ вследствие однородности кристалла.

При исследовании оптических свойств кристаллов, как правило, применяются плоские световые волны. В этом случае соотношение (149.2) существенно упрощается. Удобно воспользоваться комплексной записью колебаний, согласно которой плоские монохроматические волны представляются в форме

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = \mathbf{D}_0 \exp\left[-i(\omega t - \mathbf{kr})\right], \quad \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0 \exp\left[-i(\omega t - \mathbf{kr})\right], \quad (149.3)$$

где $\mathbf{k}$ — волновой вектор, $\mathbf{D}_0$ и $\mathbf{E}_0$ — постоянные комплексные векторы. Поскольку из (149.3) следует, что

$$\frac{\partial E_i}{\partial x_l} = ik_lE_j,$$

формула (149.2) приводится к виду

$$D_i(\mathbf{r},t) = \sum_j \varepsilon_{ij}(\omega,\mathbf{k})E_j(\mathbf{r},t), \quad (149.4)$$

где тензор $\varepsilon_{ij}(\omega,\mathbf{k})$ дается соотношением

$$\varepsilon_{ij}(\omega,\mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega) + i\sum_l \gamma_{ijl}(\omega)k_l - \sum_{l,m} \alpha_{ijlm}(\omega)k_lk_m. \quad (149.5)$$

Таким образом, в случае плоских монохроматических волн связь между $\mathbf{D}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ осуществляется тензором второго ранга, как и

в классической кристаллооптике (ср. (149.1)). Однако нелокальность, поясненная выше, приводит к зависимости тензора диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ не только от частоты света, но и от волнового вектора $\mathbf{k}$, т.е. от длины волны ($k = 2\pi/\lambda$), и от направления распространения света. Зависимость $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ от $\mathbf{k}$ называют *пространственной дисперсией среды* [1]). Этим же термином обозначают и факт нелокальности связи между индукцией и напряженностью поля, поскольку нелокальность представляет собой лишь иное словесное описание зависимости $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ от $\mathbf{k}$.

В соответствии с обсужденной выше причиной пространственной дисперсии значения тензоров $\gamma_{ijl}(\omega)$ и $\alpha_{ijlm}(\omega)$ по порядку величины равны a и a^2 соответственно (a — размер области влияния). Если принять $a = 10^{-7}$ см, $\lambda = 300$ нм, то $a/\lambda \approx 3 \cdot 10^{-3}$, $(a/\lambda)^2 \approx 10^{-5}$. Напомним, что двойному лучепреломлению, связанному с первым членом в выражении (149.5), отвечает различие показателей преломления обыкновенной и необыкновенной волн порядка 10^{-1}. Таким образом, эффекты пространственной дисперсии сравнительно слабы, и при рассмотрении многих вопросов ими можно пренебречь, чем и объясняется возможность описания ряда оптических явлений в кристаллах с помощью упрощенных соотношений (149.1). Тем не менее, существуют явления, определяющиеся исключительно пространственной дисперсией и представляющие интерес с различных точек зрения.

Для кубических кристаллов и изотропных сред тензор $\varepsilon_{ij}(\omega)$ сводится к скаляру, т.е.

$$\varepsilon_{ij}(\omega) = \varepsilon(\omega)\delta_{ij},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера ($\delta_{ij} = 1$, если $i = j$; $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$). Тензор $\gamma_{ijl}(\omega)$ в этом случае равен

$$\gamma_{ijl}(\omega) = \gamma(\omega)e_{ijl},$$

где $\gamma(\omega)$ — скаляр, а e_{ijl} — полностью антисимметричный тензор третьего ранга (e_{ijl} равен 0, если среди индексов i, j, l имеются одинаковые, и равен $+1$ или -1 в зависимости от того, получены ли эти индексы из 1, 2, 3 четным или нечетным числом перестановок).

Если принимать в расчет только первые два слагаемых в выражении (149.5) для $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$, то, как легко убедиться,

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + i\gamma(\omega)[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \mathbf{k}]. \tag{149.6}$$

---

[1]) Происхождение термина «пространственная дисперсия» объясняется следующим образом. Обычная, или временна́я, дисперсия сводится к зависимости оптических характеристик среды от частоты света. Легко показать, что на временно́м языке частотная зависимость $\varepsilon(\omega)$ означает существование инерционности частиц среды по отношению к взаимодействию со светом, вследствие чего поляризация среды в данный момент времени t зависит от значений поля в предыдущие моменты времени $t' \neq t$. Иными словами, существует нелокальная во времени связь между $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$. С этой точки зрения пространственная дисперсия есть пространственный аналог временно́й дисперсии.

Вектор $[\mathbf{E}, \mathbf{k}]$, как известно, перпендикулярен к $\mathbf{E}$ и $\mathbf{k}$. Кроме того, множитель i говорит о сдвиге фазы второго члена в (149.6) относительно первого на $\pi/2$. Поэтому оказывается, что второй член в (149.6) приводит к различию фазовых скоростей (или показателей преломления) для волн с правой и левой круговой поляризациями, т.е. к естественной оптической активности (см. гл. XXX).

Можно показать, что в средах, обладающих центром симметрии, величина $\gamma(\omega)$ тождественно обращается в нуль. В таком случае пространственная дисперсия проявляется лишь благодаря тем членам в выражении (149.6) для $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$, которые квадратично зависят от составляющих волнового вектора $\mathbf{k}$. Эти слагаемые и обусловливают слабую анизотропию кубических кристаллов. Действительно, в кубических кристаллах, как уже говорилось ранее, тензор $\varepsilon_{ij}(\omega)$ сводится к скаляру, т.е. его главные значения одинаковы. Если же принять во внимание третью сумму в выражении (149.5), то главные значения полного тензора диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ оказываются различными, и среду следует считать анизотропной.

Сложность наблюдения анизотропии кубических кристаллов обусловлена чрезвычайной малостью эффекта. Согласно приведенным выше оценкам, анизотропия в этом случае определяется квадратом отношения постоянной решетки к длине волны и по порядку величины равна 10^{-6}–10^{-5}. Поэтому обсуждаемый эффект был обнаружен лишь в 1960 г., о чем говорилось в начале параграфа, хотя Лорентц обратил внимание на возможность его существования еще в 1878 г.

Помимо упомянутых выше явлений, пространственная дисперсия вызывает и ряд других. Оказывается, в частности, что в кристалле с пространственной дисперсией в заданном направлении распространяются не две, а три или четыре волны с различными фазовыми скоростями (три волны в гиротропных средах и четыре в средах с центром инверсии). Новые волны, как показывают расчеты, могут быть существенными при частотах ω, близких к частотам полос поглощения кристалла.

Глава XXVII

ИСКУССТВЕННАЯ АНИЗОТРОПИЯ

§ 150. Введение

Громадное большинство оптически изотропных тел обладает «статистической» изотропией: изотропия таких тел есть результат усреднения, обусловленного хаотическим расположением составляющих их молекул. Отдельные молекулы или группы молекул могут быть анизотропны, но эта микроскопическая анизотропия в среднем сглаживается случайным взаимным расположением отдельных групп, и макроскопически среда остается изотропной. Но если какое-либо внешнее воздействие дает достаточно ясно выраженное преимущественное направление, то возможна перегруппировка анизотропных

элементов, приводящая к макроскопическому проявлению анизотропии. Не исключена возможность и того, что достаточно сильные внешние воздействия могут деформировать даже вначале изотропные элементы, создавая и микроскопическую анизотропию, первоначально отсутствующую. По-видимому, подобный случай имеет место при одностороннем сжатии каменной соли или сильвина (см. § 142.) Достаточные внешние воздействия могут проявляться и при механических деформациях, вызываемых обычным давлением или возникающих при неравномерном нагревании (тепловое расширение и закалка), или осуществляться электрическими и магнитными полями, налагаемыми извне. Известны даже случаи, когда очень слабые воздействия, проявляющиеся при течении жидкостей или пластических тел с сильно анизотропными элементами, оказываются достаточными для создания искусственной анизотропии.

§ 151. Анизотропия, возникающая при деформациях

Явление двойного лучепреломления при механической деформации было открыто Зеебеком (1813 г.) и Брюстером (1815 г.). В случае одностороннего сжатия или растяжения, например вдоль MN (рис. 27.1), это направление становится *выделенным* и играет роль оптической оси. Оптические свойства деформированного таким образом тела соответствуют свойствам *одноосного* кристалла. Показатели преломления n_e и n_o, соответствующие колебаниям, совершаемым вдоль направления MN и перпендикулярно к нему, максимально отличаются друг от друга.

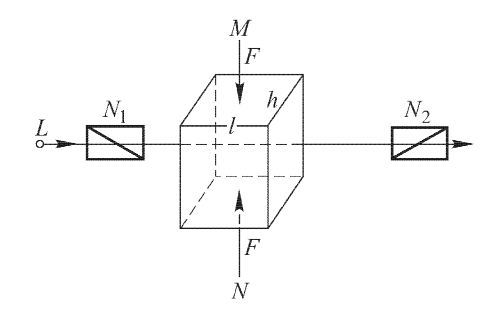


Рис. 27.1. Схема расположения приборов для наблюдения двойного лучепреломления при деформациях

Схема опыта для изучения искусственной анизотропии одинакова со схемой, применяемой при наблюдении двойного лучепреломления в кристаллах (см. рисунок); конечно, главные плоскости поляризаторов N_1 и N_2 должны составлять угол (лучше всего в 45°) с «осью» тела.

Опыт показывает, что разность $n_o - n_e$, являющаяся мерой анизотропии, пропорциональна величине напряжения $P = F/S = F/lh$, т.е. величине силы, приходящейся на единицу площади:

$$n_o - n_e = \varkappa P, \tag{151.1}$$

где $\varkappa$ — константа вещества.

Разность хода, приобретаемая лучами при прохождении слоя вещества толщины l, равна

$$\delta = l(n_o - n_e) = \varkappa Pl; \tag{151.2}$$

выражая, как часто делают, разность хода в длинах волн, найдем

$$\delta_1 = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{\varkappa}{\lambda} Pl = CPl, \tag{151.3}$$

где $C = \varkappa/\lambda$ — величина, характеризующая вещество.

Разность показателей преломления $n_o - n_e$ может быть положительной и отрицательной в зависимости от материала. Кроме того, n_o и n_e зависят от длины волны (дисперсия двойного лучепреломления), вследствие чего при наблюдении в белом свете искусственно анизотропное тело при скрещенных поляризаторах оказывается пестро окрашенным. Распределение окраски может служить хорошим качественным признаком распределения напряжений; кроме того, возникновение окрашенных полей оказывается более чувствительным признаком проявления анизотропии, чем простое просветление, имеющее место при монохроматическом свете.

Регистрация искусственной анизотропии является очень чувствительным методом наблюдения напряжений, возникающих в прозрачных телах. Его с успехом применяют для наблюдения за напряжениями, возникающими в стеклянных изделиях (паянных и прессованных), охлаждение которых производилось недостаточно медленно. К сожалению, громадное большинство технически важных материалов непрозрачно (металлы), вследствие чего этот прием к ним непосредственно не приложим. Однако в последнее время получил довольно широкое распространение оптический метод исследования напряжений на искусственных моделях из прозрачных материалов (целлулоид, ксилонит и т.д.). Приготовляя из такого материала модель (обыкновенно уменьшенную) подлежащей исследованию детали, осуществляют нагрузку, имитирующую с соблюдением принципа подобия ту, которая имеет место в действительности, и по картине между скрещенными поляризаторами изучают возникающие напряжения, их распределение, зависимость от соотношения частей модели и т.д. Хотя приводимые выше эмпирические закономерности, связывающие измеренную величину $n_o - n_e$ и величину напряжения P, позволяют в принципе по оптической картине заключить о численном распределении нагрузки по модели, однако практическое осуществление таких численных расчетов крайне затруднительно. Несмотря на ряд усовершенствований и в методике расчета, и в технике эксперимента, настоящий метод имеет главным образом качественное значение. Однако и в таком виде он дает в опытных руках довольно много, сильно сокращая предварительную работу по расчету новых конструкций. В настоящее время имеется уже обширная литература, посвященная применениям этого метода.

§ 152. Двойное лучепреломление в электрическом поле (явление Керра)

а. Общие сведения. Возникновение анизотропии под действием внешнего электрического поля представляет собой явление, с теоретической стороны значительно глубже разработанное, чем явления, изученные в предыдущем параграфе, и имеющее поэтому гораздо

большее значение как для понимания механизма анизотропии вообще, так и для вопросов, связанных с исследованием молекулярной структуры. Причина этого лежит прежде всего в том, что явление Керра удалось наблюдать в гораздо более простых для теоретической трактовки условиях, а именно в газах, хотя первые наблюдения относились к твердым телам и жидкостям, в которых этот эффект выражен значительно сильнее. Кроме того, механизм воздействия внешнего однородного электрического поля на молекулы гораздо проще и понятнее, чем эффекты механических деформаций, трактовка которых требует исследования воздействия на молекулы междумолекулярных электромагнитных полей, изменяющихся вследствие деформаций, т.е. исследования влияния очень сложного и плохо изученного фактора.

Вместе с тем явление Керра нашло за последние годы ряд чрезвычайно важных научных и научно-технических применений, основанных на способности его протекать практически безынерционно, т.е. следовать за очень быстрыми переменами внешнего поля. Таким образом, и по теоретической, и по практической ценности явление двойного лучепреломления в электрическом поле принадлежит к числу крайне интересных и важных. Как уже упоминалось (см. § 2), о желательности постановки подобных опытов писал еще Ломоносов (1756 г.); о неудаче попытки обнаружить, влияет ли электризация на преломляющую способность жидкости, сообщает Юнг (1800 г.); и лишь в 1875 г. были выполнены опыты Керра, надежно установившие явление. Керр показал, что многие *жидкие* диэлектрики становятся анизотропными под действием электрического поля. Опыты с жидкими диэлектриками имеют решающее значение, ибо для жидких веществ деформация, могущая возникнуть под действием электрического поля (электрострикция), не вызывает двойного лучепреломления[1]), так что в опытах с жидкостью мы имеем электрооптические явления в чистом виде. Описанный Керром эффект стал первым доказательством того, что оптические свойства вещества могут изменяться под влиянием электрического поля.

Наряду со знаменитым явлением Фарадея (вращение плоскости поляризации в магнитном поле, 1846 г.), которое было первым исследованным магнитооптическим эффектом, явление Керра сыграло важную роль в обосновании электромагнитной теории света. В более поздние годы (1930 г. и позже) удалось наблюдать двойное лучепреломление под действием электрического поля в парах и газах. Измерения эти гораздо труднее измерений в жидкостях вследствие малости эффекта, зато теория явления приложима к ним с меньшими оговорками.

б. Методы наблюдения и экспериментальные данные. Под влиянием электрического поля вещество становится в оптическом отношении подобным одноосному кристаллу с оптической осью вдоль направления электрической напряженности, являющегося осью симметрии.

[1]) Исключения составляют очень вязкие жидкости (например, желатин, пропитанный водой), в которых наблюдались подобные явления.

Схема наблюдения явления изображена на рис. 27.2. Главные плоскости поляризаторов N_1 и N_2 составляют с направлением поля угол, отличный от нуля (лучше всего 45°).

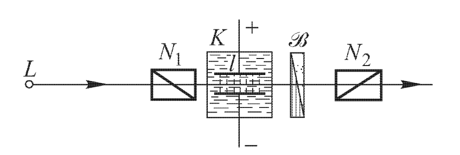


Рис. 27.2. Схема расположения приборов для наблюдения двойного лучепреломления в электрическом поле

Если поляризаторы скрещены и электрическое поле не наложено, то свет не проходит через эту систему. При наложении электрического поля жидкость между обкладками конденсатора становится двоякопреломляющей, так что свет, выходящий из K, оказывается эллиптически-поляризованным и может быть исследован при помощи компенсатора $\mathscr{B}$.

Опыт показывает, что для монохроматического света данной длины волны λ разность показателей преломления $n_e - n_o$ пропорциональна квадрату напряженности поля E:

$$n_e - n_o = \varkappa E^2, \tag{152.1}$$

и, следовательно, разность хода, приобретаемая лучами на пути l, равна

$$\delta = l(n_e - n_o) = \varkappa l E^2 \tag{152.2}$$

(здесь и дальше предполагается, что поле однородно, а луч перпендикулярен к направлению поля).

Выражая эту разность в длинах волн, получаем сдвиг фазы

$$\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = 2\pi B l E^2, \tag{152.3}$$

где $B = \varkappa/\lambda$ — постоянная Керра.

Как видно из квадратичной зависимости δ от E, сдвиг фазы *не зависит от направления поля.*

Для большинства жидкостей $n_e > n_o$, т.е. $B > 0$: их анизотропия соответствует анизотропии положительного кристалла. Есть, однако, жидкости, для которых $B < 0$ (например, этиловый эфир, многие масла и спирты). Числовые значения постоянной Керра для разных веществ весьма различны. Максимальным значением B среди всех известных веществ обладает нитробензол, для которого $B \approx 2 \cdot 10^{-5}$ СГСЭ [1]). Таким образом, если, например, на обкладки конденсатора длиной $l = 5$ см с расстоянием между ними $d = 1$ мм наложена разность потенциалов в 1500 В, т.е. напряженность поля равна 15 000 В/см = 50 СГСЭ, то разность фаз в нитробензоле достигает $\pi/2$, иными словами, такой конденсатор Керра действует, как пластинка в четверть волны. Понятно, что нетрудно обнаружить гораздо меньшую разность фаз, и, следовательно, опыты с нитробензо-

[1]) Мы оставляем в стороне некоторые материалы (например, коллоидный раствор одного сорта глины, так называемого бентонита), для которых постоянная Керра может достигать значений, в 10^6 раз бо́льших. Эти материалы представляют некоторый интерес для техники.

лом не наталкиваются на какие-либо трудности, связанные с чувствительностью. Поэтому нитробензол находит себе широкое применение во всех технических устройствах.

Для других жидкостей постоянная Керра значительно меньше; например, для хлорбензола она равна $10 \cdot 10^{-7}$, для воды $5 \cdot 10^{-7}$, для сероуглерода $3{,}5 \cdot 10^{-7}$, для бензола $0{,}5 \cdot 10^{-7}$ СГСЭ. Еще меньше постоянная Керра для газов. Так, для парообразного сероуглерода (при давлении 900 мм рт. ст. и температуре 57 °С) $B = 3{,}6 \cdot 10^{-10}$, для парообразного нитробензола $27 \cdot 10^{-10}$, а для такого газа, как азот, всего лишь $0{,}4 \cdot 10^{-10}$ СГСЭ.

Из приведенных данных, относящихся к длине волны $\lambda = 546{,}0$ нм (зеленая линия), видно, насколько трудно исследование явления Керра в газах. В первых измерениях этого рода применялся конденсатор с длиной пластин 50 см и с расстоянием между ними около 4 мм, на которые накладывалась разность потенциалов 15 000–20 000 В, так что напряженность поля достигала 40 000–50 000 В/см и получающаяся разность хода измерялась с помощью специальных анализаторов с точностью до $5 \cdot 10^{-6}$ длины волны.

Постоянная Керра увеличивается при уменьшении длины волны (дисперсия) и сильно уменьшается при повышении температуры.

В обычной схеме наблюдения определяется только разность $n_e - n_o$; можно, однако, определить и значения n_e и n_o в отдельности. Для этой цели измеряют разность $n_e - n$ или $n_o - n$, т.е. разность между показателем преломления необыкновенного (или обыкновенного) луча и показателем преломления вещества *вне* электрического поля.

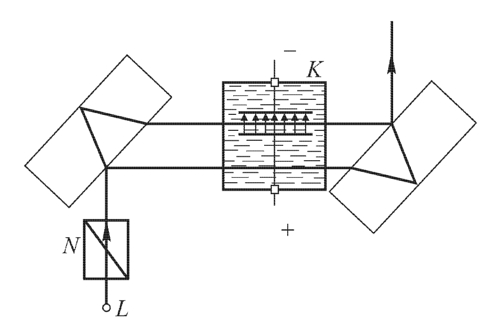


Рис. 27.3. Схема интерференционного метода наблюдения разности $n_e - n$ или $n_o - n$ при двойном лучепреломлении

Такие определения можно выполнить интерференционным методом по схеме рис. 27.3. Сущность этого метода, принадлежащего Л.И. Мандельштаму, состоит в том, что один из лучей в интерферометре Жамена пропускают через жидкость, помещаемую в электрическое поле (между пластинками конденсатора, расположенного в кювете K), а другой луч направляют через жидкость, находящуюся вне электрического поля. Измеряя смещение полос интерференционной картины при включении электрического поля, определяем $n_e - n$ или $n_o - n$ в зависимости от первоначальной установки поляризатора N. Если поляризатор установлен так, что колебания вектора электрического поля света происходят параллельно внешнему полю (вдоль «оптической оси»), то наблюдаемое смещение полос определяет величину $n_e - n$; при повороте поляризатора на 90° — величину $n_o - n$.

Результаты тщательных измерений величин $n_e - n$ и $n_o - n$ дают (для большинства веществ)

$$\frac{n_e - n}{n_o - n} = -2. \tag{152.4}$$

в. Явление Керра, вызванное электрическим полем мощного импульса света. Выше речь шла о возникновении двойного лучепреломления в изотропной среде под действием постоянного электрического поля. Такое же явление наблюдается и в переменном электрическом поле и даже в поле световой волны.

Развитие лазерной техники позволило генерировать импульсы света с напряженностью электрического поля, достигающей очень больших значений (см. ниже гл. XL), и экспериментально доказано, что под действием поля мощного импульса света в жидкостях возникает двойное лучепреломление. В первом опыте такого рода (Майер и Жирэ, 1964 г.) длительность импульса света составляла $5{,}5 \cdot 10^{-8}$ с, энергия 0,14 Дж, а среднеквадратичная напряженность $\sqrt{\overline{E^2}} = 39$ кВ/см. Принципиальная схема опыта показана на рис. 27.4.

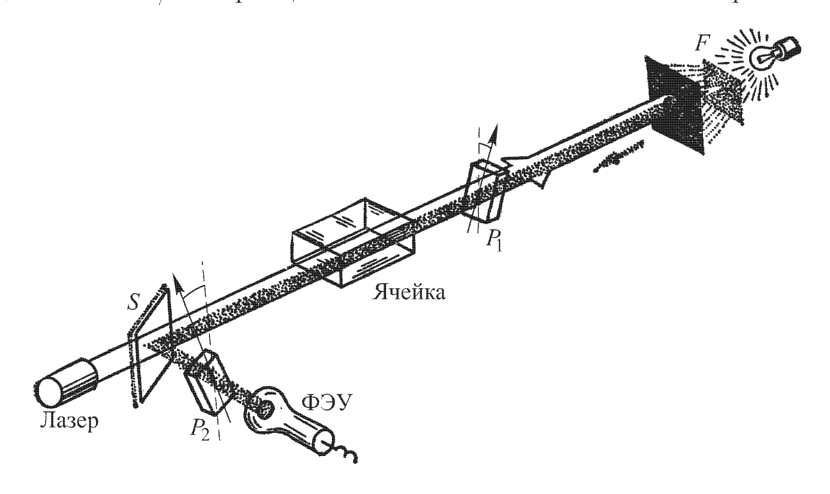


Рис. 27.4. Принципиальная схема опыта по созданию двойного лучепреломления под действием мощного импульса света

После светофильтра F голубой свет ($\lambda \approx 500$ нм) справа налево проходит через ячейку, наполненную изучаемой жидкостью, и, отразившись от пластинки S, попадает на фотоумножитель ФЭУ. При скрещенных поляризаторах (как на рис. 27.4) голубой свет не может попасть в ФЭУ.

Если в такую установку слева направо входит мощный импульс света, то он вызывает в жидкости двойное лучепреломление и голубой свет будет попадать на ФЭУ, пока импульс проходит через ячейку с жидкостью. Для определения постоянной Керра B измеряется разность хода δ (см. (152.2)), создаваемая под действием поля лазерного

импульса, а затем в ячейке такой же длины и с тем же веществом добиваются той же разности хода, накладывая постоянное поле. Оказалось, что равные разности хода в случае бездипольных молекул жидкости создаются практически равными напряженностями поля, что означает равенство постоянных Керра в статическом поле и при световой частоте.

Однако для дипольных молекул результат оказывается существенно иным. Например, для нитробензола постоянная Керра в поле световой частоты приблизительно в 100 раз меньше, чем в статическом или квазистатическом поле.

г. Основы теории явления. С молекулярной точки зрения объяснение явления Керра лежит в оптической анизотропии молекул жидкости или газа, в которых наблюдается этот эффект. Такие анизотропные молекулы в поле световой волны обнаруживают бо́льшую или меньшую поляризуемость в зависимости от ориентации их по отношению к электрическому вектору световой волны. Однако в обычных условиях молекулы, составляющие среду, расположены вполне хаотически, так что при распространении световой волны с любым направлением электрического вектора и по любому направлению она будет встречать в среднем одинаковые условия: среда ведет себя как макроскопически изотропная. Но если наложение достаточно сильного электрического поля вызовет преимущественную ориентацию молекул, то некоторое направление в среде окажется направлением большей поляризуемости, чем другие. Поэтому и скорость распространения световых волн будет зависеть от расположения электрического вектора волны внутри среды, т.е. от направления распространения световых волн и характера их поляризации: среда приобретает анизотропный характер.

Так как внешнее электрическое поле является осью симметрии, то диэлектрические проницаемости вдоль поля и в перпендикулярном направлении будут различны; но все направления, перпендикулярные к направлению поля, равноправны. Выбрав оси координат вдоль поля (z) и в двух взаимно перпендикулярных направлениях, например вдоль луча (y) и перпендикулярно к нему (x), получим три главных направления со значениями диэлектрической проницаемости ε_z и $\varepsilon_x = \varepsilon_y$. Таким образом, эллипсоид диэлектрической проницаемости есть эллипсоид вращения, и среда подобна одноосному кристаллу, причем направление электрического поля представляет собой оптическую ось.

Ориентация анизотропных молекул под действием внешнего электрического поля может происходить двояким образом. Первоначальная теория (Ланжевен, 1910 г.) рассматривала молекулы, которые не имеют собственного электрического момента, но приобретают его под действием внешнего поля. В первом приближении величину приобретенного молекулой момента μ можно считать пропорциональной напряженности внешнего поля E, т.е. $\mu = \varkappa E$. Для анизотропных молекул $\varkappa$ зависит от направления внутри молекулы, и μ не совпадает с направлением действующего поля. Поэтому возникает пара сил, момент которой стремится ориентировать молекулы осью наибольшей поляризуемости вдоль поля. Таким образом, среда становится анизотропной. Направление этого момента остается неизменным при изме-

нении направления поля на противоположное, и поэтому даже при световых частотах поля происходит ориентация молекул.

Если на среду падает свет, то наибольший показатель преломления будут иметь волны, электрический вектор которых направлен вдоль линии максимальной поляризуемости, т.е. вдоль внешнего поля. Так как направление внешнего поля играет по отношению к среде роль оптической оси, то, следовательно, волна с наибольшим показателем преломления есть волна необыкновенная (колебание вдоль оси), т.е. $n_e > n_o$ и $B > 0$.

Таким образом, теория Ланжевена объясняет явление Керра, но оставляет непонятным существование (хотя и в меньшем количестве) веществ, для которых $n_e < n_o$, т.е. $B < 0$.

Борн (1916 г.) дополнил теорию Ланжевена, приняв во внимание возможность существования молекул со *значительным постоянным электрическим моментом*, направление которого может не совпадать с направлением наибольшей поляризуемости. В таком случае молекула ориентируется внешним полем так, что по направлению внешнего поля стремится установиться ее постоянный момент, а направление наибольшей поляризуемости (т.е. наибольшей диэлектрической проницаемости) может составить заметный угол с направлением внешнего поля (играющим роль оптической оси). В зависимости от взаимного расположения этих двух направлений вещество может характеризоваться положительным или отрицательным значением постоянной Керра B. В частности, если направление максимальной поляризуемости совпадает с направлением постоянного момента, то $B > 0$; если они взаимно перпендикулярны, то $B < 0$. При некотором промежуточном положении B может равняться нулю, т.е. вещество не обнаруживает явления Керра. Отсюда понятно, почему вещества с близкими электрическими моментами и не сильно различающимися поляризуемостями (показателями преломления) могут очень сильно отличаться по отношению к эффекту Керра. Так, метилбромид имеет постоянную Керра, в сотни раз бóльшую, чем метиловый спирт, хотя электрические моменты их и поляризуемости отличаются незначительно.

При световых частотах внешнего поля дипольная молекула, вследствие своей инерционности, не успевает ориентироваться в такт с изменениями направления напряженности поля; следовательно постоянный дипольный момент молекулы перестает вносить свой вклад в постоянную Керра. Поэтому при световых частотах внешнего поля постоянная Керра нитробензола, например, в 100 раз меньше, чем в статическом поле.

Молекулярно-кинетическое вычисление анизотропии, возникающей под действием электрического поля, требует статистического учета всех возможных ориентаций молекул под действием внешнего поля E и теплового движения. Оно приводит к результатам, согласным с опытом, а именно: постоянная Керра должна быть пропорциональна квадрату напряженности внешнего поля и уменьшается с увеличением температуры, ибо под действием тепловых столкновений расстраивается ориентация молекул, определяющая возникновение анизотропии.

Как уже упоминалось, ориентационная теория может претендовать на количественное совпадение с опытом только в случае газов, когда можно не учитывать взаимодействия между молекулами, характерные для жидкостей. Приводимая табл. 27.1 для парообразного этилхлорида показывает, насколько хорошо температурная зависимость согласуется с опытом.

Таблица 27.1

Температурная зависимость постоянной Керра *B* для этилхлорида

Абсолютная температура, K	$B \cdot 10^{10}$ при 760 мм рт. ст.	
	наблюденная	вычисленная
291	9,55	9,55
328,7	7,25	7,30
377	4,42	4,40
452,5	2,56	2,61

Исходя из общих соображений, можно также до известной степени сделать понятным, почему разность $n_e - n_o$ в явлении Керра пропорциональна *квадрату* напряженности электрического поля. Действительно, изменение знака поля соответствует изменению на 180° положения кристалла, которому уподобляется вещество в электрическом поле, т.е. переворачиванию кристалла. Но такое переворачивание не меняет оптических свойств кристалла. Следовательно, и оптические свойства вещества не должны зависеть от направления электрического поля, т.е. разность $n_e - n_o$ должна быть пропорциональна четной степени напряженности поля, и именно второй, ибо члены высшего порядка играют меньшую роль. Теория также приводит к отношению $\dfrac{n_e - n}{n_o - n} = -2$, установленному на опыте.

д. Время существования явления Керра. Некоторые применения ячейки Керра. Для исследования природы явления Керра немаловажно решение вопроса о длительности процессов, приводящих к возникновению или исчезновению двойного лучепреломления в электрическом поле.

Измерение времени существования явления Керра было начато Абрагамом и Лемуаном (1899 г.) и несколько раз повторялось вплоть до 1939 г. Во всех этих работах не удавалось измерить искомое время с удовлетворительной точностью, но можно было только сказать, что оно меньше 10^{-8} с, а в некоторых случаях даже меньше 10^{-9} с.

Количественное определение времени существования явления Керра удалось произвести только с применением мощных и коротких импульсов лазерного света. На рис. 27.5 представлена схема опыта. Мощный импульс света с длиной волны $\lambda = 1{,}06$ мкм и длительностью порядка 10^{-12} с проходит через кристалл дигидрофосфата калия KH_2PO_4 (KDP), в котором небольшая его часть превращается в свет с удвоенной частотой, т.е. его длина волны $\lambda = 0{,}53$ мкм (подробно об этом явлении см. § 236). Зеркало S_1 пропускает инфракрасный свет и отражает зеленый, а зеркало S_2 пропускает зеленый и отражает инфракрасный. За зеркалом S_2 расположена ячейка с изучаемым веществом между скрещенными поляризаторами P_1 и P_2. После

P_2 помещается светофильтр F, отсекающий инфракрасный и пропускающий на фотоумножитель ФЭУ только зеленый свет. Можно так расположить детали установки, чтобы оптические пути зеленого и инфракрасного лучей были одинаковыми. С помощью пластинок стекла D различной толщины можно задерживать прибытие зеленого луча

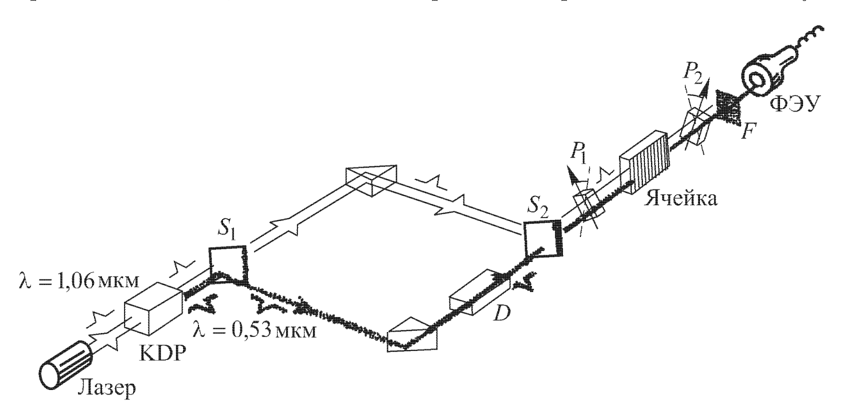


Рис. 27.5. Схема для определения времени исчезновения двойного лучепреломления

в ячейку на различные промежутки времени. Устройства различной конструкции, позволяющие создавать задержку в прибытии одного сигнала относительно другого, носят название *линий задержки*. Мощный импульс инфракрасного излучения создает в ячейке двойное лучепреломление, в результате которого зеленый свет также проходит через всю систему и достигает фотоумножителя.

Если зеленый свет дойдет до ячейки раньше мощного импульса или много позже его, то он, разумеется, не сможет достигнуть фотоумножителя.

Во всех промежуточных случаях, которые можно осуществлять, меняя величину задержки, на фотоумножитель будет попадать нарастающее количество света, которое достигнет максимума и затем начнет уменьшаться. Как показывают расчеты, время существования явления Керра, или, что то же самое, время релаксации анизотропии, может быть определено из хода убывания интенсивности света зеленого импульса в зависимости от разности времен прихода обоих импульсов.

Такие измерения показали, что время релаксации анизотропии в сероуглероде равно $2\cdot10^{-12}$ с, а в нитробензоле $50\cdot10^{-12}$ с. Полученные таким способом данные находятся в хорошем согласии с косвенными методами измерения этих величин (см. § 161 г).

Ячейка Керра, работающая в электрическом поле короткого мощного светового импульса, может служить фотографическим затвором, который позволяет делать время экспозиции порядка 10^{-12} с. Она с успехом применяется для изучения длительности люминесценции и других молекулярных процессов. Ячейка Керра, подобная изобра-

женной на рис. 27.2, может служить для модуляции интенсивности света; необходимо только питать конденсатор напряжением высокой частоты.

Если к обкладкам конденсатора Керра подавать импульс напряжения, то ячейка играет роль затвора, длительность действия которого определяется длительностью электрического импульса.

Ячейки Керра как модулятор и затвор применяются для управления режимом работы оптических квантовых генераторов (см. § 226).

Благодаря чрезвычайной быстроте установления и исчезновения эффекта Керра оказалось возможным использовать его для многих научных и технических целей.

§ 153. Двойное лучепреломление в магнитном поле (явление Коттон–Мутона)

Аналогично возникновению двойного лучепреломления в электрическом поле возможно также и создание искусственной анизотропии под действием магнитного поля. Если анизотропные молекулы обладают дополнительно постоянным магнитным моментом (парамагнитное тело), подобно тому, как молекулы, будучи анизотропными, обладают постоянным электрическим моментом, то их поведение под действием магнитного поля должно представлять аналогию с явлением, наблюдаемым в электрическом поле. В отсутствие внешнего магнитного поля хаотическое расположение молекул обеспечивает макроскопическую изотропию среды, несмотря на анизотропию отдельных молекул. Наложение достаточно сильного магнитного поля, воздействующего на магнитные моменты молекул, ориентирует их определенным образом относительно этого внешнего поля. Ориентация анизотропных молекул сообщает всей среде свойства анизотропии, которые можно наблюдать обычным способом. Действительно, удалось обнаружить возникновение двойного лучепреломления под действием сильного магнитного поля, направленного поперечно к линии распространения света. Схема расположения опыта аналогична схеме, применяемой для наблюдения явления Керра. Закон двойного лучепреломления в магнитном поле, который можно вывести на основании этих опытов, аналогичен находимому для явления Керра, а именно, он имеет вид

$$n_e - n_o = BH^2 \quad \text{или} \quad \frac{\delta}{\lambda} = \frac{l(n_e - n_o)}{\lambda} = ClH^2, \tag{153.1}$$

где H — напряженность магнитного поля, $C = D/\lambda$ — *постоянная*, зависящая от свойств среды. Величина этой постоянной очень мала, так что результат удалось получить лишь благодаря применению мощного магнита, позволявшего создавать сильные поля в больших объемах. Так, для нитробензола найдено $C = 2{,}53 \cdot 10^{-12}$ СГСМ. Это значит, что, например, в поле 20 000 Э при длине светового пути, равной 8 см, разность хода двух компонент равнялась 0,008 λ, что соответствует разности фаз всего около 3°. Закономерности и теория описываемого явления представляют полную аналогию с закономерностями и теорией явления Керра.

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ОПТИКА

Глава XXVIII

ДИСПЕРСИЯ И АБСОРБЦИЯ СВЕТА

§ 154. Трудности электромагнитной теории Максвелла

Световая волна в вакууме представляет собой переменное электромагнитное поле высокой частоты, распространяющееся с постоянной скоростью ($c = 2{,}9979 \cdot 10^{10}$ см/с), не зависящей от частоты. Последнее обстоятельство может считаться установленным с большой степенью достоверности наблюдениями над астрономическими явлениями. Так, исследование затмения удаленных двойных звезд не обнаруживает никаких аномалий в спектральном составе света, доходящего до нас в начале и конце затмений. Между тем затмение звезды или выход ее из тени своего спутника означает обрыв или начало распространения светового импульса, далеко не монохроматического и могущего рассматриваться как результат наложения многих монохроматических излучений. Если бы скорость этих излучений в межпланетном пространстве была различна, то импульс должен был бы дойти до нас значительно деформированным. Например, предположим для простоты, что этот импульс можно уподобить двум почти монохроматическим группам, «синей» и «красной», и примем, что скорость распространения «красной» группы больше, чем «синей»; мы должны были бы наблюдать при начале затмения изменение цвета звезды от нормального к синему, а при окончании его — от красного к нормальному. При огромных расстояниях, отделяющих от нас двойные звезды, даже ничтожная разница в скоростях должна была бы дать заметный эффект. В действительности же такой эффект не имеет места. Так, наблюдения Араго над переменной звездой Алголь привели его к заключению, что разность между скоростью распространения красного и фиолетового излучения во всяком случае меньше одной стотысячной величины самой скорости. Эти и подобные наблюдения заставляют признать, что дисперсия света в межпланетном пространстве [1]) отсутствует. При вступлении же в обычные среды свет испытывает изменение скорости (рефракция или преломление), и притом для раз-

[1]) Межпланетное пространство может рассматриваться как наиболее полное приближение к вакууму. По астрофизическим данным средняя плотность вещества в межпланетном пространстве — около одного атома на 1 см^3, тогда как в лучших вакуумных приборах она не меньше 10^4 атомов на 1 см^3 (а обычно гораздо больше).

ных частот скорость в средах оказывается различной, т.е. показатель преломления n зависит от частоты или длины волны: $n = f(\lambda)$ (дисперсия света).

Наличие дисперсии света является одним из фундаментальных затруднений первоначальной электромагнитной теории света Максвелла. Эта теория, связавшая воедино электромагнитные и оптические явления, представляла громадный шаг вперед и стала научным обобщением крупнейшего масштаба. Теория Максвелла позволила раскрыть смысл явления Фарадея (вращение плоскости поляризации в магнитном поле), открытого почти за четверть века до того; она, несомненно, стимулировала дальнейшие изыскания в области магнето- и электрооптики, приведшие к двум важным открытиям Керра: двойного лучепреломления в электрическом поле и поворота плоскости поляризации при отражении от намагниченного ферромагнетика. Наконец, теория Максвелла устранила ряд неясностей и противоречий «упругой» оптики.

Важнейшим выводом теории Максвелла явилось положение, согласно которому скорость распространения электромагнитного поля в вакууме равняется отношению электромагнитных и электростатических единиц силы тока; второй, не менее важный вывод гласил, что показатель преломления электромагнитных волн равняется $\sqrt{\varepsilon\mu}$, где ε — диэлектрическая, а μ — магнитная проницаемости среды. Таким образом, скорость распространения электромагнитной волны, в частности света, оказалась связанной с константами вещества, в котором распространяется свет. Эти константы первоначально вводились в уравнения Максвелла формально и имели чисто феноменологический характер. Напомним, что в механической (упругой) теории никакой связи между оптическими характеристиками среды (скорость света) и ее механическими свойствами (упругость, плотность) установлено не было. Известно, что для целого ряда газообразных и жидких диэлектриков соотношение Максвелла $n = \sqrt{\varepsilon\mu} \approx \sqrt{\varepsilon}$ (ибо μ близко к 1) выполняется достаточно хорошо; об этом свидетельствуют следующие данные для различных веществ:

	n	$\sqrt{\varepsilon}$
Азот	1,000299	1,000307
Водород	1,000139	1,000139
Углекислота	1,000449	1,000485
Гелий	1,000035	1,000037
Закись азота	1,000507	1,000547
Толуол жидкий	1,499	1,549
Бензол	1,501	1,511

Однако для многих других тел, например для стекла и таких жидкостей, как вода и спирты, ε гораздо больше n^2. Так, для воды $n^2 = 1,75$, тогда как $\varepsilon = 81$. Кроме того, как уже сказано, показатель преломления зависит от длины волны (дисперсия). Таким образом, выяснилась необходимость дополнения уравнений Максвелла какой-либо

моделью среды, описывающей явление дисперсии. Трудности объяснения дисперсии света в рамках представлений электромагнитной теории полностью устраняются электронной теорией, позволившей дать молекулярное истолкование феноменологическим параметрам ε и μ и объяснившей одновременно влияние частоты электромагнитного поля на ε и, следовательно, на n.

§ 155. Дисперсия света. Методы наблюдения и результаты

Любой метод, который применяется для определения показателя преломления, — преломление в призмах, полное внутреннее отражение, интерференционные приборы — может служить для обнаружения дисперсии.

Первые экспериментальные исследования дисперсии света, принадлежащие Ньютону (1672 г.) [1], были выполнены по способу преломления в призме, представляющему и поныне хороший метод для демонстраций и исследований. Направляя пучок белого света от линейного источника (щель), параллельного ребру призмы, и проецируя изображение щели на экран, мы не только наблюдаем отклонение изображения (преломление в призме), но вследствие зависимости угла преломления от длины волны получаем изображение щели растянутым в виде цветной полосы (спектр). При сравнении спектров, полученных с помощью призм с равными преломляющими углами, но из разных веществ, можно заметить, что спектры не только отклонены на разные углы, что обусловлено разными значениями n для одной и той же длины волны λ, но и растянуты на бóльшую или меньшую длину вследствие различия в величине дисперсии для разных веществ. Так, при сравнении одинаковых призм из воды и сероуглерода мы увидим, что во втором случае спектр (от красных до фиолетовых лучей) в 5–6 раз длиннее, чем в первом.

Измеряя показатель преломления для разных длин волн, можно исследовать дисперсионную способность вещества призмы, т.е. функцию $n = f(\lambda)$. Очень наглядный метод, обрисовывающий характер дисперсии материала призмы, был применен еще Ньютоном в его первых исследованиях. Это метод скрещенных призм, состоящий в том, что свет проходит последовательно через две призмы, преломляющие ребра которых расположены перпендикулярно друг к другу (рис. 28.1). Цветная полоска, получающаяся в результате действия одной призмы, отклоняется второй призмой в разных своих частях различно в зависимости от величины показателя преломления, так что окончательная форма и расположение спектра определяются величиной дисперсии обеих призм.

[1]) Разложение солнечного света в спектр в естественных условиях происходит в радуге, известной, конечно, с незапамятных времен. Декарт дал элементарную теорию радуги, основанную, по существу, на допущении зависимости показателя преломления от длины волны, но посвященную главным образом вычислению углов, под которыми видны радуги разных порядков. Ньютон в своей «Оптике» воспроизводит рассуждения Декарта с указанием, что происхождение цветов оставалось Декарту неясным.

На основании своих сравнительно немногочисленных опытов Ньютон пришел к ошибочному заключению, что относительная дисперсия (см. § 86) различных прозрачных веществ одинакова. В настоящее время нам известно, что зависимость между показателем преломления и дисперсией может быть весьма сложной, причем возрастание дисперсии не всегда идет рука об руку с увеличением преломления, хотя обычно подобный параллелизм наблюдается. Даже общий ход дисперсии — увеличение показателя преломления при уменьшении длины волны — не всегда имеет место. Леру (1862 г.), наблюдая преломление в призме, наполненной парами йода, обнаружил, что синие лучи преломляются меньше, чем красные (другие лучи поглощаются йодом и от наблюдения ускользают). Эту особенность Леру назвал *аномальной дисперсией* — название, удержавшееся и до нашего времени. Аномальный ход дисперсии наблюдается и в жидкостях: исследуя спектр при помощи призмы, наполненной раствором фуксина, обнаружим, что фиолетовые лучи отклоняются меньше, чем красные.

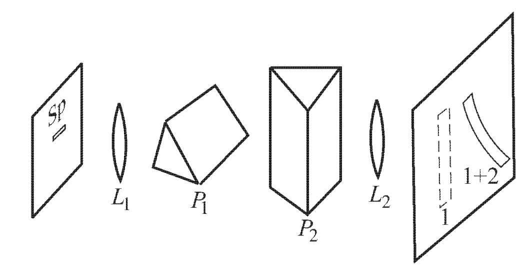


Рис. 28.1. Метод скрещенных призм Ньютона

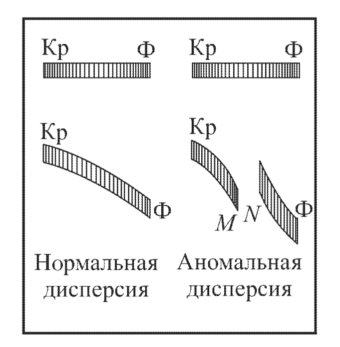


Рис. 28.2. Вид спектра, получаемого по методу скрещенных призм

Систематические исследования Кундта, который использовал для своих опытов метод скрещенных призм, установили важный закон, согласно которому явление аномальной дисперсии тесно связано с поглощением света: все тела, обладающие аномальной дисперсией в какой-либо области (рис. 28.2), сильно поглощают свет в этой области. Показатель преломления вблизи полосы поглощения меняется настолько быстро, что значение его со стороны более длинных волн (точка M) больше, чем со стороны коротких (точка N). Аномальный ход показателя преломления, т.е. его уменьшение при уменьшении длины волны, имеет место внутри полосы от точки M к N, где наблюдения очень трудны вследствие поглощения света.

Рисунок 28.3 воспроизводит в форме кривой результаты наблюдения над дисперсией раствора цианина в области полосы поглощения: от A до B показатель преломления уменьшается, т.е. имеет аномальный ход. Общий ход показателя преломления на некотором расстоянии от полос поглощения соответствует обычному нормальному ходу диспер-

сии: медленное увеличение показателя преломления по мере уменьшения длины волны. Такой же ход имеет показатель преломления для прозрачных тел (стекло или кварц, например) на всем протяжении видимого спектра. Однако по мере продвижения в ультрафиолетовую или инфракрасную части спектра показатель преломления этих веществ начинает меняться довольно быстро, что указывает на приближение к полосам поглощения, которые действительно расположены в соответствующих участках спектра.

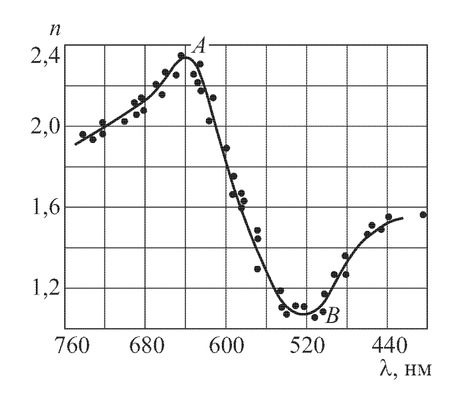


Рис. 28.3. Ход показателя преломления в цианине в области полосы поглощения

Таким образом, детальное исследование показывает, что всякое вещество имеет свои полосы поглощения, и общий ход показателя преломления обусловлен распределением этих полос по спектру. Поэтому противопоставление понятий нормальной и аномальной дисперсии теряет смысл. Полная дисперсионная картина для любого вещества состоит из областей аномальной дисперсии, соответствующих областям внутри полос или линий поглощения, и областей нормальной дисперсии, расположенных между полосами поглощения.

Связь между аномальной дисперсией и поглощением позволила Кундту высказать соображение, что сильно поглощающие газы или пары должны также обладать аномальной дисперсией. Несколько лет спустя Кундту удалось наблюдать ожидаемое явление при лекционной демонстрации поглощения света парами натрия. Свет от источника разлагается в спектр при помощи вертикально поставленной призмы, дававшей спектр в виде горизонтальной полоски. На пути лучей была расположена горелка, в пламя которой вводились пары натрия. На экране обнаружилось не только появление темной полосы в желтой части спектра, характерной для поглощения света в парах натрия, но и *загиб* спектральной полоски в разные стороны по бокам области поглощения. В этой случайно наблюденной картине Кундт сразу узнал явление аномальной дисперсии. Конусообразный столб паров натрия, поднимавшийся над горелкой, играл роль призмы с горизонтальным преломляющим ребром (основание внизу), скрещенной с первой стеклянной призмой, стоявшей вертикально. Как видно из рис. 28.4, более длинноволновая часть *а* преломляется сильнее, чем более коротковолновая область *б*, для которой показатель преломления даже меньше единицы.

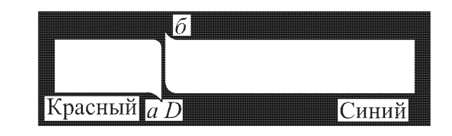


Рис. 28.4. Аномальная дисперсия в парах натрия (демонстрационный опыт)

Пары натрия имеют в желтой части спектра не одну линию поглощения, а две очень резкие и тонкие линии, расположенные на расстоянии 0,6 нм друг от друга. В описанном выше демонстрационном опыте плотность паров натрия была настолько велика, что обе линии поглощения D_1 и D_2 сливались в одну полоску D и детали явления не были различимы. Улучшенные условия опыта позволяют наблюдать картину гораздо отчетливее: при значительной плотности пара видны широкая полоса поглощения и загибы на краях (рис. 28.5 *а*), при уменьшенной плотности пара — две области аномальной дисперсии, соответствующие двум линиям поглощения (рис. 28.5 *б*).

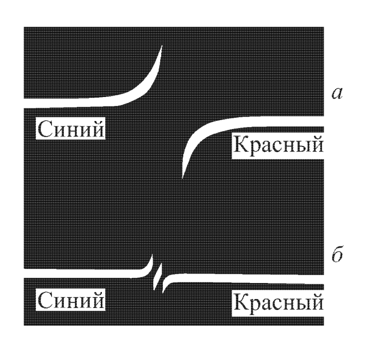


Рис. 28.5. Аномальная дисперсия в парах натрия: *а* — при значительной плотности пара обе линии поглощения натрия (дублет натрия) сливаются в полоску; *б* — при небольшой плотности пара обе линии дублета разделены

Так как наиболее отчетливая картина явления наблюдается в газах (парах), характеризующихся резкими линиями поглощения, то и проверку теоретических представлений лучше всего выполнять на газах, для которых, впрочем, и построение теории значительно проще. Поэтому большое значение приобрели методы исследования зависимости показателя преломления от длины волны, позволяющие производить точные измерения в газах. Ввиду малого отличия их показателя преломления от 1 (особенно при малой плотности, необходимой при работе вблизи линии поглощения) приходится применять интерференционные рефрактометры.

Наилучшие результаты получаются по методу «скрещения» спектральных аппаратов, причем одним из них служит, например, интерферометр Жамена, а вторым — обычный спектрограф с призмой или дифракционной решеткой, обладающей большой дисперсией (Вуд, Д.С. Рождественский). Их надо расположить таким образом, чтобы полосы интерференции шли горизонтально, а щель спектрографа — вертикально. Если на щель спектрографа отобразить картину, даваемую интерферометром от источника белого света, т.е. совокупность цветных полос, то в фокальной плоскости камерного объектива спектрографа мы увидим сплошной спектр, прочерченный в продольном направлении рядом темных линий, соответствующих тем местам щели спектрографа, на которые приходятся изображения темных полос интерференционной картины.

Период интерференционной картины пропорционален длине волны. Поэтому расстояние между темными полосами тем больше, чем больше длина волны, и система темных полос в спектрографе будет сужаться от красного конца спектра к фиолетовому, как показано на рис. 28.6. Отрегулируем приборы таким образом, чтобы нулевая полоса была прямолинейной и перпендикулярной к направлению щели, и примем ее за ось абсцисс. Ось ординат y направим вдоль щели

спектрографа. Разность хода $\Delta(y)$ между лучами в двух плечах интерферометра зависит от y, как правило, линейно, т.е. $\Delta(y) = by$, где коэффициент b задается параметрами применяемых приборов. Ордината m-й полосы определится из условия

$$\Delta(y_m) = by_m = m\lambda.$$

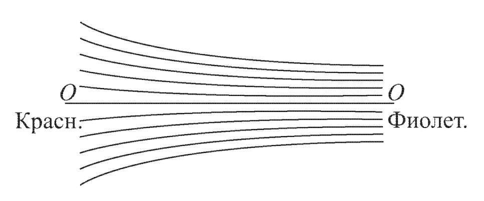


Рис. 28.6. Расположение полос интерференции при скрещении интерферометра Жамена и спектрографа

Из этого соотношения следует, в частности, увеличение наклона ($dy/d\lambda = m/b$) интерференционных полос по мере роста m (см. рис. 28.6).

Если на пути одного из лучей интерферометра ввести слой вещества толщины h с показателем преломления $n = f(\lambda)$, то будет сообщена дополнительная разность хода, равная $h(n-1)$, и условие, определяющее ординату m-й полосы, примет вид

$$by_m \pm h(n-1) = m\lambda,$$

причем знак зависит от того, в какое из плеч интерферометра введен слой вещества. В результате интерференционные полосы испытают соответственное смещение вдоль щели спектрографа, и нулевая полоса $m = 0$, ранее удовлетворявшая условию $y = 0$ (ось абсцисс), теперь примет форму, соответствующую $y = \mp(n-1)h/b$. Таким образом, нулевая полоса вычерчивает в определенном масштабе зависимость $(n-1)$ от λ, т.е. дает непосредственно кривую дисперсии. Полосы ненулевого порядка имеют дополнительный наклон, увеличивающийся с ростом m.

Если в качестве дополнительного слоя вещества ввести трубку, наполненную, например, парами натрия, то можно точно исследовать ход показателя преломления даже вблизи линий поглощения, и притом тем ближе к ним, чем меньше поглощение в парах натрия. Фотография наблюдаемой картины, заимствованная из работы Д.С. Рождественского, приведена на рис. 28.7.

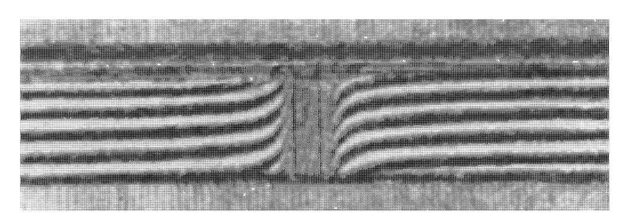


Рис. 28.7. Аномальная дисперсия в парах натрия (снимок Д.С. Рождественского)

Рождественскому принадлежит также важный метод, позволивший значительно повысить точность измерения дисперсии в непосредственной близости к полосе поглощения. Пользуясь возможностью *ме-*

нять наклон интерференционной полосы, вводя в какое-нибудь плечо слой вещества, Д.С. Рождественский поместил в одном плече слой исследуемого вещества, а в другом — стеклянную пластинку. Так как в исследуемом веществе вблизи полосы поглощения дисперсия меняется очень сильно, то найдется такая длина волны, для которой действие исследуемого вещества будет *точно* скомпенсировано действием стеклянной пластинки, так что в этом месте наклон интерференционной кривой пройдет через нуль; слева от этого значения длины волны кривые опускаются, а справа — поднимаются (или наоборот), образуя *крюк*, положение вершины которого в шкале длин волн можно точно измерить (рис. 28.8).

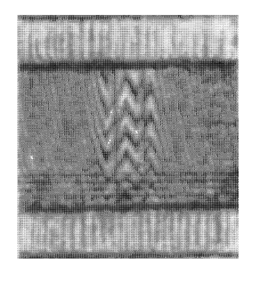


Рис. 28.8. Аномальная дисперсия в парах натрия («метод крюков» Д.С. Рождественского)

Ход интерференционных полос задается в этом случае условием

$$by_m - h(n-1) + h'(n'-1) = m\lambda.$$

Второй и третий члены в левой части этого соотношения суть разности хода, вносимые слоем исследуемого вещества и стеклянной пластинкой, а h, h' и n, n' — их толщины и показатели преломления. Вдали от полос поглощения показатель преломления паров практически равен единице, и вид полос определяется действием одной стеклянной пластинки: нулевая полоса уходит из поля зрения интерферометра, а наблюдаются сильно наклоненные полосы высокого порядка (рис. 28.9). Например, при $h = 1$ см, $n' - 1 \approx 0{,}5$, $\lambda = 0{,}5 \cdot 10^{-4}$ см находим

$$m \approx h' \frac{n'-1}{\lambda} \approx 10^4.$$

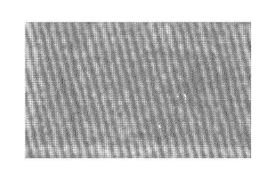


Рис. 28.9. Интерференционная картина вдали от полос поглощения

Длина волны, отвечающая вершине крюка, определяется условием $dy_m/d\lambda = 0$, которое приводит к соотношению

$$m - h'\frac{dn'}{d\lambda} = -h\frac{dn}{d\lambda},$$

означающему равенство абсолютных величин наклонов полос, даваемых по отдельности стеклянной пластинкой и слоем исследуемого вещества. Вследствие малой дисперсии стекла величина $|h'\,dn'/d\lambda|$ составляет всего несколько процентов от m, т.е. компенсация наклона полос из-за сильной дисперсии исследуемого вещества происходит, главным образом, за счет большого значения порядка интерференции m. Д.С. Рождественский указал изящный прием, с помощью которого комбинацию $m - h'\,dn'/d\lambda$ можно определить непосредственно по интерференционной картине.

Таким образом, по положению вершины крюка можно определить $dn/d\lambda$, т.е. дисперсию изучаемого вещества при том значении λ, которое соответствует точке излома интерференционной полосы. Меняя толщину h' стеклянной пластинки, можно смещать положение вершины крюка вдоль шкалы длин волн, переходя к местам различных

значений $dn/d\lambda$, исследуя таким образом дисперсию в желаемом интервале длин волн.

«Метод крюков» Рождественского широко используется в точных исследованиях по дисперсии для измерения ряда атомных характеристик и с другими целями. В настоящее время он настолько разработан, что может служить демонстрационным опытом.

§ 156. Основы теории дисперсии

Плодотворная попытка истолкования богатого материала, полученного экспериментальным путем, была сделана еще в «упругой» теории света. Хотя эта теория не могла связать значение показателя преломления среды ни с каким из известных параметров последней, тем не менее истолкование явлений рефракции и дисперсии в веществе предпринято было уже давно.

Согласно представлениям Френеля, свет распространяется в особой среде, светоносном эфире, обладающем свойствами упругого твердого тела, крайне разреженного и проникающего во все обычные среды. Скорость световой волны определяется в основном свойствами эфира, но в вещественных средах молекулы изменяют свойства эфира, в них заключенного, и, таким образом, влияют на скорость распространения света. Развивая идею Френеля об учете влияния молекул вещества на частички эфира, Коши (1829–1835 гг.) пришел к формуле, выражающей зависимость показателя преломления от длины волны

$$n = a + \frac{b}{\lambda_0^2} + \frac{c}{\lambda_0^4} + \ldots, \tag{156.1}$$

где λ_0 — длина волны в вакууме, a, b, c, … — постоянные, значения которых для каждого вещества должны быть определены на опыте. В большинстве случаев можно ограничиться двумя первыми членами формулы (156.1). Формула Коши хорошо передает нормальный ход дисперсии. Так, очень тщательные измерения показателя преломления водорода можно при помощи соответственно подобранных коэффициентов a, b, и c передать формулой Коши очень хорошо, как показывает табл. 28.1.

Таблица 28.1

Сравнение экспериментальных результатов с данными, полученными по формуле Коши

λ, Å	$(n-1)\cdot 10^7$ набл.	$(n-1)\cdot 10^7$ выч.	λ, Å	$(n-1)\cdot 10^7$ набл.	$(n-1)\cdot 10^7$ выч.
5462,260	1396,50	1396,50	2535,560	1546,90	1547,01
4078,991	1426,32	1426,33	2302,870	1594,18	1594,18
3342,439	1461,33	1461,18	1935,846	1718,24	1718,37
2894,452	1498,59	1498,63	1854,637	1759,26	1759,96

Теория Коши была создана задолго до открытия аномальной дисперсии. Ее историческое значение очень велико, ибо это была первая

работа, показавшая, что волновая теория в состоянии объяснить дисперсию света.

После открытия аномальной дисперсии и установления ее связи с абсорбцией Зельмейер (1871 г.) [1] дал полную теорию явления, основываясь на представлении о взаимодействии молекул весомой среды и эфира. Особенностью теории Зельмейера явилось допущение, что молекулы обладают собственными частотами колебаний, характерными для данного вещества, благодаря чему получило объяснение наличие определенных полос (линий) поглощения. Из рассуждений Зельмейера вытекало, что наличие таких собственных периодов приводит к зависимости показателя преломления от частоты, весьма хорошо передающей весь ход дисперсии как вблизи, так и вдали от полос поглощения. Основы теории Зельмейера сохранились и в дальнейших теориях дисперсии, в том числе и в современной электронной теории. Очень точные измерения зависимости n от λ, выполненные значительно позже (1912 г.) Д.С. Рождественским для паров натрия, показали, что расхождение между теорией Зельмейера и опытом не превышает 2–3 %. При этом удалось осуществить измерения вплоть до областей, отличающихся не более чем на 0,5 Å от длины волны, соответствующей собственным колебаниям атома. В 1945 г. ученикам Д.С. Рождественского удалось усовершенствовать его методы и еще больше приблизиться к центру линии поглощения, повысив в то же время точность измерений.

В теории Зельмейера оказалось возможным связать оптическую константу (скорость света в веществе) с другими параметрами вещества, с собственными периодами колебаний его молекул, определение которых, правда, должно было выполняться также оптическими методами. Электронное истолкование дисперсии с использованием понятия собственных колебаний атомов установило природу колеблющихся частиц (электроны и ионы) и позволило значительно углубить наши представления о веществе и свете.

В настоящее время в связи с радикальным изменением наших представлений о законах, управляющих поведением атомов и молекул, — изменением, внесенным квантовой теорией, — мы вынуждены пересмотреть и теорию дисперсии. Однако, несмотря на коренную переработку этих представлений, основные существенные черты теории дисперсии сохранились и в квантовой ее трактовке [2]. При этом, однако, не только изменилась точка зрения на явление дисперсии, но

[1] Рэлей пишет: «Я установил позже, что Максвелл (до Зельмейера) рассмотрел проблему аномальной дисперсии. Его результаты содержатся в математических экзаменационных вопросах от 21.I.1869 г. (Cambrige Calendar, 1869 г.). В этом экзаменационном вопросе уже имеются члены, учитывающие вязкость, введенные позже Гельмгольцем» (Rayleigh// Sci. Papers. V. IV. P. 413).

[2] Это связано с тем, что взаимодействие между атомом и световой волной можно учесть в хорошем согласии с опытом, если рассматривать атом как совокупность гармонических осцилляторов, а для гармонического осциллятора классическая и квантовая трактовки задачи приводят к одинаковым результатам.

и были открыты новые стороны его, не предусмотренные простейшими вариантами классической теории и нашедшие себе в дальнейшем опытное подтверждение (отрицательная абсорбция, некогерентное рассеяние света).

Познакомимся несколько детальнее с основами электронной теории дисперсии. О квантовой теории несколько слов будет сказано позднее.

Как уже отмечалось, сущность взаимодействия света и вещества сводится к интерференции падающей (первичной) волны со вторичными волнами, возникающими вследствие колебаний электронов (и ионов) вещества, обусловленных действием поля первичной волны.

В настоящем разделе мы рассмотрим задачу более формально, исследуя зависимость диэлектрической проницаемости среды от частоты световых волн, вызывающих смещение электрических зарядов вещества. Как показывает явление Зеемана (см. гл. XXXI), главную роль в оптической жизни атома играет электрон; поэтому в дальнейшем мы для удобства будем говорить именно об электроне; однако все наши рассуждения остаются в силе и для иных заряженных частиц, входящих в состав атома. В частности, при исследовании показателя преломления в области длинных волн необходимо учитывать влияние ионов, способных к сравнительно медленным (инфракрасным) колебаниям.

Итак, для вывода зависимости показателя преломления от длины волны найдем, как зависит диэлектрическая проницаемость от частоты переменного электрического поля, и затем перейдем к показателю преломления n на основании соотношения $n = \sqrt{\varepsilon}$. В соответствии с теорией электронов будем рассматривать молекулы или атомы диэлектрика как системы, в состав которых входят электроны, находящиеся внутри молекул в положении равновесия. Под влиянием внешнего поля эти заряды смещаются из положения равновесия на расстояние r, превращая таким образом атом в электрическую систему с моментом величиной $p = re$, направленным вдоль поля (диполь). Если в единице объема нашей среды находится N атомов, которые испытывают поляризацию, то электрический момент единицы объема, или поляризация среды, будет равняться $P = Np = Ner$. При этом мы для простоты полагали, что в среде имеется лишь один сорт атомов и в каждом из них способен смещаться только один электрон. В противном случае поляризация среды записывалась бы в виде

$$P = \sum N_i e_i r_i, \tag{156.2}$$

где индекс i относится к i-му сорту зарядов. Зная электрическую поляризацию среды, нетрудно вычислить ее диэлектрическую проницаемость ε, ибо $D = \varepsilon E = E + 4\pi P$, где D — электрическая индукция среды. Итак,

$$D = \varepsilon E = E + 4\pi Ner,$$

где r определяется полем E.

Задача сводится, таким образом, к определению смещения электрона r под действием *внешнего*, периодически меняющегося поля при учете сил, действующих на электрон, входящий в состав атома, со

стороны частей этого атома и окружающих атомов, т.е. представляет собой задачу о вынужденных колебаниях электронов. При этом следует иметь в виду, что речь идет об электронах, частоты движения которых в атоме имеют тот же порядок величины, что и частота световой волны. Только такие электроны, как будет показано ниже, испытывают достаточно большое смещение и поэтому участвуют в рассматриваемых здесь процессах. Мы будем их называть *оптическими* электронами.

а. Силы, действующие на электроны. 1) *Удерживающая сила.* Чтобы составить представление о характере сил, удерживающих оптический электрон около положения равновесия, надо обратиться к изучению оптических свойств атома. Опыт показывает, что изолированные атомы всех веществ способны испускать практически монохроматические волны с характерными для каждого вещества частотами. Эти частоты не меняются при нагревании вещества, т.е. при увеличении средней энергии, приходящейся на один атом. Следовательно, сила, удерживающая электрон в положении равновесия, должна иметь характер упругой силы (ее называют поэтому квазиупругой), и зависимость ее от смещения электрона определяется законом

$$F = -br, \tag{156.3}$$

где b — соответствующая константа упругой связи. Такой закон для силы осуществлялся бы, например, если бы отрицательный электрон находился в центре шара, равномерно заполненного положительными зарядами, взаимодействующими по закону Кулона. При смещении электрона сила, стремящаяся вернуть его к центру, была бы равна $-br$, где r — расстояние от центра.

Опытное исследование строения атома показало, однако, что указанная модель не верна и атом состоит из положительного заряда (ядра) очень малого диаметра (меньше 10^{-12} см), вне которого движется соответствующее число электронов. Сила, удерживающая каждый электрон, конечно, не будет иметь вид $-br$ и окажется гораздо сложнее. Вопрос о том, каким образом при таком расположении зарядов возможно почти монохроматическое излучение, мы оставляем пока в стороне. Причина лежит очень глубоко и заключается в том, что ни излучение атомов, ни поведение зарядов внутри атомной системы не подчиняются законам классической механики и электродинамики, установленным при изучении макроскопических объектов. Для правильного описания таких внутриатомных, микроскопических процессов надо обратиться к законам, установленным квантовой теорией, по отношению к которым макроскопические законы являются лишь первым приближением, достаточным при изучении макроскопических процессов и нуждающимся в уточнении при изучении процессов атомных.

Исследование показывает, однако, что многие свойства атома удается передать при помощи классических законов, применяемых соответственным образом. В частности, взаимодействие атома со световой волной, ведущее к дисперсии света, можно достаточно хорошо описать, если рассматривать атом как совокупность *гармонических*

осцилляторов соответствующей частоты, т.е. считать, что электрон удерживается в атоме *квазиупругой* силой $-br$. Таким образом, уравнение движения электрона (массы m), смещенного из положения равновесия и предоставленного действию этой внутриатомной силы, есть

$$m\ddot{r} = -br. \tag{156.4}$$

Отсюда

$$r = r_0 \cos \omega_0 t, \tag{156.5}$$

где r_0 — амплитуда, а $\omega_0 = \sqrt{b/m}$ — круговая частота собственных колебаний электрона, причем ω_0 зависит от природы атома, определяющей величину константы b. Представление удерживающей силы в виде квазиупругой (см. (156.3)) справедливо, как и в других механических задачах, лишь при достаточно малых отклонениях зарядов от их равновесных положений, т.е. при достаточно малых значениях r. Величина смещения r определяется силой, действующей на оптический электрон со стороны электрического поля, и при больших значениях напряженности последнего выражение (156.3) может оказаться неверным. Известно, например, что как статическое, так и переменное электромагнитное поле может «оторвать» электрон от атома (ионизация), и в этом предельном случае неприменимость соотношения (156.3) вполне очевидна.

Отличие удерживающей силы от квазиупругой фактически оказывается существенным для очень мощного света, который можно получить с помощью оптических квантовых генераторов; это отличие обусловливает особенности так называемых нелинейных оптических явлений, которые рассматриваются в гл. XLI. В тех же явлениях, с которыми мы имели дело до сих пор, и во многих других соотношение (156.3) выполняется с очень хорошим приближением.

2) *Тормозящая сила.* Предположение о гармоническом колебании электрона в атоме имеет лишь приближенный характер. В действительности же электрон, приведенный в колебание, постепенно отдает свою энергию, и, следовательно, амплитуда колебания с течением времени уменьшается. Таким образом, колебание не имеет строго гармонического характера и должно рассматриваться как *затухающее.* Даже в случае изолированного атома будут совершаться затухающие колебания, ибо энергия будет постепенно покидать атом, излучаясь во все стороны. Кроме такого затухания, неизбежно связанного с излучением, могут иметь место и другие причины растраты колебательной энергии, связанные с взаимодействием атомов между собой, причем в этих случаях энергия колебания может переходить и в другие формы, например в тепло, увеличивая среднюю кинетическую энергию атомов среды.

Мы вернемся ниже к обсуждению различных физических причин, обусловливающих затухание колебаний в атоме. Во всяком случае все они ведут к уменьшению амплитуды колебания и, следовательно, влияют на движение электрона как некая тормозящая (диссипативная) сила. Сила эта, как показывает опыт, во многих случаях сравнительно мало искажает собственные колебания атома, так что растраченная за один период энергия составляет лишь ничтожную часть (порядка

одной стомиллионной) колебательной энергии атома. При таких условиях можно учесть эту силу, положив ее пропорциональной скорости движения электрона $\frac{dr}{dt}$, подобно тому как во многих задачах механики сила трения может считаться пропорциональной скорости движения частицы. Исследование различных физических причин затухания показывает, что они согласуются с подобным выражением для тормозящей силы. Итак, в качестве второй силы, действующей на электрон, мы вводим силу *сопротивления*, или *торможения*

$$G = -g\,\frac{dr}{dt} = -g\dot{r},$$

где коэффициент g зависит от природы среды.

3) *Вынуждающая сила.* Вынужденные колебания электрона возникают под действием световой волны, распространяющейся в среде. Магнитная составляющая этого поля оказывает лишь малое действие, ибо магнитное поле действует только на движущийся заряд (см. упражнение 211). Поэтому во всех практических задачах можно ограничиться учетом действия лишь электрического поля волны[1]. Мы принимаем, таким образом, что действие световой волны определяется напряженностью электрического поля, т.е. на электрон действует сила eE, где $E = E_0 \cos\omega t$ — поле волны. Это справедливо только тогда, когда можно пренебречь действием окружающих молекул, также поляризованных приходящей световой волной. Такое допущение справедливо для *разреженных* газов, где расстояние между молекулами среды велико. Для газов, находящихся под значительным давлением, для жидкостей или твердых тел необходимо учитывать это влияние, что поведет к изменению выражения для силы, *действующей* на электрон (см. ниже).

б. Уравнение дисперсии. Сделав вышеуказанные допущения относительно действующих сил, мы можем написать для электрона ньютоново уравнение движения

$$m\ddot{r} = eE - br - g\dot{r}, \tag{156.6}$$

которое представляет собой уравнение движения при вынужденных колебаниях. Решив это уравнение, определим r, а, следовательно, и $P = Np = Ner$, и найдем таким образом $\varepsilon = n^2$ в зависимости от констант атома (e, m, ω_0, g) и частоты ω внешнего поля, т.е. решим задачу дисперсии. Решение уравнения (156.6) не представляет затруднений, хотя несколько длинно (см. упражнение 208). Основные особенности движения электронов под действием вынуждающей силы нетрудно получить значительно проще, если предположить, что силой сопротивления можно пренебречь, т.е. что $g = 0$.

Поле световой волны E можно считать простой синусоидальной функцией частоты ω, т.е. $E = E_0 \sin\omega t$, ибо по теореме Фурье поле иного вида всегда можно представить в виде суперпозиции таких функций, и решение более общей задачи сводится к решениям более

[1]) Исключение составляют лишь явления вращения плоскости поляризации света в естественно-активных веществах (ср. гл. XXX).

простых задач такого типа. Положив $g = 0$ и разделив обе части уравнения (156.6) на m, придадим ему вид

$$\ddot{r} + \omega_0^2 r = \frac{e}{m}\, E_0 \sin\omega t, \tag{156.7}$$

где $\omega_0 = \sqrt{b/m}$ — частота собственного колебания электрона. Решение уравнения (156.7) можно записать следующим образом:

$$r = A\sin\omega t, \tag{156.8}$$

где $A = \dfrac{eE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$, в чем легко убедиться подстановкой (см. упражнение 207). Определив r, найдем

$$P = Ner = N\frac{e^2}{m}\, E_0 \frac{\sin\omega t}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

и отсюда на основании соотношения $D = \varepsilon E = E + 4\pi P$ как окончательное решение нашей упрощенной задачи получим

$$\varepsilon = n^2 = 1 + \frac{4\pi N e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\,. \tag{156.9}$$

Согласно этой формуле показатель преломления зависит от частоты ω внешнего поля, т.е. найденная формула передает явление дисперсии света, правда, при несколько упрощенных допущениях, которые в дальнейшем надо устранить.

Как видно из (156.9), в области от $\omega = 0$ до $\omega = \omega_0$ показатель преломления n больше единицы и возрастает при возрастании ω (нормальная дисперсия); при $\omega = \omega_0$ имеем $n^2 = \pm\infty$; в области от $\omega = \omega_0$ до $\omega = \infty$ n^2 меньше единицы и также возрастает от $-\infty$ до 1 (нормальная дисперсия).

Обращение показателя преломления в бесконечность не имеет физического смысла и получилось в результате упрощенного предположения об отсутствии сопротивления движению ($g = 0$), обусловливающего затухание. Если принять это сопротивление в расчет, то ход кривой будет иным (рис. 28.10, сплошная кривая) (см. упражнение 208). Область MN — область аномальной дисперсии, где n убывает при возрастании частоты ω.

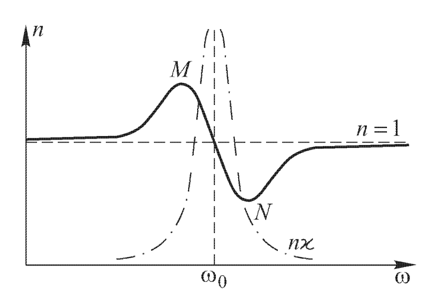


Рис. 28.10. Кривые дисперсии и абсорбции вблизи одиночной полосы поглощения

Формулу (156.9) можно преобразовать. Перенеся 1 в левую часть, запишем ее в виде $n^2 - 1 = (n + 1)(n - 1)$. Поскольку n обычно не очень сильно отличается от единицы, множитель $(n-1)$, вообще говоря, изменяется в зависимости от n значительно сильнее, чем $(n+1)$. Опыт показывает, что величину $(n-1)$ можно с хорошим

приближением считать пропорциональной плотности вещества. Следовательно, N в формуле (156.9) также допустимо считать пропорциональным плотности или числу атомов N_0 в единице объема. Итак, положим $N = fN_0$; безразмерный коэффициент f обычно называют *силой осциллятора*, желая подчеркнуть долю участия этих осцилляторов или их эффективность в явлениях дисперсии. Таким образом, формула (156.9) принимает вид

$$n^2 = 1 + 4\pi N_0 \frac{e^2}{m} \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2}. \qquad (156.10)$$

Если принять во внимание, что в веществе может быть несколько сортов зарядов, способных к колебаниям с различными собственными частотами ω_{0i} и, может быть, с различными зарядами e_i и массами m_i, то формула (156.9) заменится выражением

$$n^2 = 1 + 4\pi N_0 \sum \frac{f_i e_i^2}{m_i} \frac{1}{\omega_{0i}^2 - \omega^2}, \qquad (156.11)$$

где f_i — силы, или эффективности, отдельных сортов осцилляторов, соответствующих различным частотам ω_{0i}.

В таком случае дисперсионная кривая распадается на ряд ветвей, причем в отсутствие затухания значения n^2, соответствующие каждому $\omega = \omega_{0i}$, равны $\pm\infty$. Если учесть затухание, то кривая будет иметь вид, показанный на рис. 28.11.

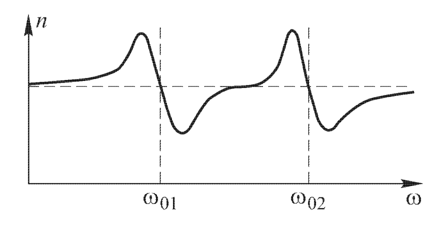


Рис. 28.11. Кривая дисперсии при наличии нескольких полос поглощения

Нетрудно видеть, что наибольший вклад в (156.11) вносят именно оптические электроны, для которых частоты ω_{0i} примерно такие же, как и частоты видимого света ω. Те члены суммы, для которых ω_{0i} значительно превышают ω, малы.

Рисунок 28.12 передает ход кривой дисперсии, полученной по методу Рождественского, для паров титана в области видимого и ультрафиолетового света. На снимке заметно несколько областей собственного поглощения титана, с соответствующим числом собственных частот ω_{0i} и сортов осцилляторов разной силы f_i.

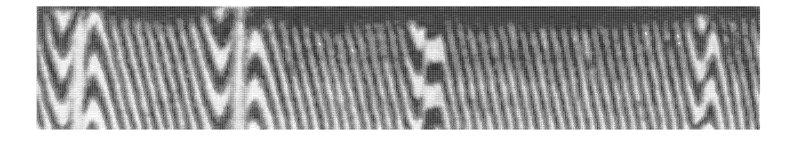


Рис. 28.12. Дисперсия в парах титана в видимой и ультрафиолетовой областях. На снимке видно несколько областей поглощения титана

Зная по ходу дисперсионной кривой значения n вблизи разных ω_{0i}, можно оценить, какие заряды e_i и массы m_i фигурируют в нашей формуле, т.е. определить, какие электрические элементы атома участвуют в явлении дисперсии. Однако точное определение отношения e_i/m_i невозможно, поскольку остаются неопределенными величины f_i. Правда, если сделать несколько произвольное предположение, что f_i, имея для разных осцилляторов различные значения, меняется не в тысячи раз, а значительно меньше, то можно прийти к весьма важным выводам. Окажется, что значения e_i/m_i распадаются на *две большие группы*: в области высоких частот (видимая и ультрафиолет) величины e_i/m_i соответствуют данным для электронов ($\approx 1{,}77 \cdot 10^7$ СГСМ), а в области низких частот (инфракрасное излучение) оно в тысячу раз меньше и соответствует скорее ионам вещества (для ионов водорода оно равно $0{,}965 \cdot 10^4$ СГСМ, для более тяжелых ионов — еще меньше). Как уже упоминалось, явление Зеемана с несомненностью показало, что с испусканием видимого и ультрафиолетового света связаны колебания электронов. В таком случае предыдущее замечание, несмотря на известную произвольность допущения относительно f_i, приобретает глубокий смысл и перестает казаться случайным совпадением: некоторые осцилляторы, несомненно, представляют колебания электронов. Естественно поэтому признать, что другие осцилляторы низкой частоты, играющие роль в инфракрасной части спектра, представляют колебания заряженных ионов вещества.

Считая, таким образом, значения e_i/m_i установленными для разных осцилляторов, можно из формулы (156.10) определить силы осцилляторов. Такие оценки показывают, что и для осцилляторов электронного типа значения f_i могут быть довольно различными, т.е. не все электронные осцилляторы участвуют в явлении дисперсии с одинаковой эффективностью.

До сих пор мы ограничивались упрощенной теорией, не учитывающей затухание осцилляторов. Так как в теории дисперсии одни и те же осцилляторы определяют не только ход показателя преломления, но и абсорбцию вблизи каждой собственной частоты, то следует ожидать, что величина силы осциллятора f_i должна быть связана и с величиной поглощения излучения соответствующей частоты. Это мы увидим в следующем разделе, когда выведем формулы с учетом затухания.

в. Учет затухания. Уравнение (156.6) обеспечивает полное решение задачи и дает как зависимость показателя преломления от длины волны (дисперсия), так и абсорбцию вблизи собственных частот поглощения, вводимую, правда, чисто формально при помощи коэффициента g.

Не останавливаясь на решении этого уравнения (см. упражнение 208), укажем лишь, что, так же как и в случае распространения света в металлах, здесь следует ввести комплексную диэлектрическую проницаемость и комплексный показатель преломления $\tilde{n} = n(1 - i\varkappa)$. Здесь n — действительная часть показателя преломления, определяющая фазовую скорость волны, а $\varkappa$ (или $n\varkappa$) — показатель поглощения,

характеризующий убывание амплитуды плоской волны, распространяющейся вдоль z:

$$s' = A_0 \exp\left(-\frac{2\pi}{\lambda_0}\, n\varkappa z\right) \cos\left(\omega t - 2\pi z \frac{n}{\lambda_0}\right). \tag{156.12}$$

Разделяя действительную и мнимую части в выражении для показателя преломления (см. упражнения 209 и 210), найдем

$$n^2(1 - \varkappa^2) = 1 + 4\pi \frac{e}{m}\, N_0 \frac{f(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 (g/m)^2}, \tag{156.13}$$

$$2n^2\varkappa = 4\pi \frac{e}{m}\, N_0 \frac{f(g/m)\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \omega^2 (g/m)^2}. \tag{156.14}$$

Здесь для простоты мы ограничились формулами, относящимися к *одной полосе* поглощения, характеризующейся затуханием g и силой осциллятора f. Для всей кривой дисперсии надо было бы вновь писать суммы по разным осцилляторам, соответствующим разным собственным частотам вещества.

Из формулы (156.14) мы видим, что показатель поглощения каждой полосы $\varkappa$ действительно пропорционален силе соответствующего осциллятора f, как указывалось в предыдущем разделе.

При $g = 0$ находим из этих формул $n^2\varkappa = 0$, т.е. отсутствие затухания, и

$$n^2 = 1 + \frac{4\pi N e^2 f}{m}\, \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2};$$

иными словами, мы получили частный случай, разобранный выше.

На рис. 28.10 представлены одновременно кривые, выражающие зависимость n и $n\varkappa$ от ω вблизи линии поглощения в газе при низком давлении. В соответствии с наблюдениями Кундта область абсорбции и область аномальной дисперсии совпадают друг с другом.

г. Учет действия окружающих молекул среды. Нам осталось устранить допущенное в предыдущем изложении отождествление внешнего поля E (поля волны) и *действующего* поля E', смещающего электрон. Для жидкостей, сжатых газов и твердых тел такое отождествление заведомо неверно, и необходимо принять во внимание влияние окружающих молекул, поляризованных действием света. Учет этого влияния, вообще говоря, очень труден. Для простейшего случая изотропной среды [1]) Лорентц показал, что такой учет дает для связи между действующим полем E', внешним полем E и поляризацией P следующую зависимость:

$$E' = E + \frac{4\pi}{3}\, P. \tag{156.15}$$

Таким образом, вместо уравнения

$$m\ddot{r} + br = eE$$

получим

$$m\ddot{r} + br = eE' = eE + \frac{4\pi e}{3}\, P. \tag{156.16}$$

[1]) Точнее, для изотропного кубического кристалла.

Умножая последнее уравнение на eN и заменяя eNr буквой P, находим

$$m\ddot{P} + bP = Ne^2E + \frac{4\pi Ne^2}{3}\,P \tag{156.17}$$

или, так как $b = m\omega_0^2$,

$$m\ddot{P} + \left(m\omega_0^2 - \frac{4\pi Ne^2}{3}\right)P = Ne^2E. \tag{156.18}$$

Определив, как и раньше, отсюда P, найдем $n^2 = \varepsilon$ из формулы

$$\varepsilon E = E + 4\pi P.$$

Вычисления, вполне аналогичные приведенным выше (без учета поглощения и для одной частоты собственных колебаний), дают

$$n^2 - 1 = \frac{(4\pi N_0e^2/m)f}{(\omega_0^2 - \omega^2) - (4\pi N_0e^2f)/3m}\,.$$

Преобразовывая это выражение, имеем

$$(n^2-1)(\omega_0^2-\omega^2) = \frac{4\pi N_0e^2f}{3m}\,(n^2-1+3),$$

или

$$\frac{n^2-1}{n^2+1} = N_0\frac{4\pi e^2f}{3m(\omega_0^2-\omega^2)}\,. \tag{156.19}$$

Эта формула была получена одновременно (1880 г.) Г.А. Лорентцом на основе электромагнитных представлений о свете и Л. Лоренцом, который развивал теорию света, в известной степени являющуюся предшественницей теории Максвелла. Выражение (156.19) и поныне известно под названием формулы Лоренц–Лорентца. Принимая во внимание, что для данного вещества и данной длины волны величины e, m, ω_0, ω постоянны, можно придать формуле Лоренц–Лорентца следующий вид:

$$\frac{n^2-1}{n^2+2}\;\frac{1}{N_0} = \text{const},$$

или

$$\frac{n^2-1}{n^2+2}\;\frac{1}{\rho} = \text{const}, \tag{156.20}$$

ибо N_0 означает число атомов в 1 см^3 и, следовательно, пропорционально плотности ρ. Приведенная здесь табл. 28.2, заимствованная из измерений Магри и относящаяся к воздуху, показывает, насколько хорошо в некоторых случаях выполняется формула Лоренц–Лорентца. Имеется, однако, и очень много случаев, когда наблюдаются значительные отступления от нее. Это тем более естественно, что теоретические основы формулы далеко не безупречны [1]). Тем не менее она имеет важное применение.

---

[1]) В частности, выражение (156.15), выведенное для изотропного кубического кристалла, переносится на газ и на жидкость (в предположении, что указанные среды в силу статистического беспорядка в ориентации молекул также изотропны). Конечно, эти соображения далеко не убедитель-

Выражение

$$\frac{n^2-1}{n^2+2}\,\frac{1}{\rho}=r$$

называется *удельной рефракцией* вещества. Согласно формуле Лоренц–Лорентца, удельная рефракция не должна зависеть от плотности. Действительно, нередко удельная рефракция остается практически постоянной даже при переходе вещества из парообразного состояния в жидкое, т.е. при изменении плотности в несколько сотен раз. Например, при переходе от газообразного кислорода к жидкому (изменение плотности в 800 раз) или от паров воды к жидкой воде (изменение плотности в 1200 раз) рефракция с точностью до 2–3 % остается постоянной.

Таблица 28.2

Данные, подтверждающие пригодность формулы Лоренц–Лорентца

Плотность ρ	n	$\frac{n^2-1}{n^2+2}\frac{1}{\rho}$	Плотность ρ	n	$\frac{n^2-1}{n^2+2}\frac{1}{\rho}$
1	1,00029	$1953\cdot10^{-7}$	96,2	1,0284	$1961\cdot10^{-7}$
14,8	1,00434	$1947\cdot10^{-7}$	112,0	1,0363	$1956\cdot10^{-7}$
42,1	1,0124	$1959\cdot10^{-7}$	149,5	1,0442	$1956\cdot10^{-7}$
69,2	1,0204	$1961\cdot10^{-7}$	176,3	1,052	$1953\cdot10^{-7}$

Опыт показывает также, что рефракцию смеси веществ R можно вычислить, если известны рефракции r_1, r_2, ... ее отдельных компонент и их процентное содержание c_1, c_2, ... в смеси:

$$100R = c_1r_1 + c_2r_2 + \ldots$$

Этот результат означает, что оптическое поведение молекул каждой компоненты остается тем же независимо от того, взята ли данная компонента отдельно или в смеси с другими. Еще большее значение имеет правило, согласно которому рефракцию сложного химического соединения можно вычислить, складывая рефракции элементов, его составляющих. Для каждого элемента удобно ввести понятие *атомной рефракции*, представляющей произведение атомного веса элемента a_1 на его удельную рефракцию r_1. Если молекулярный вес соединения есть M, а его удельная рефракция равна R, то MR называется *молекулярной рефракцией*. Опыт показывает, что молекулярную рефракцию часто можно вычислять аддитивно из атомных рефракций, пользуясь химической формулой [1]). Другими словами,

$$MR = q_1a_1r_1 + q_2a_2r_2 + q_3a_3r_3 + \ldots, \qquad (156.21)$$

ны, и справедливость в ряде случаев формулы Лоренц–Лорентца вызывает большее удивление, чем то, что нередко обнаруживаются значительные отступления от нее.

[1]) При этом надо учитывать наличие кратных химических связей и других особенностей строения молекулы, от которых зависят отдельные слагаемые, входящие в сумму, определяющую молекулярную рефракцию.

где $q_1, q_2, \ldots$ — числа атомов, входящих в состав молекулы. Это крайне важное правило нередко соблюдается очень хорошо. Например, для воды (H_2O) измеренная молекулярная рефракция равна 3,71, а вычисленная — 3,73; для $CHCl_3$ измеренная — 21,36, вычисленная — 21,42 и т.д. Это правило означает, что влияние отдельных атомов на преломление света не нарушается влиянием других атомов, входящих в состав той же молекулы. Наоборот, нарушение правила аддитивности позволяет судить о взаимном влиянии атомов друг на друга и может быть использовано для заключения о строении молекулы.

Таким образом, изучение рефракции (показателя преломления) может служить ценным приемом для исследования химической природы молекул и для аналитических целей. Впервые обратил на это внимание М.В. Ломоносов, который еще около 1750 г. высказал мысль о возможности определения химического состава прозрачного жидкого вещества по его показателю преломления и построил рефрактометр для такого рода исследований. В настоящее время рефрактометрические методы находят в химии широкое применение.

Нередко в практической рефрактометрии вместо удельной рефракции Лоренц–Лорентца предпочитают пользоваться иными чисто эмпирическими выражениями, не имеющими теоретического обоснования, но лучше удовлетворяющими требованию аддитивности. Таково, например, эмпирическое выражение рефракции, предложенное Эйкманом (1895 г.), $r = \dfrac{n^2-1}{n+0{,}4}\,\dfrac{1}{\rho}$.

Для разреженных газов n близко к 1, т.е. $n^2+2 \approx 3$. Формула Лоренц–Лорентца превращается в формулу

$$n^2 - 1 = \frac{4\pi N e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\,, \tag{156.22}$$

т.е. совпадает с формулой, выведенной ранее без учета лорентцовской поправки на различие E и E', что и должно быть, ибо для разреженных газов $E = E'$.

д. Понятие о квантовой теории дисперсии. В квантовой теории мы не можем пользоваться модельными представлениями, подобными представлениям об атомных осцилляторах, колеблющихся с частотой, характерной для входящих в их состав зарядов. Вместо частоты колебания атомного осциллятора квантовая теория вводит частоту атомных переходов, т.е. частоту, определяемую требованием

$$\omega_{nm} = \frac{E_n - E_m}{\hbar}\,,$$

где E_m — энергия атома в некотором m-м состоянии, E_n — энергия атома в n-м состоянии, а $\hbar$ — квантовая постоянная Планка. Это так называемое условие для частоты означает, что энергия, освобождающаяся при переходе атома из n-го состояния в m-е, испускается в виде кванта излучения частоты ω_{nm}, энергия которого, согласно основному положению теории квантов, есть $\hbar\omega_{nm}$. Для каждого атома существуют строго определенные значения энергии E_m, E_n, ...,

так называемые уровни энергии. Поэтому атом способен излучать и поглощать лишь строго определенные кванты. Конечно, испускание кванта частоты ω_{nm} соответствует случаю, когда $E_n > E_m$. Наоборот, при переходе из m-го состояния в n-е энергия атома не уменьшается, а увеличивается, т.е. свет не испускается, а *поглощается* атомом.

Понятие «сила осциллятора» в квантовой теории приобретает ясный физический смысл: сила осциллятора оказывается пропорциональной вероятности перехода из n-го в m-е состояние. Чем больше эта вероятность, тем бóльшая часть из имеющихся в n-м состоянии атомов перейдет за единицу времени в m-е состояние, т.е. тем эффективнее данный переход участвует в явлении.

Кривая дисперсии и абсорбции, задаваемая в классической теории всей совокупностью свойственных данной группе атомов осцилляторов, в квантовой теории определяется всей совокупностью возможных для данного атома значений энергии E_1, E_2, ..., E_m, ..., E_n и т.д., которые в силу основного положения теории квантов принимают не любые мыслимые, а лишь определенные дискретные значения. Исходное состояние, в котором находятся атомы (верхнее, в котором находится значительное большинство атомов), обычно является состоянием, соответствующим минимальному из возможных значений энергии атома E_1. Если через газ пропускают ток или каким-нибудь другим способом к газу непрерывно подводится энергия, то часть атомов может перейти в более высокие энергетические состояния. Так, например, свечение газоразрядных источников обусловлено атомами, возбужденными в высокие энергетические состояния; покидая эти состояния, атомы и испускают свет.

Таким образом, в общем случае в дисперсию дают вклад как невозбужденные атомы (на уровне энергии E_1), так и возбужденные (на уровнях энергии $E_n > E_1$). Невозбужденные атомы могут участвовать лишь в переходах с уровня E_1 на выше расположенные уровни $E_n > E_1$, т.е. в переходах, сопровождающихся поглощением света. Для таких переходов силы осцилляторов принято считать положительными. Возбужденные атомы могут участвовать в переходах двух типов: возможны переходы с уровня E_m на выше расположенные уровни E_n ($E_n > E_m$) и переходы на ниже распололоженные уровни $E_{m'}$ ($E_{m'} < E_n$).

Переходы последнего типа сопровождаются, как уже отмечалось, испусканием света, и они изменяют показатель преломления в противоположном направлении по сравнению с поглощением. Это обстоятельство найдет отражение в формулах, если силам осцилляторов, связанным с излучательными переходами, приписать противоположный, т.е. отрицательный знак.

Таким образом, в отличие от классической теории, где силы осцилляторов f всегда положительны, в квантовой теории приходится принимать во внимание как положительные, так и отрицательные значения величин f. Этим последним соответствуют отрицательные члены (*отрицательная дисперсия*) в сумме, определяющей дисперсию в целом. Соответствующие члены во многих случаях играют малую роль в явлении; тем не менее Ладенбургу, изучавшему дисперсию в газе, через который проходил сильный электрический разряд, удалось

наблюдать (1930 г.) влияние отрицательных членов, хотя дисперсия в целом в его опытах оставалась положительной. Можно, однако, создать такие условия, когда возбуждено достаточно большое число атомов и в широкой области спектра преобладают отрицательные члены. Таково, в частности, положение в оптических квантовых генераторах (лазерах).

Явление отрицательной дисперсии тесно связано с излучением света (точнее, с явлением вынужденного испускания, см. § 222 и 223) и было детально исследовано в связи с изучением свойств лазеров, в которых оно играет важную роль.

е. Дисперсия в металлах. Характерным свойством металлов является наличие в них свободных электронов, т.е. электронов, собственную частоту которых следует считать равной нулю. Полагая $\omega_0 = 0$ в формулах (156.13) и (156.14), найдем [1]

$$n^2(1-\varkappa^2) = 1 - \frac{4\pi Ne^2}{m}\,\frac{1}{\omega^2+(g_0/m)^2}\,,$$
$$2n^2\varkappa = \frac{4\pi Ne^2}{m}\,\frac{g_0/m}{\omega[\omega^2+(g_0/m)^2]}\,. \qquad (156.23)$$

Опыт показывает, что эти формулы правильно передают зависимость от длины волны только в области малых частот (инфракрасные лучи). В видимой же и ультрафиолетовой областях для всех металлов (за исключением ртути) обнаруживаются заметные отступления. Таким образом, для более высоких частот оптические свойства металлов нельзя объяснить только свойствами *свободных* электронов, и необходимо учесть также влияние связанных электронов (электронов поляризуемости), роль которых становится особенно заметной для частот, близких к собственным частотам атомов. Учет электронов поляризуемости дает добавочные члены, соответствующие собственным частотам ω_k. Окончательно получим

$$n^2(1-\varkappa^2) = 1 - \frac{4\pi Ne^2}{m}\,\frac{1}{\omega^2+(g_0/m)^2} + \sum_k \frac{4\pi N_k e^2}{m}\,\frac{\omega_k^2-\omega^2}{(\omega_k^2-\omega^2)^2+(g_k/m)^2\omega^2}\,,$$
$$(156.24)$$
$$2n^2\varkappa = \frac{4\pi Ne^2}{m}\,\frac{g_0/m}{\omega[\omega^2+(g_0/m)^2]} + \sum_k \frac{4\pi N_k e^2}{m}\,\frac{\omega(g_k/m)}{(\omega_k^2-\omega^2)+(g_k/m)^2\omega^2}\,.$$

Эти формулы находятся в удовлетворительном согласии с опытом в широком диапазоне частот.

ж. Дисперсия рентгеновских лучей. В случае рентгеновского излучения его частота обычно значительно больше частоты собственных колебаний атома. Поэтому можно пренебречь

[1] Для простоты мы не вводим в формулы силы осцилляторов и пишем N вместо $N_0 f$.

величиной ω_0 по сравнению с ω, и формула дисперсии примет вид (без учета затухания)

$$n^2 = 1 - \frac{4\pi Ne^2}{m\omega^2}\,. \qquad (156.25)$$

Таким образом, показатель преломления n для рентгеновских лучей оказывается меньше единицы, хотя и отличается от единицы очень незначительно, ибо ω^2 очень велико. Удалось измерить показатель преломления, наблюдая отклонение рентгеновских лучей в призме из различных материалов. Для стекла при длине волны около 0,1 нм получено $n = 0{,}999999 = 1 - 1\cdot 10^{-6}$.

То обстоятельство, что $n < 1$, позволило осуществить в рентгеновской области явление полного внутреннего отражения на границе воздух–стекло. Впоследствии наблюдения были распространены и на другие материалы, и этот метод был даже использован для надежных измерений величины показателя преломления рентгеновских лучей.

Варьируя длину волны рентгеновского излучения, можно наблюдать также и аномальную дисперсию рентгеновских лучей вблизи характеристических частот вещества, которые интерпретируются, следовательно, как собственные частоты электронов, связанных с атомом более жестко, чем оптические электроны.

§ 157. Поглощение (абсорбция) света

Прохождение света через вещество ведет к возникновению колебаний электронов среды под действием электромагнитного поля волны и сопровождается потерей энергии последней, затрачиваемой на возбуждение колебаний электронов. Частично эта энергия вновь возвращается излучению в виде вторичных волн, посылаемых электронами, частично же она может переходить и в другие формы энергии. Если на поверхность вещества падает параллельный пучок (плоская волна) с интенсивностью I, то описываемые процессы должны вести к уменьшению I по мере проникновения волны в вещество. Действительно, опыт показывает, что интенсивность плоской волны обнаруживает такое систематическое уменьшение, согласно закону

$$I = I_0 e^{-\alpha d}, \qquad (157.1)$$

где I_0 — интенсивность волны, вступающей в вещество, d — толщина слоя и α — коэффициент поглощения, зависящий, вообще говоря, от длины волны (ср. § 141).

При измерении α надо, конечно, учитывать, что часть света отражается на границе исследуемого вещества, и вносить соответствующие поправки, например, при помощи формул Френеля. Еще удобнее измерять интенсивности света I_1 и I_2, прошедшего соответственно сквозь слои толщины d_1 и d_2. Вычисляя коэффициент поглощения из соотношения $I_1/I_2 = \exp[\alpha(d_2 - d_1)]$, найдем истинное значение α, свободное от поправок на отражение.

Числовое значение этого коэффициента α показывает толщину слоя d, равную $1/\alpha$, после прохождения которого интенсивность плоской волны падает в $e = 2{,}72$ раза. Так как α есть функция длины

волны, то обычно значения его дают в виде таблицы или графика, имеющего вид, подобный изображенному на рис. 28.13. Иногда зависимость α от λ имеет прихотливый вид, обнаруживая существование довольно узких областей сильного поглощения (большие значения α), в то время как близко расположенные длины волн проходят без заметного ослабления.

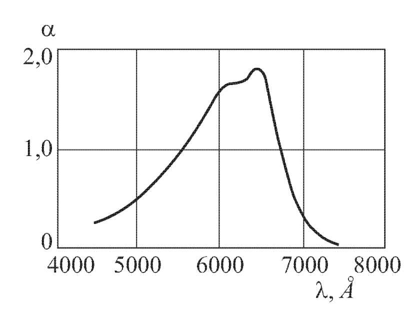


Рис. 28.13. Схематическое изображение широкой полосы поглощения

Особенно замечательно поглощение, обнаруживаемое при невысоком давлении в парах большинства металлов, представляющих собой собрание атомов, расположенных на значительном расстоянии друг от друга, т.е. практически изолированных. Коэффициент поглощения таких паров везде очень мал (близок к нулю) и лишь для очень узких спектральных областей (шириной в несколько сотых ангстрема) обнаруживает резкие максимумы. Так, для паров натрия коэффициент поглощения может

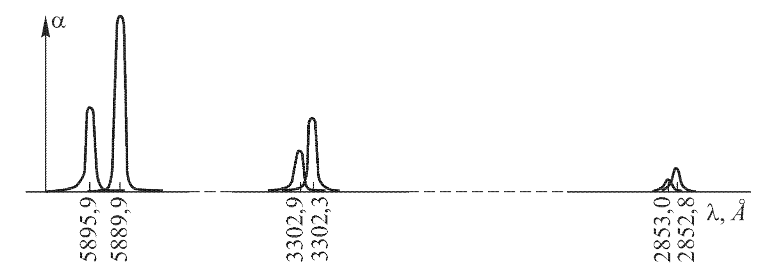


Рис. 28.14. Схематическое изображение нескольких дублетов поглощения в парах натрия. Ввиду того, что максимумы поглощения чрезвычайно узки, масштаб грубо искажен

быть изображен в виде кривой, показанной на рис. 28.14. При тщательно контролируемых условиях опыта удавалось наблюдать в спектре поглощения паров Na до 50 таких пар (дублетов), которые расположены тем ближе, чем короче длина волны.

Указанные области резкой абсорбции атомов соответствуют частотам *собственных* колебаний *электронов* внутри атомов. В случае газов, молекулы которых построены из нескольких атомов, обнаруживаются также *собственные* частоты, соответствующие колебаниям *атомов* внутри молекулы. Так как массы атомов в десятки тысяч раз больше массы электрона, то эти молекулярные собственные частоты обладают гораздо большими периодами, т.е. соответствуют инфракрасной области спектра.

Качественное представление о зависимости коэффициента поглощения от длины волны можно получить, сфотографировав сплошной

спектр какого-нибудь источника через слой поглощающего вещества. Чем больше коэффициент поглощения для данной длины волны, тем отчетливее обнаружится ослабление соответствующих участков спектра. На рис. 28.15 приведено несколько таких характерных спектров

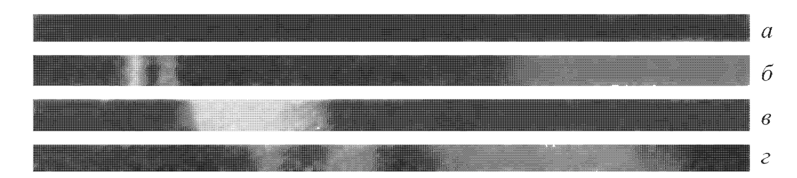


Рис. 28.15. Спектры поглощения растворов различных веществ (негатив): *а* — сплошной спектр источника; *б* — спектр поглощения азотнокислого неодима; *в* — спектр поглощения родамина B; *г* — спектр поглощения марганцевокислого калия

поглощения. Как правило, спектры поглощения твердых тел и жидкостей (включая и растворы красок) дают широкие полосы поглощения (плавный ход коэффициента α), хотя встречаются вещества со сравнительно узкими полосами поглощения (соли редких земель), которые, тем не менее, в сотни и тысячи раз шире линий поглощения атомарных газов. Спектр поглощения многоатомных газов представляет ряд более или менее сложных полос, а одноатомные газы (пары металлов) характеризуются резкими линиями поглощения, ширина которых нередко измеряется сотыми долями ангстрема. По мере повышения давления газов спектры поглощения их становятся все более и более расплывчатыми и при высоких давлениях приближаются к спектрам поглощения жидкостей. Эти наблюдения с очевидностью показывают, что расширение узких полос поглощения есть результат взаимодействия атомов друг с другом.

Общая закономерность $I = I_0 \exp(-\alpha d)$, вводящая понятие коэффициента поглощения α и показывающая, что интенсивность света падает в геометрической прогрессии, когда толщина слоя нарастает в арифметической прогрессии, была установлена экспериментально и обоснована теоретически Бугером (1729 г.). Она называется *законом Бугера*. Физический смысл этого закона состоит в том, что показатель поглощения не зависит от интенсивности света, а следовательно, и от толщины поглощающего слоя (см. упражнение 212). С.И. Вавилов установил, что закон Бугера выполняется в крайне широких пределах изменения интенсивности света (примерно 10^{20} раз).

Однако следует принять во внимание, что при поглощении света молекула переходит в новое, возбужденное состояние, запасая поглощенную энергию. Пока она находится в таком состоянии, ее способность поглощать свет изменена. То обстоятельство, что в опытах Вавилова закон Бугера соблюдался при самых больших интенсивностях, доказывает, что число таких возбужденных молекул в каждый момент остается незначительным, т.е. они очень короткое время находятся в возбужденном состоянии. Действительно, для веществ, с которыми

были выполнены указанные опыты, его длительность не превышает 10^{-8} с. К этому типу относится огромное большинство веществ, для которых, следовательно, справедлив закон Бугера. Выбрав специально вещества со значительно бо́льшим временем возбужденного состояния, Вавилов мог наблюдать, что при достаточно большой интенсивности света коэффициент поглощения уменьшается, ибо заметная часть молекул пребывает в возбужденном состоянии. Эти отступления от закона Бугера представляют особый интерес, так как они представляют собой исторически первые указания на существование нелинейных оптических явлений, т.е. явлений, для которых несправедлив принцип суперпозиции. Последующие исследования привели к открытию большого класса родственных явлений, содержание которых излагается в главах XL и XLI. Таким образом, закон Бугера имеет ограниченную область применимости. Однако в огромном числе случаев, когда интенсивность света не слишком велика и продолжительность пребывания атомов и молекул в возбужденном состоянии достаточно мала, закон Бугера выполняется с высокой степенью точности.

Бугер рассмотрел вопрос о поглощении света средой, плотность которой не везде одинакова, и высказал убеждение, что «свет может претерпевать равные изменения, лишь встречая равное число частиц, способных задерживать лучи или рассеивать их», и что, следовательно, для поглощения имеют значение «не толщины, а массы вещества, содержащиеся в этих толщинах». Этот *второй закон Бугера* приобретает большое практическое значение, ибо опыт действительно показал, что во многих случаях, когда имеет место поглощение света молекулами газов или молекулами вещества, растворенного в практически непоглощающем растворителе, коэффициент поглощения оказывается пропорциональным числу поглощающих молекул на единицу длины пути световой волны или, что то же, на единицу объема, т.е. пропорционален концентрации c. Другими словами, коэффициент абсорбции α выражается соотношением

$$\alpha = Ac,$$

и обобщенный закон Бугера принимает вид

$$I = I_0 \exp(-Ac\,d), \qquad (157.2)$$

где A — новый коэффициент, не зависящий от концентрации и характерный для молекулы поглощающего вещества.

Утверждение, что A есть постоянная величина, не зависящая от концентрации, нередко именуется *законом Бера*, который на основании своих измерений поглощения света окрашенными жидкостями также пришел к этому выводу (1852 г.). Его физический смысл состоит в том, что поглощающая способность молекулы не зависит от влияния окружающих молекул. Закон этот надо рассматривать скорее как *правило*, ибо наблюдаются многочисленные отступления от него, особенно при значительном увеличении концентрации, т.е. значительном уменьшении взаимного расстояния между молекулами поглощающего вещества. Точно так же нередко можно обнаружить зависимость A для растворенных веществ от природы растворителя, что также

указывает на влияние окружающих молекул на поглощательную способность изучаемой молекулы.

В тех случаях, когда A можно считать не зависящим от концентрации, обобщенный закон Бугера (157.2) оказывается очень полезным для определения концентрации поглощающего вещества путем измерения поглощения, которое может быть выполнено очень точно при помощи фотометров более или менее сложной конструкции. Этим приемом нередко пользуются в лабораторной и промышленной практике для быстрого определения концентрации веществ, химический анализ которых оказывается очень сложным (колориметрия и спектрофотометрия, абсорбционный спектральный анализ).

За последние годы особое развитие получил анализ молекулярного состава сложных смесей, основанный на измерении поглощения в ультрафиолетовой и особенно в инфракрасной областях спектра. Спектры поглощения многих органических молекул оказываются очень характерными, благодаря чему удается надежно устанавливать как молекулярный состав, так и количественное содержание отдельных компонент в смеси.

Метод этот отличается большой чувствительностью, ибо при малых концентрациях исследуемого вещества c можно увеличить поглощение за счет увеличения толщины слоя d. При исследовании смесей очень сложного состава возникают затруднения вследствие наложения полос поглощения разных веществ. Эти затруднения в большей степени проявляются в ультрафиолетовой области, чем в инфракрасной, ибо, как правило, полосы поглощения в ультрафиолетовой (и видимой) части спектра шире, чем в инфракрасной. Существенную помощь при анализе оказывает предварительная подготовка пробы (разгонка и некоторые другие физико-химические операции), которые позволяют разделить сложную смесь на ряд фракций более простого состава. Нередко очень полезным оказывается переход от жидкостей к парам, а также изучение абсорбции при возможно низких температурах.

Изложенные выше закономерности, установленные на опыте, показывают, что законы абсорбции света в основном определяются свойствами атома или молекулы, поглощающей свет, хотя действие окружающих молекул может значительно исказить результат. Особенно в случае жидких и твердых тел влияние окружения иногда радикально меняет абсорбирующую способность атома вследствие того, что под действием полей окружающих молекул поведение электронов, определяющих оптические свойства атомов, изменяется до неузнаваемости. Особенно разительно в этом отношении поведение металлов. Действительно, хорошо известно, что пары металлов, даже таких, как, например, серебро или натрий, представляют собой столь же хорошие изоляторы, как и пары (газы) других веществ, тогда как металлическое серебро или натрий являются наилучшими проводниками электричества. Таким образом, поведение наиболее слабо связанных с атомами электронов в изолированных атомах металлов и в конденсированном металле резко различно. В соответствии с этим металлический натрий не обнаруживает никаких признаков спектра поглощения, характерного для паров натрия и изображенного на рис. 28.14.

Для атомов некоторых веществ, например редких земель, к числу которых относится неодим (Nd) и празеодим (Pr), можно считать установленным, что оптический электрон принадлежит не к группе, расположенной в самой периферической части атома, как для большинства веществ, в частности для щелочных металлов, а к одной из внутренних групп. Такое «защищенное» положение оптического электрона редких земель объясняет, по-видимому, то обстоятельство, что соли этих веществ, даже введенные внутрь твердого вещества (стекло), обнаруживают очень узкие полосы поглощения, приближающиеся к полосам в спектре поглощения изолированных атомов. Из приведенных фактов и рассуждений явствует, что вопрос о природе поглощения света легче выяснить при исследовании поглощения изолированными атомами, т.е. разреженными газами.

Введенный нами в § 156 коэффициент g, характеризующий затухание электронного колебания в атоме, объясняет явление абсорбции. Действительно, мы получили (см. (156.12)), что амплитуда плоской волны, распространяющейся в поглощающей среде на глубину z, выражается соотношением

$$A = A_0 \exp\left(-\frac{2\pi}{\lambda_0}\, n\varkappa z\right). \tag{157.3}$$

Ясно, что этот закон эквивалентен закону Бугера, ибо в данном случае $z = d$, а коэффициент поглощения α выразится через $\dfrac{4\pi}{\lambda_0}\, n\varkappa$, так как интенсивность волны пропорциональна *квадрату* амплитуды. Как мы видели, при $g = 0$ коэффициент $n\varkappa$ (а следовательно, и α) обращается в нуль, т.е. среда, для которой $g = 0$, не поглощает света.

Однако коэффициент g, введенный в наше рассмотрение, имел чисто формальный смысл и скрывал в себе целый ряд различных процессов, ведущих к растрате энергии, заимствованной электроном от падающей волны.

а) Один из процессов, связанных с растратой энергии, заимствованной осциллятором, есть процесс излучения вторичных волн. Излучение является причиной рассеяния накопленной осциллятором энергии, вследствие чего амплитуда его колебаний достигает определенного предела, а не стремится к бесконечным значениям, как следует из упрощенной теории (вынужденные колебания без затухания). Эта причина затухания указана Планком и называется *затуханием вследствие излучения*; она не вызывает превращения лучистой энергии первичной волны в другие формы энергии, а лишь обусловливает *рассеяние* этой лучистой энергии *во все стороны*. Таким образом, энергия плоской волны, распространяющейся по первоначальному направлению, убывает и, следовательно, описанные выше приемы исследования будут обнаруживать ослабление света.

Однако, как показал Л.И. Мандельштам, затухание вследствие рассеяния проявляется в полной мере лишь для изолированного осциллятора. Вследствие интерференции вторичных волн, рассеиваемых различными осцилляторами среды, ослабление падающей волны может быть в значительной мере скомпенсировано.

Это явление тесно связано с явлением рассеяния света и будет несколько подробнее рассмотрено ниже (см. гл. XXIX).

Указанная причина затухания может играть главную роль для очень разреженных газов и меньшую для жидких или кристаллических тел, особенно при низких температурах, когда осцилляторы этих тел расположены так, что образуют вполне однородную среду.

Затухание вследствие излучения тем больше, чем больше излучение, т.е. чем больше амплитуды вынужденного колебания. Так как в знаменателе выражения для этой амплитуды стоит $(\omega_0^2 - \omega^2)$, то она достигает максимума при $\omega = \omega_0$, т.е. максимальное поглощение соответствует той частоте ω_0, которая совпадает с частотой собственного колебания атома. Последний вывод вполне соответствует наблюдению Кундта, согласно которому область аномальной дисперсии совпадает с областью максимального поглощения.

б) Возможны и другие процессы, ведущие к «истинному» поглощению света, т.е. сопровождающиеся переходом лучистой энергии в иную форму, например, в тепло. Для газовой фазы Лорентц указал на такой процесс, состоящий в столкновении возбужденного, т.е. колеблющегося, атома с другим атомом. В данном случае колебательная энергия может переходить в энергию поступательного движения столкнувшихся атомов, т.е. в тепло. И этот процесс поглощает особенно много энергии в том случае, когда $\omega = \omega_0$. В случае конденсированных сред (жидкости, твердые тела) передача энергии от возбужденного атома или молекулы тем более облегчена в силу тесного расположения частиц среды и сильного их взаимодействия друг с другом. В случае, например, жидкостей энергия колебаний ядер передается соседним молекулам за время, равное по порядку величины 10^{-12} с.

В связи с обсуждением опытов Вавилова мы обращали внимание на изменение числа поглощающих частиц под влиянием мощного падающего излучения. Однако это не единственный эффект, имеющий место при больших интенсивностях света. В § 156 подчеркивалась тесная связь законов поглощения и дисперсии с представлением об атоме как о гармоническом осцилляторе, заряды которого возвращаются в положение равновесия квазиупругой силой. Если интенсивность света, а следовательно, и амплитуда колебаний зарядов достаточно велика, то возвращающая сила уже не будет иметь квазиупругий характер, и атом можно представить себе как *ангармонический осциллятор*. Из курса механики известно, что при раскачивании такого осциллятора синусоидальной внешней силой (частота ω) в его движении появляются составляющие, изменяющиеся с частотами, кратными ω, — двойными, тройными и т.д. Пусть теперь собственная частота осциллятора ω_0, подсчитанная в гармоническом приближении, совпадает, например, с частотой 2ω. Энергия колебаний зарядов в этом случае особенно велика, она передается окружающей среде, т.е. возникает селективное поглощение света с частотой, равной $\omega = \omega_0/2$. Таким образом, спектр поглощения вещества, помимо линии с частотой ω_0, должен содержать линии с частотами, равными $\omega_0/2$, а также $\omega_0/3$ и т.д. Коэффициент поглощения для этих линий, как легко понять, будет увеличиваться с ростом интенсивности света.

В рамках квантовых представлений собственной частоте колебаний ω_0 отвечает частота перехода $\omega_{mn} = (E_m - E_n)/\hbar$ между состояниями m и n, обладающими энергиями E_m и E_n (см. § 156). Следо-

вательно, линии поглощения с $\omega_0/2$ соответствует переход атома из состояния n в состояние m с одновременным *поглощением двух фотонов*, ибо

$$E_m - E_n = \hbar\omega_{mn} = 2\hbar\omega.$$

Линии же $\omega_0/3$ соответствует переход, сопровождающийся поглощением трех фотонов и т.д. Из сказанного понятно название, которое получило описанное явление — *многофотонное поглощение*.

Многофотонное поглощение было теоретически предсказано М. Гепперт-Майер в 1931 г., но экспериментально было обнаружено лишь в 1962 г. (Кайзер и Гаррет) при облучении кристалла CaF_2, активированного европием, светом рубинового лазера. В последующих исследованиях многофотонное поглощение подробно изучалось в парах металлов, растворах органических красителей, полупроводниках, органических и неорганических кристаллах и в газах.

Многофотонное поглощение может проявляться весьма разнообразно. Если, например, вещество облучать светом, в составе которого есть спектральные компоненты с частотами ω_1 и ω_2, то может произойти поглощение двух фотонов $\hbar\omega_1$ и $\hbar\omega_2$ при условии, что $\omega_1 + \omega_2 = \omega_{mn}$. Отметим также, что в результате поглощения многих фотонов оптический электрон может также оторваться от атома (*многофотонная ионизация*, Г.С. Воронов, Н.Б. Делоне, 1965 г.). Так, например, наблюдалась ионизация атома гелия (потенциал ионизации 24,58 эВ) в результате поглощения 21 фотона излучения неодимового лазера ($\lambda = 1{,}06$ мкм). В такого рода опытах применяется импульсное сфокусированное излучение мощных лазеров, освещенность достигает значений 10^9–10^{13} Вт/см^2, а напряженность электрического поля составляет 10^6–10^8 В/см.

§ 158. Ширина спектральных линий и затухание излучения

Уже неоднократно указывалось, что идеальное монохроматическое излучение представляет собой фикцию и что в реальных случаях излучение всегда соответствует некоторому интервалу длин волн. Правда, излучение разреженных газов, поставленных в специально благоприятные условия, может довольно близко подходить к этому воображаемому случаю; так, наблюдаются спектральные «линии», в излучении которых представлены со сколько-нибудь измеримой интенсивностью длины волн, заключенные в интервале, не превышающем нескольких тысячных ангстрема. Еще более монохроматично излучение оптических квантовых генераторов, но и здесь энергия сосредоточена в конечном, хотя и очень малом спектральном интервале (см. § 228). В большинстве же случаев излучение атомов гораздо сильнее отличается от монохроматического и представляет собой набор излучений, длины волн которых варьируют в пределах нескольких сотых и даже десятых ангстрема. При повышении давления пара линии излучения расширяются все больше и больше и постепенно излучение теряет даже приблизительно монохроматический характер, переходя в сплошное излучение, подобное излучению накаленных твердых тел.

Для характеристики степени монохроматичности спектральных линий, т.е. излучения практически изолированных атомов, надо исследовать распределение интенсивности излучения по частотам с помощью прибора высокой разрешающей способности, например интерферометра Майкельсона или Фабри–Перо. Результат такого исследования можно представить в виде диаграммы (рис. 28.16), где по оси абсцисс отложены длины волн, а по оси ординат — соответствующие интенсивности. Конечно, нижние части полученных кривых очень мало достоверны, и можно полагать, что в идеальных условиях кривые спадали бы к нулю асимптотически. В разных условиях опыта (различие в природе пара, различие в температуре и давлении его, в степени ионизации и т.д.) форма спектральной линии, изображенная на рис. 28.16, может быть различной. В качестве характеристики ширины линии условно принимают расстояние в ангстремах между двумя точками A, B, где ордината достигает половины максимальной. Эту условную характеристику принято называть *шириной* спектральной линии. Как сказано, она в очень благоприятных случаях может составлять 0,001 Å и менее, но обычно бывает значительно шире; кроме того, и форма линии может сильно отступать от приведенной на рисунке, будучи иногда заметно асимметричной.

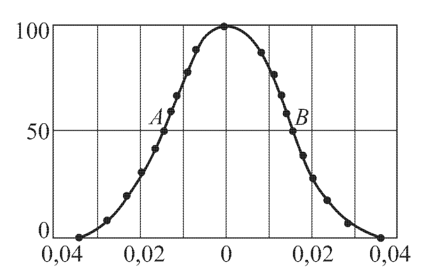


Рис. 28.16. Контур линии испускания, полученный с прибором большой разрешающей силы

Всякая причина, обусловливающая затухание электронных колебаний в атоме, влияет, конечно, на ширину спектральной линии, ибо вследствие затухания колебание перестает быть синусоидальным, и соответствующее излучение будет более или менее отличаться от монохроматического. Поэтому и затухание вследствие излучения и затухание, обусловленное соударениями, ведут к тем большему уширению спектральной линии, чем больше значение этих факторов. Затухание вследствие излучения должно характеризовать атом, поставленный в наиболее благоприятные условия, т.е. вполне изолированный от воздействия каких-либо внешних агентов. Поэтому ширину, обусловленную этой причиной, называют *естественной* или *радиационной* шириной спектральной линии. Величина ее обусловлена механизмом излучения атома. Рассматривая атом как электрический диполь, колеблющийся по законам классической электродинамики, мы можем вычислить потерю энергии этого диполя с течением времени, т.е. отыскать предполагаемый закон естественного затухания свечения. Расчет дает простой экспоненциальный закон

$$I = I_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \qquad (158.1)$$

где τ — величина, выражающаяся через заряд и массу электрона и показывающая, за какое время интенсивность излучения уменьшается

в e раз. В τ входит также и частота колебания электрона, так что τ для различных линий должна быть различна. Для видимого света τ имеет порядок величины 10^{-8} с.

В. Вину (1919 г.) удалось наблюдать на опыте такое естественное затухание свечения вследствие излучения, осуществив условия, при которых действие других причин, могущих влиять на ход излучения, было исключено. В его опытах источником света служили атомы, составляющие пучок каналовых лучей, летящих внутри хорошо эвакуированной трубки, что исключало соударения светящихся атомов с окружающими.

Схема опыта показана на рис. 28.17. При помощи мощных насосов в пространстве A поддерживается достаточное разрежение ($< 0{,}001$ мм рт. ст.), несмотря на то, что в части B, соединенной с A узкой диафрагмой ($0{,}1 \times 3$ мм^2), имеется давление около 0,05 мм рт. ст.,

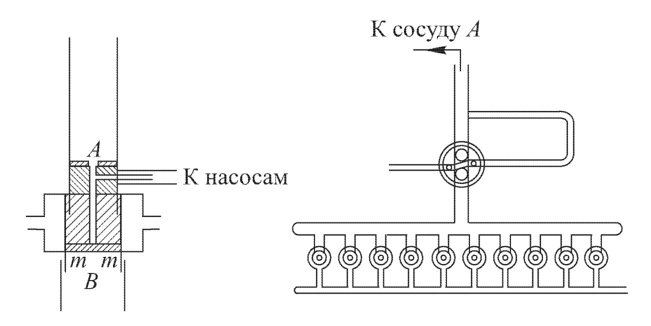


Рис. 28.17. Схема опыта Вина по наблюдению затухания свечения атомов

необходимое для создания каналового пучка. Светящиеся атомы, влетев в пространство A, движутся без столкновений, излучают свет, и колебания в них постепенно затухают. Поэтому интенсивность свечения падает по мере удаления от входного отверстия, и ее падение может служить мерой *естественного* затухания и, следовательно, естественной ширины линий.

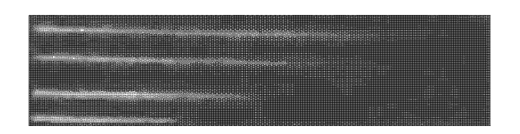


Рис. 28.18. Затухание свечения атомов

Наблюденное Вином падение интенсивности приблизительно удовлетворяет показательному закону, так что по фотографиям Вина (рис. 28.18) можно непосредственно определить то расстояние, на котором интенсивность свечения падает в e раз. Для того чтобы перейти к соответствующим временам, определялась скорость движения частицы (около $5 \cdot 10^7$ см/с) по доплеровскому изменению длины волны, испускаемой летящей частицей вдоль направления полета. Из своих опытов Вин получил для τ величину около 10^{-8} с, несколько меняющуюся от одного вещества к другому и от одной спектральной ли-

нии к другой. Таким образом, за время около одной стомиллионной секунды интенсивность свечения вследствие излучения падает приблизительно в три раза. Полученное значение согласуется в общем с предвидением теории, упомянутой выше, хотя и не подтверждает всех ее заключений.

Столкновения между атомами обусловливают «ударное» уширение спектральной линии. При очень низких плотностях, когда соударения редки, или в потоке свободно несущихся каналовых частиц, которые практически не сталкиваются, влияние этой причины уширения может быть сделано настолько малым, что им можно пренебречь. Но при обычных условиях газового свечения, например в разрядной трубке или в ртутной лампе, она может являться одной из серьезнейших или даже самой серьезной причиной уширения линий. Так, в современных ртутных лампах сверхвысокого давления, где давление паров ртути достигает 20–30 атм, «линии» ртутного излучения настолько уширены, что само выражение «спектральные линии» теряет смысл. Наблюдалось также заметное уширение спектральных линий при добавлении к светящемуся газу значительных количеств постороннего газа.

Так как в обычных разрядных трубках светящиеся молекулы газа носятся вследствие теплового движения по всем направлениям, то для наблюдателя, измеряющего ширину спектральной линии, выступает еще одна причина уширения, уже отмечавшаяся в § 22: свет посылается *движущимися* атомами, так что частота его изменена эффектом Доплера (см. § 128). Поскольку движение атомов происходит по всевозможным направлениям, составляющим всевозможные углы с направлением наблюдения, то изменение частоты будет соответствовать выражению $\Delta\nu = \nu\,\frac{v}{c}\,\cos\theta$, где v — скорость атома и θ — угол между направлением полета и направлением наблюдения. Угол θ имеет все значения от нуля до 180°, а v распределено по закону Максвелла. При температурах в несколько сотен и даже тысяч градусов, нередко соответствующих газовому разряду, это уширение, особенно для легких атомов, может иметь весьма заметную величину. В условиях опыта Вина все излучающие атомы имели практически скорость одного направления, а именно, направления каналового пучка; направление же наблюдения было выбрано перпендикулярно к линии полета. Поэтому в опытах Вина действие и этой причины было сведено к минимуму.

Наконец, следует считаться с тем обстоятельством, что светящиеся атомы могут оказаться под действием магнитных и электрических полей окружающих атомов, вызывающих изменение излучаемой частоты вследствие эффекта Зеемана и эффекта Штарка. Так как изменение частоты различных атомов различно, то эта причина также ведет к различному уширению спектральных линий. Действие ее (особенно эффекта Штарка) может быть весьма заметным при наличии сильной ионизации и, следовательно, сильных электрических полей. По-видимому, при свечении в разряде электрической искры действие этого фактора очень значительно и вызывает сильное уширение (десятые ангстрема и больше) некоторых линий.

Глава XXIX

РАССЕЯНИЕ СВЕТА

§ 159. Прохождение света через оптически неоднородную среду

Как уже упоминалось в § 157, вторичные волны, вызываемые вынужденными колебаниями электронов, рассеивают в стороны часть энергии, приносимой световой волной. Другими словами, распространение света в веществе должно сопровождаться *рассеянием света*. Достаточным условием для возникновения такого явления служило бы, по-видимому, наличие электронов, способных колебаться под действием переменного поля световой волны, а такие электроны есть в достаточном количестве во всякой материальной среде. Однако нужно помнить, что эти вторичные волны когерентны между собой и, следовательно, при расчете интенсивности света, рассеянного в стороны, надо принять во внимание их взаимную интерференцию.

Действительно, если среда оптически однородна или, другими словами, если ее показатель преломления не меняется от точки к точке, то в одинаковых малых объемах световая волна индуцирует одинаковые электрические моменты, изменение которых во времени и приводит к излучению когерентных вторичных волн одинаковой амплитуды. На рис. 29.1 представлен случай распространения плоской монохроматической волны в однородной среде. На волновом фронте AA' выделим объем V_1^* с линейными размерами, малыми по сравнению с длиной волны λ падающего света, но содержащий достаточно много молекул, чтобы среду можно было рассматривать как сплошную. В направлении, характеризуемом углом θ, объем V_1^* излучает вторичную волну определенной амплитуды и фазы. На волновом фронте AA' (см. рисунок) всегда можно выделить другой объем V_2^*, который в том же направлении испускает вторичную волну той же амплитуды, приходящую в точку наблюдения в противофазе с волной от V_1^* вследствие разности хода. Такие волны полностью погасят друг друга. Из рис. 29.1 видно, что расстояние l между выделенными объемами должно равняться

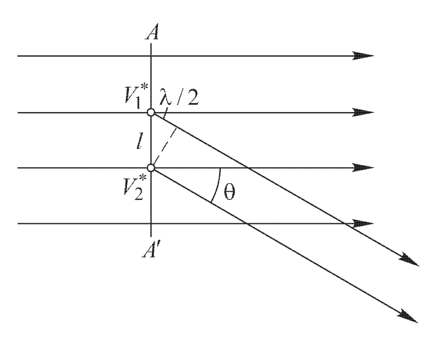


Рис. 29.1. К вопросу о роли оптической неоднородности при светорассеянии

$$l = \frac{\lambda}{2\sin\theta}\,.$$

Если среда вполне *однородная*, взаимное гашение будет иметь место для вторичных волн, испускаемых *любой парой* равновеликих объ-

емов, расположенных на волновом фронте и отстоящих друг от друга на расстояние l. Этим доказывается сделанное утверждение, что в однородной среде свет будет распространяться только в первоначальном направлении и рассеяние света будет отсутствовать. Полное гашение вторичных волн происходит для любого угла θ, кроме $\theta = 0$, ибо в этом направлении распространения падающей волны все вторичные волны складываются синфазно и образуют проходящую волну.

Таким образом, однородность среды и когерентность вторичных волн — условия, необходимые и достаточные для того, чтобы рассеянный свет не мог возникнуть. В действительности же идеально однородных сред не существует. В реальных средах оптические неоднородности различного происхождения всегда имеются, и это означает, что рассеянный свет всегда есть — очень интенсивный в одних случаях и предельно слабый в других.

Приведенные выше рассуждения об интерференции вторичных волн аналогичны использованным во френелевой теории прямолинейного распространения света. Если френелевы вторичные волны испускаются фиктивными источниками, то при рассеянии излучатели реальны и представляют собой атомы и молекулы среды. Однако для однородности среды нужно, чтобы в малых, но равных объемах содержалось одинаковое число излучателей одного сорта. Но такую «застывшую» картину реально осуществить нельзя, и поэтому всегда возникают нарушения однородности разной природы.

Рассуждения Френеля (см. главы VIII–X) показывают, что нарушение однородности ведет к явлениям дифракции на этих пространственных неоднородностях. Если неоднородности невелики по размерам (малы по сравнению с длиной волны), то дифракционная картина будет характеризоваться довольно равномерным распределением света по всем направлениям. Как уже упоминалось, такую дифракцию на мелких неоднородностях нередко называют *диффузией* или *рассеянием света.*

Если неоднородности среды грубые, т.е. близкие между собой малые участки среды, равные по объему, являются источниками вторичных волн заметно различной интенсивности, то и рассеяние света проявляется очень отчетливо. При слабых нарушениях однородности свет, рассеянный в стороны, составляет лишь очень малую долю первичного пучка, и наблюдение его может потребовать специальных условий. Опыт показывает, что для явления рассеяния света существенно именно *нарушение однородности* среды, а не сама способность среды давать вторичные волны.

Пусть пучок почти параллельных лучей от источника проходит через кювету с водой. Если вода очень тщательно очищена, то пучок почти не виден при наблюдении сбоку, т.е. в стороны от первоначального пучка свет практически не рассеивается; но если капнуть в кювету каплю одеколона, то возникает интенсивное рассеяние: пучок света явственно виден со всех сторон, и если толщина кюветы достаточна, то практически весь свет рассеивается в стороны и за кюветой мы уже не будем иметь ясно очерченного первичного пучка, а лишь диффузное поле рассеянного света. Конечно, введение капли одеколона не изменяет существенным образом свойств громадной массы

молекул воды, находящейся в кювете, но содержащиеся в одеколоне в растворенном виде вещества выпадают в водном растворе, образуя эмульсию — мелкие капельки, взвешенные в воде. Наличие таких неоднородностей создает совсем иные условия для взаимной интерференции вторичных волн. В результате первичный пучок дифрагирует на этих неоднородностях и дает картину рассеяния, характерную для мутной среды.

Вернемся еще раз к вопросу об оптической однородности среды, нарушение которой, как мы видели, является физической причиной явления рассеяния света. Как сказано, в случае оптически однородной среды близкие между собой малые участки ее, равные по объему, становятся под действием световой волны источниками вторичных излучений одинаковой интенсивности. Это означает, что соответствующие участки приобретают под действием переменного поля световой волны равные между собой электрические моменты, изменением которых со временем и вызывается вторичное излучение. Условие оптической однородности означает, что показатель преломления для разных участков нашей среды имеет одинаковое значение. Отсюда следует, что при постоянстве показателя преломления во всем объеме среды нельзя ждать явлений рассеяния света.

Итак, для нарушения оптической однородности необходимо нарушение постоянства показателя преломления. Показатель преломления связан с диэлектрической проницаемостью среды ε, согласно соотношению (см. § 156):

$$n = \sqrt{\varepsilon}, \quad \varepsilon E = E + 4\pi P.$$

Наконец, поляризация среды, т.е. электрический момент, приобретаемый единицей объема среды под действием внешнего поля E, есть $P = Np$, где N — число молекул в единице объема, а p — электрический момент, приобретаемый каждой из них под действием поля E [1]). Величину этого момента можно представить в виде $p = \alpha E$, где коэффициент α носит название *коэффициента поляризуемости* и характеризует собой строение молекулы. Итак,

$$P = N\alpha E,$$

т.е.

$$D = \varepsilon E = E + 4\pi N\alpha E, \tag{159.1}$$

или

$$\varepsilon = 1 + 4\pi N\alpha. \tag{159.2}$$

Таким образом, постоянство показателя преломления означает, что для равных объемов (не очень малых по линейным размерам сравнительно с длиной волны) произведение $N\alpha$ в разных местах среды одинаково. Это означает, что если оптически однородная среда построена из совершенно одинаковых молекул (α постоянно), то постоянным должно быть и N, т.е. плотность среды повсюду постоянна; если же среда состоит из разных молекул или групп, то постоянство

[1]) Мы не делаем для простоты различия между внешним и действующим полем, так что выводы наши имеют качественный характер, если не ограничиваться рассмотрением явлений в газах.

показателя преломления может быть обеспечено соответствующим подбором N и α. Например, подобранная соответствующим образом смесь бензола и сероуглерода с погруженными в нее кусочками стекла может представлять однородную среду: граница раздела между стеклом и жидкостью перестает быть заметной.

Указанным явлением можно воспользоваться для определения показателя преломления небольших прозрачных кусочков неопределенной формы; подобрав смесь жидкостей, в которой границы кусочка исчезают (при освещении по возможности монохроматическим светом), остается только определить показатель преломления смеси для соответствующей длины волны, что нетрудно сделать, поместив, например, каплю в рефрактометр Аббе. Таким приемом широко пользуются в минералогии; на основе этого принципа разработан также удобный технический метод быстрого определения не только показателя преломления стекла, но и дисперсии его, что очень помогает контролю технологического процесса варки стекла с определенными оптическими данными (И.В. Обреимов).

Если вместо одной крупинки стекла взять мелкий порошок однородного стекла (например, оптическое стекло определенного сорта, измельченное в порошок с крупинками размером около 0,5 мм) и, поместив в кювету с плоскими стенками, залить его какой-либо жидкостью, то, вообще говоря, такая кювета представит собой тело, оптическая однородность которого очень несовершенна: пучок света, проходящий через кювету, будет сильно рассеиваться в стороны; в направлении первичного пучка пройдет сравнительно мало света. Но если подобрать жидкость, как было указано выше, то, несмотря на сильную *физическую* неоднородность, наша кювета будет *оптически* однородным телом, сквозь которое пучок света пройдет, не ослабляясь. В действительности, осуществить опыт в таком простом виде невозможно, ибо стекло и жидкость обладают различной дисперсией, так что среда оказывается оптически однородной только для сравнительно узкого интервала длин волн. Свет именно этой спектральной области будет проходить через кювету без ослабления, а другое излучение испытает значительное рассеяние в стороны. При достаточной толщине кюветы можно добиться того, что проходящий свет будет ограничен очень узким интервалом длин волн (около 3,0–5,0 нм), и такая кювета будет служить хорошим светофильтром. При незначительном нагревании кюветы можно наблюдать, как меняется окраска проходящего света, что обусловливается различной температурной зависимостью показателя преломления стекла и выбранной жидкости.

Тиндаль первый наблюдал в лабораторных условиях рассеяние света на частицах, малых по сравнению с длиной волны видимого света (1869 г.). Он обратил внимание на то, что рассеянный под различными углами свет отличается от первоначального белого цвета синим оттенком, а свет, рассеянный под углом $\pi/2$ относительно направления падающего света, полностью или почти полностью линейно-поляризован.

Тиндаль высказал предположение, что голубой цвет неба, возможно, объясняется рассеянием солнечного света на пылинках, взвешенных в атмосфере Земли.

Во многих случаях наблюдается интенсивное рассеяние света вследствие естественно возникшей оптической неоднородности. Среды с явно выраженной оптической неоднородностью носят название мутных сред. Мутные среды — это дым (твердые частицы в газе) или туман (капельки жидкости, например воды, в воздухе), взвеси или суспензии, представляющие собой совокупность твердых частичек, плавающих в жидкости, эмульсии, т.е. взвесь капель жидкости в другой жидкости, их не растворяющей (например молоко есть эмульсия жира в воде), твердые тела вроде перламутра, опалов или молочных стекол и т.д. Во всех подобных случаях наблюдается более или менее сильное рассеяние света мутной средой, носящее обычно название *явления Тиндаля.*

Изучение рассеяния в мутных средах, где размеры частиц малы по сравнению с длиной волны, привело к установлению некоторых общих закономерностей, экспериментально открытых Тиндалем и рядом позднейших исследователей и теоретически объясненных Рэлеем. Представление об этих закономерностях можно получить на следующем простом опыте.

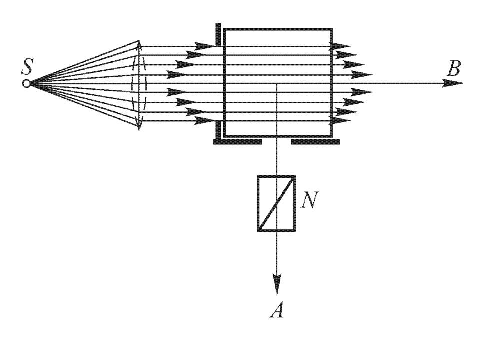


Рис. 29.2. Схема наблюдения рассеяния света в мутных средах

Пучок интенсивного света направляется на прямоугольную кювету, наполненную водой, которую сделали мутной, прибавив к ней несколько капель молока. След светового пучка будет ясно виден в воде.

При наблюдении сбоку (в направлении A, рис. 29.2) рассеянный свет имеет более голубой оттенок, чем свет источника S; наоборот, свет, прошедший сквозь кювету (в направлении B), обогащен длинноволновым излучением и при достаточной толщине кюветы имеет красноватый оттенок.

При наблюдении рассеянного света под прямым углом ($\theta = 90^\circ$) к первичному пучку через поляризатор N обнаруживается, что рассеянный свет линейно поляризован, хотя первоначальный свет, идущий от S, естественный. Направление электрического вектора в рассеянном свете перпендикулярно к плоскости, проходящей через направление первичного пучка и направление наблюдения.

Если оценить интенсивность света, рассеянного по разным направлениям, то она окажется симметричной относительно оси первичного пучка и относительно линии, к ней перпендикулярной (рис. 29.3). Кривая, графически показывающая распределение интенсивности рассеянного света по разным направлениям, носит название *индикатрисы* рассеяния. При естественном падающем свете индикатриса рассеяния имеет вид, показанный на рис. 29.3, и выражается формулой

$$I \sim 1 + \cos^2 \theta.$$

Пространственная индикатриса получается вращением кривой относительно оси BB.

Рэлей произвел расчет интенсивности света, рассеянного на сферических частицах, размеры которых малы по срарнению с длиной волны падающего света (1899 г.), и нашел, что для первоначального естественного света интенсивность рассеянного света равна

$$I = I_0 \frac{9\pi^2 \varepsilon_0^2 N(V')^2}{2\lambda^4 L^2} \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0}\right)^2 (1 + \cos^2\theta). \qquad (159.3)$$

Здесь N — число частиц в рассеивающем объеме, V' и ε — объем и диэлектрическая проницаемость частицы, ε_0 — диэлектрическая проницаемость среды, в которой взвешены частицы, θ — угол рассеяния, I_0 — интенсивность падающего света, L — расстояние от рассеивающего объема до точки наблюдения.

Формула Рэлея (159.3) описывает перечисленные закономерности. Интенсивность рассеянного света оказывается обратно пропорциональной четвертой степени длины волны, что находится в соответствии с измерениями и может объяснить голубой цвет неба. Закон $I \sim 1/\lambda^4$ носит название закона Рэлея. Однако, как будет показано ниже, голубой цвет неба не связан с наличием пыли в атмосфере.

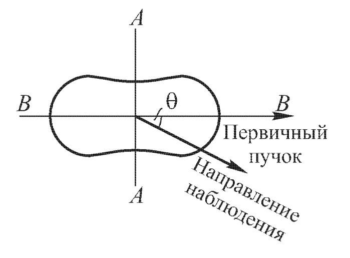


Рис. 29.3. Индикатриса рассеяния частицами, малыми по сравнению с λ

Из формулы (159.3) следует также, что интенсивность рассеянного света пропорциональна квадрату объема рассеивающей частицы или шестой степени радиуса сферической частицы.

Формула Рэлея содержит множитель $(\varepsilon - \varepsilon_0)^2/(\varepsilon + \varepsilon_0)^2$, который может служить мерой оптической неоднородности. Если $\varepsilon = \varepsilon_0$, то оптическая неоднородность исчезает и вместе с ней исчезает и рассеянный свет ($I = 0$). Такая мера оптической неоднородности относится не обязательно к малым частицам, но может служить для характеристики оптической неоднородности и в других случаях.

Выше уже приводился пример, когда кусок стекла, погруженный в жидкость с подходящим показателем преломления, практически переставал быть видимым.

Обсужденные закономерности рассеяния света перестают быть справедливыми, если размеры рассеивающих частиц становятся сравнимыми с длиной волны, что нередко наблюдается в коллоидных растворах.

Зависимость интенсивности рассеянного света от длины волны для таких более крупных частиц становится менее заметной, т.е. рассеянный свет оказывается менее голубоватым, чем в случае мелких частиц. Рассеянный свет оказывается поляризованным лишь частично, причем степень поляризации зависит от размеров и формы частиц. Распределение интенсивности рассеянного света по углам приобретает также более сложный характер: диаграмма рассеяния несимметрична по отношению к линии AA (см. рис. 29.3) и в зависимости от

размера, формы и природы частиц и окружающей среды может принимать очень сложный вид, сохраняя симметрию лишь относительно направления первичного пучка.

Эти более сложные закономерности очень затрудняют теоретическое истолкование рассеяния в мутных средах с крупными частицами. Тем не менее такие случаи представляют значительный интерес, ибо они обычно имеют место при исследовании коллоидных растворов и мутных сред, являющихся продуктами многих химических реакций. Поэтому подобные измерения находят применение в коллоидной химии, аналитической химии и биологии, составляя предмет *нефелометрических* методов исследования.

Казалось, что голубой цвет неба можно объяснить явлением рассеяния света на пылинках, однако опыты показали, что это не так, ибо и в чистой атмосфере, лишенной пыли (высокогорные обсерватории), наблюдается еще более насыщенная голубизна неба и поляризация его света. Дальнейшие теоретические и экспериментальные исследования показали, что все эти эффекты объясняются *молекулярным* рассеянием света в воздухе.

§ 160. Молекулярное рассеяние света

Особенный интерес представляют те случаи, когда мы не можем говорить о мутной среде в упомянутом выше смысле слова, т.е. когда среда представляет собой жидкость (или газ), тщательно освобожденную от посторонних примесей или загрязнений.

В таких средах наблюдается рассеяние света и, следовательно, существует физическая причина, ведущая к возникновению оптической неоднородности (Л.И. Мандельштам, 1907 г.). Физическая причина, вызывающая появление оптической неоднородности в идеально чистых средах, была найдена не сразу.

а. Критическая опалесценция. Для одного частного, но важного случая причина, ведущая к нарушению однородности, была указана М. Смолуховским (1908 г.). Давно было известно, что при критической температуре газа или жидкости наблюдается интенсивное рассеяние света (так называемая *критическая опалесценция*). Смолуховский обратил внимание на то, что при критической температуре сжимаемость среды очень велика $\left(\text{в критической точке теоретически } \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \text{ стремится к бесконечности}\right)$. В этих условиях легко могут возникнуть в небольших объемах заметные отступления от средней плотности, ибо большая сжимаемость означает, что тепловое движение достаточно для образования заметных вариаций плотности в малых объемах (*флуктуации плотности*). Связанное с этим нарушение оптической однородности и обусловливает сильное рассеяние света. Таким образом, Смолуховский объяснил явление критической опалесценции, дав тем самым указание, где надо искать причину нарушения однородности среды, приводящего к рассеянию света вообще.

Другой легко осуществимый случай молекулярного рассеяния света наблюдается при исследовании некоторых растворов. В растворах

мы имеем дело со смесью двух (или более) сортов молекул, которые характеризуются своими значениями поляризуемости α. В обычных условиях распределение одного вещества в другом происходит настолько равномерно, что и растворы представляют собой среду, в оптическом отношении не менее однородную, чем обычные жидкости. Мы можем сказать, что концентрация растворенного вещества во всем объеме одинакова и отступления от среднего (*флуктуации концентрации*) крайне малы. Однако известны многочисленные комбинации веществ, которые при обычной температуре лишь частично растворяются друг в друге, но при повышении температуры становятся способными смешиваться друг с другом в любых соотношениях. Температура, выше которой наблюдается такое смешивание, называется *критической температурой смешения*. При этой температуре две жидкости полностью смешиваются, если их весовые соотношения подобраны вполне определенным образом. Так, например, сероуглерод и метиловый спирт при 40 °C дают вполне однородную смесь, если взято 20 частей по весу сероуглерода и 80 частей метилового спирта. При более низкой температуре растворение происходит лишь частично, и мы имеем две ясно различимые жидкости: раствор сероуглерода в спирте и раствор спирта в сероуглероде. При температурах выше 40 °C можно получить однородную смесь при любом весовом соотношении компонент. С интересующей нас точки зрения критическая температура смешения характеризует такое состояние смеси, при котором особенно легко осуществляется местное отступление от равномерного распределения. Следовательно, при критической температуре смешения следует ожидать значительных флуктуаций концентрации и связанных с ними нарушений оптической однородности. Действительно, в таких смесях при критической температуре смешения имеет место очень интенсивное рассеяние света, легко наблюдаемое на опыте.

б. Рассеяние света на поверхности жидкости. Явления, аналогичные объемному рассеянию, могут наблюдаться на поверхности жидкости. Спокойная поверхность жидкости представляет собой зеркало, и свет, падающий на нее, испытывает правильное отражение по определенному направлению. Но если поверхность жидкости стала шероховатой, например вследствие сотрясений, то бóльшая или меньшая часть света испытает диффузное рассеяние в стороны. Правильная поверхность жидкости должна, вообще говоря, непрерывно «портиться» вследствие молекулярного движения, и когда эти неровности становятся сравнимыми с длиной волны, то зеркальное отражение вообще перестает быть возможным и поверхность становится матовой.

В обычных условиях, однако, матовость свободной поверхности жидкости выражена крайне слабо, ибо искажающему действию теплового движения препятствуют силы молекулярного сцепления, стремящиеся сохранить свободную поверхность минимальной (поверхностное натяжение).

На границе двух жидкостей эти капиллярные силы обычно меньше, чем на границе жидкость–газ. Они особенно малы вблизи критической температуры смешения. Действительно, в этом случае свет не

только отражается от границы по законам Френеля, но интенсивно рассеивается во все стороны (Л.И. Мандельштам, 1913 г). В благоприятных случаях молекулярная шероховатость так велика, что правильное отражение не наблюдается даже при больших углах падения, причем исчезновение правильного отражения легче наблюдать для волн меньшей длины, как и должно быть для матовых поверхностей (ср. упражнение 55).

Значительно труднее наблюдать свет, рассеянный свободной поверхностью, однако и это удалось даже для жидкости с такой большой капиллярной постоянной, как ртуть (Раман, 1926 г.).

Законы поверхностного рассеяния отличны от законов объемного рассеяния. Так, интенсивность поверхностно рассеянного света обратно пропорциональна второй степени длины волны (а не четвертой); своеобразны также и условия поляризации рассеянного света. Полная молекулярная теория этих явлений при молекулярных шероховатостях, еще малых по сравнению с длиной волны, находится в согласии с наблюдаемыми на опыте закономерностями (Ф.С. Барышанская, 1936 г.).

в. Молекулярное рассеяние света в чистом веществе. Физическая причина, ведущая к светорассеянию в чистом веществе, указана Смолуховским и, как сказано, состоит в том, что в силу статистической природы теплового движения молекул среды в ней возникают флуктуации плотности, особенно значительные в области критической точки. Флуктуации плотности $\Delta\rho$ в свою очередь ведут к флуктуации показателя преломления Δn или к флуктуации диэлектрической проницаемости $\Delta\varepsilon$ ($\varepsilon \equiv n^2$), а эти последние и представляют собой оптическую неоднородность.

Вдали от критической точки флуктуации не так велики, как в области критической точки, но они существуют и ими объясняется молекулярное рассеяние света в чистом веществе.

В 1910 г. Эйнштейн дал количественную теорию молекулярного рассеяния света вдали от критической точки, основанную на идее возникновения оптических неоднородностей среды вследствие флуктуаций диэлектрической проницаемости $\Delta\varepsilon$.

Интенсивность рассеянного света в этом случае будет определяться оптической неоднородностью флуктуационного происхождения. Поскольку интенсивность рассеянного света не зависит от знака $\Delta\varepsilon$, она будет пропорциональна $\overline{(\Delta\varepsilon)^2}$. Простой электродинамический расчет приводит к результату

$$I = I_0 \frac{\pi^2}{2\lambda^4 L^2} V^* V\overline{(\Delta\varepsilon)^2}(1+\cos^2\theta). \tag{160.1}$$

Здесь V^* — объем флуктуации, малый по сравнению с длиной волны света, но содержащий много молекул. Другие обозначения те же, что и в формуле (159.3).

Теперь, в случае молекулярного рассеяния света, мерой оптической неоднородности служит величина $\overline{(\Delta\varepsilon)^2}$. Если считать, что флуктуации $\Delta\varepsilon$ определяются только двумя независимыми термодинамическими переменными — плотностью и температурой или давлением

p и энтропией S, то можно написать

$$\Delta\varepsilon = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial p}\right)_S \Delta p + \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial S}\right)_p \Delta S, \quad \overline{(\Delta\varepsilon)^2} = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial p}\right)_S^2 \overline{(\Delta p)^2} + \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial S}\right)_p^2 \overline{(\Delta S)^2},$$

где Δp, ΔS — флуктуационные изменения давления и энтропии, а индекс у производных указывает, какая величина при дифференцировании поддерживается постоянной. Здесь также учтено, что флуктуации Δp и ΔS статистически независимы и, следовательно, $\overline{\Delta p \Delta S} = 0$. Теория флуктуаций позволяет выразить величины $\overline{(\Delta p)^2}$, $\overline{(\Delta S)^2}$ через термодинамические характеристики вещества и представить соотношение (160.1) в виде (см. упражнение 206)

$$I = I_0 \frac{\pi^2}{2\lambda^4} \frac{V}{L^2} \left[\left(\rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_S^2 \beta_S kT + \left(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_p^2 \frac{\sigma^2 kT^2}{c_p\rho}\right](1+\cos^2\theta). \quad (160.2)$$

Здесь ρ — плотность среды (г/см^3), T — абсолютная температура, β_S — адиабатическая сжимаемость, σ — коэффициент теплового расширения, c_p — теплоемкость при постоянном давлении 1 г вещества, V — рассеивающий объем.

Первый член в фигурных скобках формулы (160.2) определяет интенсивность света, рассеянного вследствие адиабатических флуктуаций плотности (флуктуаций давления), а второй — вследствие изобарических флуктуаций плотности (флуктуаций энтропии). Приближенно можно считать, что

$$\left(\rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_S^2 \approx \left(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_p^2 \approx \left(\rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T^2.$$

Если воспользоваться известным термодинамическим соотношением $\beta_T = \beta_S + \dfrac{T\sigma^2}{\rho c_p}$ (здесь β_T — изотермическая сжимаемость), то формула (160.2) переходит в формулу, впервые полученную Эйнштейном и носящую его имя

$$I = I_0 \frac{\pi^2 V}{2\lambda^4 L^2} \left(\rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T^2 \beta_T kT(1+\cos^2\theta). \quad (160.3)$$

Из формул (160.2) и (160.3) вытекает закон Рэлея $I \sim 1/\lambda^4$. Таким образом, молекулярное рассеяние света способно объяснить голубой цвет неба и красный цвет Солнца на закате. Принимая в расчет уравнение состояния идеального газа и связь между ε и ρ, из формулы (160.3) можно получить выражение для интенсивности света, рассеянного в газе, — первоначальную формулу Рэлея (см. упражнение 206).

Эйнштейн рассмотрел также случай, когда оптическая неоднородность вызывается флуктуациями концентрации растворенного вещества, если, разумеется, диэлектрическая проницаемость изменяется с концентрацией. В этом случае

$$\Delta\varepsilon = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial c}\right)_{p,S} \Delta c, \quad \overline{(\Delta\varepsilon)^2} = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial c}\right)_{p,S}^2 \overline{(\Delta c)^2},$$

где c — концентрация, Δc — флуктуация концентрации.

Несложный расчет показывает, что интенсивность света, рассеянного вследствие флуктуаций концентрации, определяется выражением

$$I_{\text{конц}} = I_0 \frac{\pi^2 V}{2\lambda^4 L^2} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial c}\right)^2_{p,S} \frac{cM}{N_\text{A}} (1 + \cos^2\theta), \tag{160.3a}$$

где M — молекулярный вес растворенного вещества, N_A — число Авогадро. Приведенная формула справедлива для небольших концентраций.

Развитие теории Эйнштейна на случай рассеяния в различных полимерах и белках (Дебай) дало один из лучших методов определения молекулярных весов и строения полимерных молекул с размерами порядка длины волны падающего света (или бóльшими).

Свет, рассеянный вследствие флуктуаций плотности и флуктуаций концентрации, полностью линейно-поляризован.

1) *Интенсивность рассеянного света.* Так как в формулу Эйнштейна входит постоянная Больцмана $k = R/N_\text{A}$, где R — газовая постоянная, а N_A — число Авогадро, то по интенсивности рассеянного света можно определить N_A — число молекул в 1 моле, измерив все остальные входящие в формулу параметры. Наиболее просто это сделать для газа. Поэтому при экспериментальном исследовании света, рассеянного газом, критерием молекулярного характера явления могла служить возможность вычисления этой важной постоянной.

Измерения интенсивности света, рассеянного атмосферой, проведенные в безоблачные дни в горных условиях, когда допустимо считать атмосферу свободной от случайных запылений, дали для числа Авогадро цифру, удовлетворительно согласующуюся с общепризнанным значением: по исправленным данным, полученным между 1938 и 1951 гг., эти измерения дают для числа Авогадро значение $(61{,}0 \pm 0{,}8) \cdot 10^{22}$ моль$^{-1}$ в прекрасном согласии с принятым значением $(60{,}2 \pm 0{,}3) \cdot 10^{22}$ моль$^{-1}$ [1]). Хорошие результаты получены также из опытов по рассеянию света в газах в лабораторных условиях (Кабанн и его сотрудники; по их последним данным $N_\text{A} = (61{,}0 \pm 0{,}8) \cdot 10^{22}$ моль$^{-1}$).

Молекулярный характер рассеяния в жидкости был надежно установлен рядом работ с 1913 по 1925 гг., причем были исследованы разные стороны явления. Новые тщательные исследования по рассеянию света в жидкости были продиктованы потребностью объяснить расхождения между теорией и экспериментами, которые приводили к неудовлетворительному значению для числа Авогадро. В настоящее время затруднения можно считать устраненными: экспериментальное определение всех величин, входящих в формулу для интенсивности рассеянного света, и в том числе величины $\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}$, которая ранее заимствовалась из недостаточно обоснованных соображений, дает для числа Авогадро значение $(59 \pm 2) \cdot 10^{22}$ моль$^{-1}$ (Г.П. Мотулевич, И.Л. Фабелинский, 1951 г.).

[1]) По данным, опубликованным в 1974 г., $N_\text{A} = 60{,}220943(61) \cdot 10^{22}$ моль$^{-1}$.

Измерения абсолютной интенсивности рассеянного света встречают серьезные экспериментальные трудности, которые, однако, удается преодолевать. Некоторое представление о результатах подобных измерений можно получить из следующих данных:

Воздух	Рассеивает $2,7 \cdot 10^{-7}$ части светового потока, вступающего в слой толщиной 1 см (при нормальном давлении и температуре)
Водород	Рассеивает в 43 раза меньше, чем воздух
Аргон	» » 1,2 » » » »
Углекислота	» » 2,6 » больше, чем воздух
Вода (жидкая)	» » 185 раз » » »
Бензол (жидкий)	» » 1700 » » » »
Кварц кристаллический	» » 7 » » » »
Каменная соль (крист.)	» » 5 » » » »

Молекулярное рассеяние в кристаллах также было надежно обнаружено (Г.С. Ландсберг с сотрудниками, 1927–1930 гг.). Кристаллы невозможно очистить от случайных включений, поэтому число изученных объектов здесь невелико. Метод, который позволил отличить молекулярно-рассеянный свет от света, рассеянного случайными включениями, состоял в исследовании зависимости интенсивности от температуры: интенсивность молекулярно-рассеянного света растет пропорционально абсолютной температуре, а интенсивность паразитного света от температуры не зависит.

На рисунках 29.4 и 29.5 приведены фотографии рассеянного разными веществами света в условиях тождественного освещения для

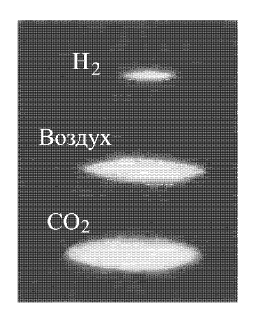


Рис. 29.4. Сравнительная интенсивность молекулярного рассеяния в водороде, воздухе и углекислом газе

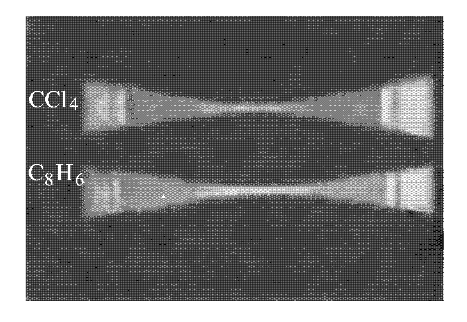


Рис. 29.5. Сравнительная интенсивность молекулярного рассеяния в четыреххлористом углероде (CCl_4) и бензоле (C_6H_6)

каждого из веществ. Они позволяют судить об относительной рассеивающей способности для разных веществ.

2) *Поляризация света при рассеянии.* Если естественный свет падает на молекулу в направлении OY (рис. 29.6), то колебания его

электрического вектора должны лежать в плоскости ZOX. Если наблюдать рассеянный свет в направлении OX, то в силу поперечности волн в этом направлении пойдут волны, обусловленные лишь той слагающей колебания электрического вектора, которая перпендикулярна к OX. Таким образом, в свете, рассеянном под прямым углом к падающему, должны наблюдаться только колебания (электрического вектора), направленные вдоль OZ, т.е. свет должен быть полностью поляризован.

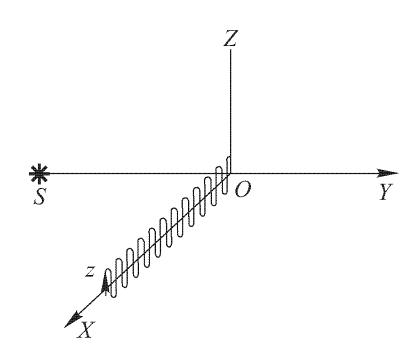


Рис. 29.6. К вопросу о поляризации рассеянного света

Однако дальнейшие наблюдения показали, что поляризация рассеянного света обычно не бывает полной. Если через I_y обозначить интенсивность света, электрические колебания которого совершаются вдоль оси OY, а через I_z — интенсивность света с колебаниями вдоль OZ, то степень поляризации Π определится соотношением

$$\Pi = \frac{I_z - I_y}{I_z + I_y}. \tag{160.4}$$

Изложенные выше соображения приводят к выводу, что при $I_y = 0$ $\Pi = 1$ (поляризация света достигает 100 %). Из опыта же следует, что I_y далеко не всегда равняется нулю: свет частично деполяризован. За меру деполяризации обычно принимают

$$\Delta = \frac{I_y}{I_z}. \tag{160.5}$$

Для ряда газов Δ отлично от нуля (для водорода $\Delta = 1\,\%$, для азота $\Delta = 4\,\%$, для паров сероуглерода $\Delta = 14\,\%$, для углекислоты $\Delta = 7\,\%$).

Для жидкостей степень деполяризации еще больше, достигая для бензола 44 %, для сероуглерода 68 %, а для нитротолуола даже 80 %. Объяснение этому явлению также было дано Рэлеем, который указал, что оно должно быть связано с оптической анизотропией рассеивающих молекул. Действительно, для анизотропной молекулы направление возникающей в ней электрической поляризации не совпадает, вообще говоря, с направлением электрического поля волны.

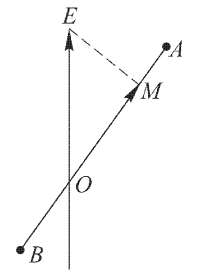


Рис. 29.7. Модель сильно анизотропной молекулы

Так, например, если молекула может поляризоваться вдоль одного лишь направления (модель молекулы в виде палочки AB, рис. 29.7; поляризуемость в направлении, перпендикулярном AB, равна нулю), то поле, направленное вдоль OE, вызовет все же колебания вдоль OA с амплитудой, пропорциональной слагающей поля OM, величина которой зависит от угла EOA. Если

среда состоит из таких молекул, то вторичная волна будет иметь электрические компоненты и вдоль OZ, и вдоль OY (рис. 29.8), относительные величины которых зависят от степени анизотропии молекулы, т.е. свет, рассеянный в направлении, перпендикулярном к первичному пучку, будет поляризован только частично.

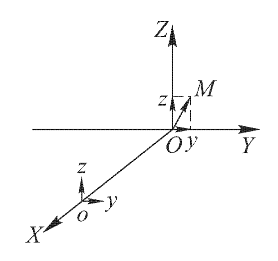


Рис. 29.8. Деполяризация при рассеянии анизотропными молекулами

Таким образом, частичная деполяризация света объясняется анизотропией молекул, т.е. теми же свойствами среды, что и явление двойного лучепреломления в электрическом поле (эффект Керра, см. § 152). Открывается возможность установить зависимость между постоянной Керра и величиной деполяризации. Опыт подтвердил эту зависимость.

В то же время измерения поляризации позволяют делать заключения относительно анизотропии молекул и используются, таким образом, для выводов, касающихся структуры молекул. Для этой цели особенно пригодны измерения в парах и газах, ибо в жидкой среде играют немалую роль взаимодействия молекул, учет которых до настоящего времени не может быть сделан достаточно полно. Именно этими взаимодействиями обусловлена значительно бóльшая деполяризация в жидкостях, чем в соответствующих парах. Таким образом, из сравнения деполяризации в парах и в жидкой фазе нельзя делать заключения, что в жидком состоянии молекулы более анизотропны, чем в паре.

Что же касается газов, то их исследование позволяет достаточно полно охарактеризовать основные оптические параметры, задаваемые эллипсоидом поляризуемости. Для полной характеристики анизотропной молекулы необходимо знать значения поляризуемости для трех главных направлений молекулы, т.е. в самом общем случае — три величины. Для этой цели мы располагаем тремя независимо измеряемыми величинами: показателем преломления, постоянной Керра и коэффициентом деполяризации рассеянного света.

Вследствие теплового движения анизотропных молекул среды кроме флуктуаций плотности возникают также и флуктуации ориентаций анизотропных молекул, или флуктуации анизотропии. Это означает, что статистический характер движения молекул приводит к тому, что в объемах, малых по сравнению с длиной волны света, в некотором направлении оказалось больше молекул, ориентированных одинаково, чем в любом другом направлении. Такая преимущественная ориентация анизотропных молекул или такие флуктуации анизотропии создадут оптическую неоднородность и, следовательно, вызовут рассеяния света.

Как было сказано, свет, рассеянный вследствие флуктуаций плотности, полностью линейно-поляризован. Вектор электрического поля этой световой волны лежит в плоскости, перпендикулярной к плоскости рассеяния. Свет, рассеянный вследствие флуктуации анизотропии, деполяризован, причем коэффициент деполяризации этого света

в соответствии с расчетами и опытом равен $\rho_u = 6/7$ при освещении рассеивающей среды естественным светом и $\rho_V = 3/4$ при освещении линейно-поляризованным светом с электрическим вектором, перпендикулярным к плоскости рассеяния при наблюдении рассеяния под углом $\theta = 90°$.

Смесь света, рассеянного вследствие флуктуаций плотности и флуктуаций анизотропии, характеризуется некоторым коэффициентом деполяризации Δ (см. формулу (160.5)), который определяется относительными вкладами деполяризованного света и поляризованного света. Расчет интенсивности света, рассеянного вследствие флуктуаций анизотропии, встречает большие трудности, поскольку флуктуации анизотропии не могут быть вычислены таким же путем, как флуктуации плотности. Однако задача о расчете соответствующей интенсивности была решена феноменологически для определенной модели жидкости. Мы не будем воспроизводить здесь этот расчет, но учтем вклад света, рассеянного вследствие флуктуации анизотропии в общую интенсивность, пользуясь значениями коэффициентов деполяризации, как это сделано Кабанном (1927). Пусть суммарная интенсивность рассеянного света есть $J = I + i$, где I выражается формулой (160.2) для $\theta = 90°$ (в дальнейшем будем обозначать ее I_{90}), а i есть интенсивность света, рассеянного вследствие флуктуаций анизотропии. Если принять, что падающий естественный свет распространяется вдоль оси Y (рис. 29.8), наблюдение рассеянного света производится вдоль оси X, а ось Z перпендикулярна к плоскости рассеяния, то $I = I_z$ и $i = i_x + i_z$ и, следовательно,

$$J = I_z + i_x + i_z.$$

Как уже было указано выше,

$$\Delta = \frac{i_x}{I_z + i_z}$$

и

$$\rho_u = \frac{i_x}{i_z} = \frac{6}{7}.$$

Принимая в расчет написанные здесь определения интенсивности и коэффициентов деполяризации и исключая i_x и i_z, получим

$$J_{90} = I_{90} f(\Delta).$$

Здесь J_{90} — полная интенсивность для $\theta = 90°$, множитель

$$f(\Delta) = \frac{6 + 6\Delta}{6 - 7\Delta}$$

называется фактором Кабанна.

Из написанных выше формул легко получить отношение

$$\frac{i}{I} = \frac{13\Delta}{6 - 7\Delta};$$

отсюда следует, что для таких жидкостей, как глицерин ($\Delta \approx 0{,}30$), интенсивность поляризованного рассеянного света равна приблизительно интенсивности деполяризованного рассеянного света. Если $\Delta \approx 0{,}68$ (как в случае сероуглерода), интенсивность света, рассеянного

вследствие флуктуаций анизотропии, в семь раз превосходит интенсивность света, рассеянного на флуктуациях плотности.

§ 161. Спектры молекулярного рассеяния света

Флуктуации давления, энтропии или температуры, концентрации и анизотропии возникают и «рассасываются» во времени. Разные флуктуации образуются и изменяются, следуя различным законам.

Возникшая флуктуация давления, которую можно рассматривать как локальное повышение или понижение давления, разумеется, не может «застыть» на месте в упругом теле, но «побежит» по объему вещества со скоростью распространения упругого возмущения. Флуктуации концентрации будут изменяться со скоростью, которая определяется коэффициентами диффузии, а флуктуации энтропии — со скоростью, определяемой коэффициентом температуропроводности вещества.

Все эти временны́е изменения оптических неоднородностей приведут к изменению амплитуды и фазы рассеянного света по закону, соответствующему характеру временно́го изменения оптической неоднородности.

Как было показано в § 4, 22, изменение (модуляция) амплитуды и фазы световой волны со временем ведет к изменению спектрального состава первоначально монохроматического светового излучения. Характер такого спектра будет зависеть от вида модулирующей функции или, другими словами, от вида зависимости амплитуды и фазы рассеянного света во времени.

а. Компоненты Мандельштама–Бриллюэна. Адиабатические флуктуации плотности или флуктуации давления можно рассматривать как совокупность упругих волн, распространяющихся в среде по всевозможным направлениям и обладающих всевозможными частотами (представление флуктуации в виде интеграла Фурье).

При расчете теплоемкости твердого тела (Дебай) энергия теплового движения рассматривается как энергия $3N$ упругих нормальных колебаний (волн) данного тела. Эти дебаевские упругие волны и фурье-компоненты, на которые разлагаются адиабатические флуктуации плотности, суть одни и те же волны (Л.И. Мандельштам). С такой точки зрения свет, рассеянный вследствие адиабатических флуктуаций плотности, есть свет, дифрагировавший на упругих тепловых волнах.

Направив внутрь среды параллельный пучок света, например, лазерного, можно наблюдать свет, дифрагировавший практически на одной-единственной упругой или звуковой волне. Если в среду направлена плоская монохроматическая волна $E = E_0 \cos[\omega_0 t - (\mathbf{kr})]$ с волновым вектором $\mathbf{k}$, которая встречает упругую волну $A = A_0 \cos[\Omega t - (\mathbf{qr})]$ с волновым вектором $\mathbf{q}$, то максимум дифрагировавшего света будет виден в направлении, отвечающем условию Брэгга (см. § 119), т.е. (рис. 29.9):

$$\mathbf{k}' - \mathbf{k} = \pm\mathbf{q}$$

($\mathbf{k}'$ — волновой вектор рассеянного света); полагая $|\mathbf{k}'| \approx |\mathbf{k}| = \dfrac{2\pi}{\lambda}\, n$ и $|\mathbf{q}| = 2\pi/\Lambda$, получим

$$2n\Lambda \sin\frac{\theta}{2} = \lambda, \qquad (161.1)$$

где Λ и λ — длины волн звука и падающего света соответственно. Амплитуда света, дифрагировавшего на стоячей упругой волне в направлении, определяемом углом рассеяния θ, будет меняться по закону $\cos\Omega t$, где Ω — частота упругой или звуковой волны.

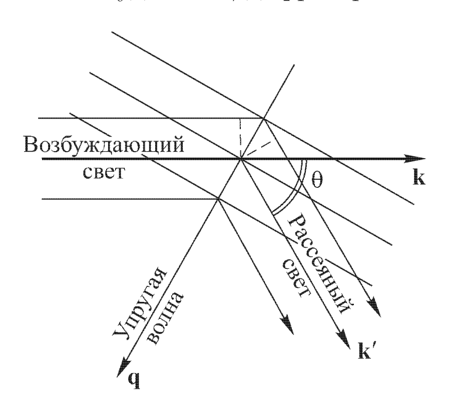


Рис. 29.9. К дифракции света на флуктуационной упругой волне

Поэтому поле рассеянного света можно записать следующим образом:

$$E(t) \backsim E_0 \cos\Omega t \cos\omega_0 t \backsim$$

$$\backsim \frac{1}{2}\, E_0[\cos(\omega_0+\Omega)t + \cos(\omega_0-\Omega)t].$$

Следовательно, в рассеянном свете должны наблюдаться два сателлита с частотами

$$\omega_0 + \Omega \quad \text{и} \quad \omega_0 - \Omega,$$

симметрично расположенными по обе стороны от частоты падающего света ω_0 ($\omega_0+\Omega$ — антистоксов и $\omega_0 - \Omega$ — стоксов сателлиты). Эти сателлиты называются компонентами Мандельштама–Бриллюэна и образуют тонкую структуру линии Рэлея. Частота упругой тепловой волны, вызвавшей модуляцию световой волны, может быть записана (с учетом (161.1) и соотношения $\omega_0 = 2\pi c/\lambda$) следующим образом:

$$\Omega = vq = v\left(\frac{2\pi}{\Lambda}\right) = \frac{4\pi n v}{\lambda}\, \sin\frac{\theta}{2} = 2\omega_0 n\,\frac{v}{c}\, \sin\frac{\theta}{2}, \qquad (161.2)$$

где v — скорость распространения упругой волны, соответствующая частоте Ω.

Таким образом, относительное изменение частоты сателлитов можно записать в виде

$$\pm\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \pm\frac{\Omega}{\omega_0} = 2n\,\frac{v}{c}\, \sin\frac{\theta}{2}, \qquad (161.3)$$

где $\Delta\omega$ — смещение компоненты Мандельштама–Бриллюэна. Последняя формула была получена независимо друг от друга Мандельштамом и Бриллюэном и носит их имя.

К соотношению (161.3) можно прийти, рассматривая дифракцию света на бегущей волне. В направлении, определяемом углом θ, приходит свет, зеркально отраженный от бегущих волн, движущихся со скоростями $\pm v$. Принимая во внимание эффект Доплера, можно получить формулу Мандельштама–Бриллюэна (161.3).

Из этой формулы ясно, что частоты звука Ω, определяющие рассеяние света, лежат в диапазоне от нуля (для $\theta = 0$) до максимальной величины $\Omega = 2n\omega_0 v/c$ (для $\theta = 180^\circ$). Учитывая, что v для

газов порядка 10^4, для жидкостей порядка 10^5 и для кристаллов порядка 10^6 см/с, находим для максимальных частот величины порядка $10^{-6}\omega_0$, $10^{-5}\omega_0$ и $10^{-4}\omega_0$ соответственно. Для зеленого света $\lambda = 500$ нм максимальные частоты лежат в интервале от 10^9 до 10^{11} с$^{-1}$ для разных веществ.

Такие малые изменения частоты света $\Delta\omega$ удается зарегистрировать только на спектральных аппаратах высокой разрешающей силы, например на интерферометре Фабри–Перо или дифракционном спектрографе с решеткой, обладающей большим числом штрихов. Наличие тонкой структуры линии Рэлея было впервые обнаружено экспериментально (1930 г.) Ландсбергом, Мандельштамом и Гроссом в монокристалле кварца и Гроссом в жидкостях.

На рис. 29.10 представлен снимок спектра излучения, рассеянного в бензоле, сделанный с помощью интерферометра Фабри–Перо при освещении жидкости светом гелий-неонового лазера с $\lambda = 632{,}8$ нм.

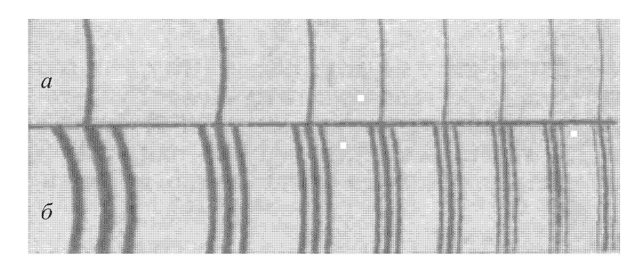


Рис. 29.10. Интерференционный спектр тонкой структуры линии рассеяния в бензоле при комнатной температуре, возбужденный линией 632,8 нм излучения гелий-неонового лазера: *а* — спектр возбуждающей линии, *б* — спектр тонкой структуры линии рассеяния

Измерение расстояния между компонентами Мандельштама–Бриллюэна $2\Delta\omega$ дает возможность (см. (161.3)) определить скорость звука весьма высокой частоты (вплоть до частот $10^{10}-10^{11}$ Гц). Сопоставление значения этой скорости с ее величиной при низких частотах, измеряемой в акустических и ультраакустических опытах, позволяет исследовать дисперсию скорости звука.

Затухание упругих волн обусловливает уширение компонент Мандельштама–Бриллюэна, причем полуширина компоненты равна

$$\delta\omega_{\text{МБ}} = 2\alpha v, \tag{161.4}$$

где α — амплитудный коэффициент затухания звука. Измерение ширин $\delta\omega_{\text{МБ}}$ позволяет определить коэффициент затухания звука высокой частоты (гиперзвук).

Интегральная интенсивность обеих компонент Мандельштама–Бриллюэна определяется первым слагаемым в квадратных скобках (160.2).

б. Центральная компонента. Спектр света, рассеянного вследствие изобарических флуктуаций плотности, отлича-

ется от только что рассмотренного спектра света, рассеянного вследствие адиабатических флуктуаций.

Действительно, временны́е изменения оптических неоднородностей, вызванных флуктуациями энтропии или температуры (см. (160.2)), подчиняются уравнению температуропроводности, решение которого в данном случае дает экспоненциальную зависимость от времени. Следовательно, в этом случае функция, модулирующая амплитуду световой волны, экспоненциально зависит от времени, и в рассеянном свете возникнет спектральная линия с максимумом на частоте первоначального света — центральная компонента — с полушириной

$$\delta\omega_c = q^2\chi, \quad q = \frac{4\pi n}{\lambda}\,\sin\frac{\theta}{2}\,,$$

где χ — коэффициент температуропроводности, равный $\varkappa/c_p\rho$ (здесь $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности).

Интегральная интенсивность света, рассеянного вследствие изобарических флуктуаций плотности, определяется вторым слагаемым в фигурных скобках в (160.2).

Временно́е изменение оптических неоднородностей, вызванных флуктуациями концентрации, подчиняется уравнению, формально совпадающему с уравнением температуропроводности, но с заменой χ на коэффициент диффузии D. Поэтому спектральная линия излучения, рассеянного вследствие флуктуаций концентрации, по положению совпадает с центральной компонентой, но имеет иную ширину, равную

$$\delta\omega_{\text{конц}} = q^2 D,$$

где D — коэффициент взаимной диффузии молекул раствора. Поскольку D в обычных растворах на несколько порядков меньше χ, соответствующая линия будет во столько же раз у́же, а интегральная интенсивность линии оказывается больше интенсивности, обусловленной изобарическими флуктуациями (при одинаковых углах рассеяния). Это обстоятельство позволяет найти D по измерению ширины центральной компоненты в растворе. Грубая оценка ширин для $\theta = 90^\circ$ и $\lambda = 435{,}8$ нм иллюстрирует порядок величин $\delta\omega$ для жидкости ($n \approx 1{,}5$, $v = 1{,}5\cdot 10^5$ см/с):

$$\begin{aligned}
\delta\omega_{\text{МБ}} &\sim 7\cdot 10^9\ \text{с}^{-1}, & \delta\nu_{\text{МБ}} &\sim 4\cdot 10^{-2}\ \text{см}^{-1} & &(\alpha\Lambda = 0{,}5),\\
\delta\omega_c &\sim 10^8\ \text{с}^{-1}, & \delta\nu_c &\sim 5\cdot 10^{-4}\ \text{см}^{-1} & &(\chi \sim 10^{-3}\ \text{см}^2/\text{с}),\\
\delta\omega_{\text{конц}} &\sim 10^5\ \text{с}^{-1}, & \delta\nu_{\text{конц}} &\sim 5\cdot 10^{-7}\ \text{см}^{-1} & &(D \sim 10^{-5}\ \text{см}^2/\text{с}).
\end{aligned}$$

в. Соотношение интенсивностей компонент тонкой структуры линии Рэлея. Отношение интегральной интенсивности центральной компоненты I_c, или интенсивности света, рассеянного вследствие изобарических флуктуаций плотности, к суммарной интенсивности обеих компонент Мандельштама–Бриллюэна $2I_{\text{МБ}}$, или к интенсивности света, рассеянного вследствие адиабатических флуктуаций плотности, просто найти из отношения

второго слагаемого в квадратных скобках (160.2) к первому:

$$\frac{I_c}{2I_{\text{МБ}}} = \frac{\left(\dfrac{1}{\sigma}\,\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)_p^2}{\left(\rho\,\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_S^2}\,\frac{\sigma^2 T}{c_p \rho \beta_S}\,. \tag{161.5}$$

Принимая во внимание, что

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{\beta_T}{\beta_S} = 1 + \frac{T\sigma^2}{\rho c_p \beta_S}\,,$$

где c_V — теплоемкость при постоянном объеме, и, полагая, что $\left(\rho\,\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_S^2 \approx \left(\dfrac{1}{\sigma}\,\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)_p^2$, из формулы (160.2) находим

$$\frac{I_c}{2I_{\text{МБ}}} = \gamma - 1. \tag{161.6}$$

Эта формула была впервые получена Л.Д. Ландау и Г. Плачеком (1934 г.) и носит название соотношения Ландау–Плачека. Она качественно согласуется с опытом.

Например, для воды $\gamma \approx 1$, и в спектре рассеянного света центральная линия отсутствует. Это обстоятельство легко понять, если вспомнить, что коэффициент расширения воды при температуре около 4 °C проходит через нуль и в выражении для γ второе слагаемое обращается в нуль. Почти во всех остальных веществах $\gamma > 1$ и центральная компонента отчетливо видна (см. рис. 29.10).

Исследование спектров молекулярного рассеяния представляет собой мощный и довольно универсальный инструмент изучения различных характеристик и свойств веществ в различных агрегатных состояниях при различных внешних условиях. Измерение положения дискретных компонент Мандельштама–Бриллюэна дает возможность составить себе ясную картину поведения упругих постоянных для различных кристаллографических направлений в твердом теле, в том числе в области фазового перехода, что представляет особенно большой интерес.

Измерение полуширин компонент Мандельштама–Бриллюэна дает сведения о поглощении гиперзвука, что эффективно при исследовании жидкостей и растворов, включая и область фазовых превращений. Новая спектроскопическая техника позволяет не только определить полуширину этих линий, но и, пользуясь формулами (161.4) и выражением для $\delta\omega_{\text{конц}}$, найти коэффициенты температуропроводности и взаимной диффузии растворов, а также проследить их температурную кинетику и установить закон, по которому эти величины стремятся к нулю при приближении к критической точке жидкость–пар и критической точке расслаивания растворов.

г. Спектр света, рассеянного вследствие флуктуаций анизотропии. Спектр света, рассеянного вследствие изменяющихся во времени флуктуаций анизотропии жидкости, представляет собой более или менее широкую полосу с макси-

мумом, приходящимся на частоту возбуждающего света и простирающуюся в каждую сторону на 150 $см^{-1}$ и даже больше (сероуглерод, бензол, нитробензол и др.). Этот спектр называется *крылом линии Рэлея*, а описанная картина распределения интенсивности наблюдается при использовании для возбуждения естественного или линейно-поляризованного света.

Коэффициент деполяризации в крыле линии Рэлея равен 6/7 при возбуждении естественным светом и 3/4 при возбуждении линейно-поляризованным светом с электрическим вектором, перпендикулярным к плоскости рассеяния. При возбуждении таким линейно-поляризованным светом и при наблюдении спектра рассеянного света с электрическим вектором, лежащим в плоскости рассеяния, было установлено, что на частоте возбуждающего света имеется «провал», иногда достигающий 30 % от максимальной интенсивности (И.Л. Фабелинский и сотрудники, 1967 г.).

Таким образом, в крыле линии Рэлея наблюдается тонкая структура, которая объясняется модуляцией света, рассеянного вследствие флуктуаций анизотропии, поперечными волнами. Скорость таких волн в маловязких жидкостях лежит в пределах от 100 до 200 м/с.

Разработанная теория распределения интенсивности в крыле линии Рэлея (М.А. Леонтович, 1941 г., С.М. Рытов, 1957, 1970 гг.) вместе с результатами измерений позволяет определять времена релаксации анизотропии.

Полученные результаты имеют не только научное, но и практическое значение, потому что именно этими временами определяется время существования двойного лучепреломления в электрическом поле (явление Керра, см. § 152) и, следовательно, эти времена определяют минимальную экспозицию при использовании ячейки Керра в качестве «фотографического» затвора. Такой затвор теперь находит широкое применение при исследовании различных быстропротекающих процессов и имеет другие практические применения.

д. Вынужденное рассеяние Мандельштама–Бриллюэна. В рассмотренных выше случаях рассеяния света принималось во внимание влияние оптических неоднородностей среды различного происхождения на характер распространения света, но не учитывалось влияние света на оптические неоднородности. Пока интенсивность возбуждающего света настолько мала, что она не может заметно повлиять на характер неоднородности среды, пренебрежение влиянием света на среду допустимо. Но когда интенсивность возбуждающего света велика и заметно влияет на характер внутреннего движения среды, воздействие света на оптические неоднородности необходимо принять во внимание. При воздействии на среду интенсивного света гигантского импульса лазера (см. гл. XL) возникает ряд нелинейных оптических явлений. Один из классов таких явлений назван вынужденным рассеянием света.

Здесь будет качественно рассмотрен только один из типов вынужденного рассеяния — вынужденное рассеяние Мандельштама–Бриллюэна (ВРМБ), начало которому дает рассеяние света, обусловленное тепловыми флуктуациями давления (см. выше).

Физическая причина вынужденного рассеяния Мандельштама–Бриллюэна состоит в том, что интенсивная световая волна возбуждающего света, первоначально слабая волна рассеянного света и тепловая упругая волна, которая, как указано выше, обусловливает дискретные компоненты Мандельштама–Бриллюэна, нелинейно взаимодействуют друг с другом. Такое нелинейное взаимодействие осуществляется посредством явления электрострикции.

Явление электрострикции состоит в том, что диэлектрик в электрическом поле меняет свой объем, и таким образом возникает электрострикционное давление, которое можно выразить соотношением

$$p = \left(\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right) \frac{E^2}{8\pi}, \tag{161.7}$$

где ε ($\equiv n^2$) — диэлектрическая проницаемость среды. Величина $\left(\rho \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)$ порядка единицы и, следовательно, давление определяется величиной напряженности электрического поля. Как будет показано в гл. XL, напряженность электрического поля световой волны в гигантском импульсе лазера может достигать значений, характерных для внутриатомных полей, и тогда электрострикционное давление может составлять сотни тысяч атмосфер.

Для грубого качественного пояснения природы ВРМБ будем считать, что в среде существуют поле возбуждающей световой волны $E_0 \cos(\omega t - \mathbf{kr})$ (гигантский импульс лазера) и — в результате рассеяния света — поле одного лишь стоксового сателлита $E_1 \cos[(\omega - \Omega)t - \mathbf{k}_1\mathbf{r}]$. Поле этого сателлита, как показано выше, возникает в результате рассеяния света под углом Брэгга и модуляции рассеянного света тепловой волной с частотой Ω.

Для нахождения p (см. формулу (161.7)) нужно сумму обоих написанных выше полей возвести в квадрат. После такой операции и элементарных тригонометрических преобразований получим, что p складывается из высокочастотных членов со световыми частотами и составляющей со звуковой частотой Ω. Звук со световой частотой сильно затухает и распространяться не может, поэтому соответствующие члены следует отбросить и останется выражение

$$p = \frac{1}{8\pi} \left(\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right) E_0 E_1 \cos(\Omega t - \mathbf{qr}). \tag{161.8}$$

Здесь правая часть совпадает с выражением для звуковой волны, ответственной за образование стоксовой компоненты Мандельштама–Бриллюэна. Амплитуда первоначально слабой волны, будучи умножена на E_0, приведет к росту электрического поля световой волны стоксовой компоненты, что в свою очередь приведет к росту давления и т.д. Такой процесс параметрического усиления будет происходить до тех пор, пока интенсивность «рассеянной» световой волны не окажется сравнимой с интенсивностью возбуждающего света.

Явление вынужденного рассеяния Мандельштама–Бриллюэна было обнаружено в кристаллах кварца и сапфира (Чиао, Таунс, Стоичев,

1964 г.) и затем найдено в стеклах, жидкостях и газах. На рис. 29.11 приведен спектр ВРМБ в плавленом кварце. На спектре видны две стоксовы компоненты ВРМБ при наблюдении рассеянного света под углом 180°. Вторая компонента возникает в результате того, что первая стоксова компонента попадает в лазер, усиливается там и, возвратившись в образец, сама вызывает стоксовы компоненты ВРМБ.

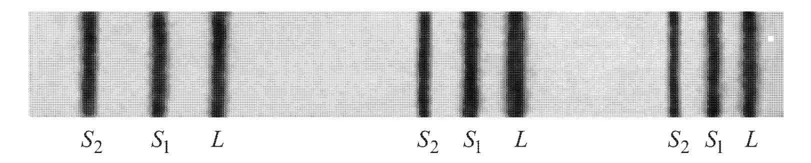


Рис. 29.11. Спектр вынужденного рассеяния Мандельштама–Бриллюэна в плавленном кварце: L — линия возбуждающего света рубинового лазера, S_1 и S_2 — первая и вторая стоксовы компоненты ВРМБ

Таких последовательно возникших компонент может быть много. Существуют, однако, условия эксперимента, при которых могут наблюдаться антистоксовы компоненты при вынужденном рассеянии.

Каждый вид теплового или спонтанного рассеяния дает начало вынужденному рассеянию. Кроме ВРМБ были обнаружены вынужденное рассеяние крыла линии Рэлея (Маш, Морозов, Старунов, Фабелинский, 1965 г.), вынужденное температурное или энтропийное рассеяние (Зайцев, Кызыласов, Старунов, Фабелинский, 1967 г.). Построена строгая теория этих явлений.

§ 162. Комбинационное рассеяние света

Согласно закону Рэлея распределение энергии в рассеянном свете отличается от распределения в первичном свете относительно большей ее величиной в коротковолновой части спектра. Качественное представление о характере явления дает рис. 29.12, на котором изобра-

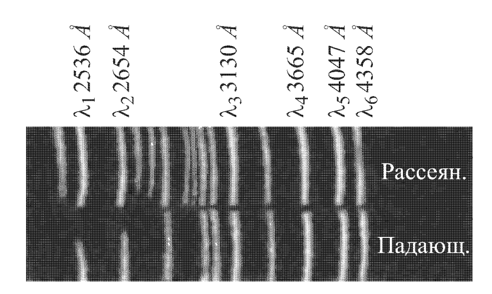


Рис. 29.12. Спектр прямого света ртутной лампы и спектр той же лампы в рассеянном свете. Ясно заметно относительное возрастание интенсивности коротких волн в рассеянном свете

жены фотографии спектра прямого света ртутной лампы и спектра той же лампы в свете, рассеянном в воздухе. Экспозиции подобраны так, чтобы были приблизительно равны интенсивности для линий большой длины волны. Тогда различие интенсивностей в более коротковолновой части спектра выступает отчетливо.

Согласно прежним исследованиям указанное различие считалось единственным отличием в спектрах прямого и рассеянного света. Тщательное изучение показало, однако (Раман, Г.С. Ландсберг и Л.И. Мандельштам, 1928 г.), что в спектре рассеянного света наблюдаются, кроме линий, характеризующих падающий свет, еще добавочные линии, спутники, сопровождающие каждую из линий первичного света (рисунки 29.13, 29.14).

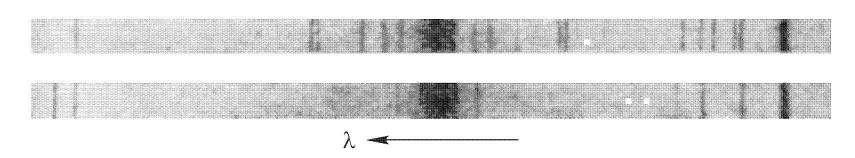


Рис. 29.13. Спектр комбинационного рассеяния четыреххлористого углерода. Внизу для сравнения приведен спектр ртутной лампы

Так как спутники сопровождают любую спектральную линию первичного света, то ясно, что обнаружение их возможно лишь в том

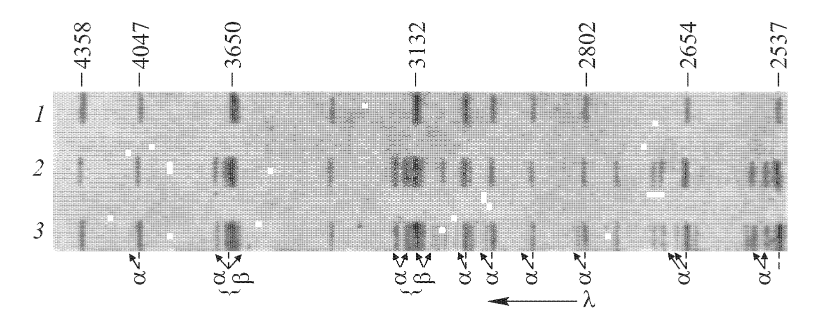


Рис. 29.14. Спектр комбинационного рассеяния кварца: *1* — спектр ртутной лампы; *2* — спектр рассеяния кварца при температуре 20 °C; *3* — спектр рассеяния кварца при температуре 210 °C; α — «красные» спутники, β — «фиолетовые» спутники

случае, когда падающий свет представляет собой совокупность отдельных (монохроматических) линий, а не сплошной спектр. Опыт позволил установить следующие законы этого явления.

1) Спутники сопровождают каждую линию первичного света.

2) Различие $\Delta\nu$ в частотах возбуждающей первичной линии ν_0 и линий каждого из спутников, ν', ν'', ν''', ..., характерно для рассеи-

вающего вещества и равно частотам собственных колебаний ν^i его молекул:

$$\Delta\nu_1 = \nu_0 - \nu' = \nu_1^i, \quad \Delta\nu_2 = \nu_0 - \nu'' = \nu_2^i, \quad \Delta\nu_3 = \nu_0 - \nu''' = \nu_3^i, \ldots$$

Примером может служить табл. 29.1.

Таблица 29.1

Сопоставление волновых чисел для толуола по данным инфракрасных спектров и комбинационного рассеяния

Комбинационное рассеяние	Инфракрасные спектры	Комбинационное рассеяние	Инфракрасные спектры	Комбинационное рассеяние	Инфракрасные спектры
3067	—	—	1494	786**	1033*
3054**	—	1380	1456*	623	911
3032	—	1211*	1384	521	—
2981	2990*	1156*	1311	217	892
2920	—	1090	1213		841
2870	1859	1031	1158		729**
1605	1608*	1004**	1075*		693**

Волновые числа, приведенные в таблице, показывают число волн, укладывающихся на одном сантиметре. Для получения частот (числа колебаний в секунду) эти числа надо умножить на $3 \cdot 10^{10}$ (скорость света).

Цифры, отмеченные звездочкой, означают сильные линии, а отмеченные двумя звездочками — очень сильные линии.

3) Спутники представляют собой две системы линий, лежащих *симметрично* по обе стороны возбуждающей линии, т.е.

$$\nu_0 - \nu_r = \nu_v - \nu_0.$$

Здесь ν_r обозначает частоты спутников, лежащих в сторону более длинных волн, чем возбуждающие, а ν_v — частоты соответствующих спутников, лежащих с другой стороны. Первые спутники, расположенные ближе к красной части спектра и потому иногда называемые «красными» (α на рис. 29.14), значительно интенсивнее, чем соответствующие «фиолетовые» (β на рис. 29.14).

4) С повышением температуры интенсивность «фиолетовых» спутников быстро возрастает.

Можно себе представить сущность явления комбинационного рассеяния, пользуясь упрощенным представлением о световых квантах. В силу этих представлений свет частоты ν_0 распространяется в виде определенных порций (*квантов*), величина которых $h\nu_0$, где $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с — универсальная постоянная, введенная Планком [1]). В соответствии с этим атом или молекула, в которых совер-

[1]) Подробнее о световых квантах см. гл. XXXII.

шаются колебания с частотой ν_0, содержат запас энергии $h\nu_0$, который может быть испущен этим атомом (молекулой) в виде света той же частоты. С этой точки зрения рассеяние света молекулами следует упрощенно рассматривать как столкновение световых квантов, т.е. фотонов, с молекулами, в результате которого фотоны изменяют направление своего полета, т.е. рассеиваются в стороны. Столкновения фотонов с молекулами могут быть как упругими, так и неупругими. В первом случае энергия молекулы и частота ν_0 фотона не меняются, что соответствует рэлеевскому рассеянию. При неупругом столкновении энергия фотона увеличивается или уменьшается на величину колебательного кванта $h\nu_i$. Если свет вступает во взаимодействие с молекулой, не находящейся в состоянии колебания, то он отдает молекуле соответствующую часть энергии и превращается в излучение меньшей частоты («красный спутник») в соответствии с уравнением

$$h\nu' = h\nu_0 - h\nu_i, \quad \text{или} \quad \nu' = \nu_0 - \nu_i,$$

где ν_0 — частота возбуждающего света, ν_i — частота колебаний молекулы.

Если же свет воздействует на молекулу, находящуюся в колебательном состоянии, т.е. обладающую энергией $h\nu_i$, то он может отобрать от молекулы эту энергию и превратиться в излучение *большей* частоты («фиолетовый спутник») в соответствии с уравнением

$$h\nu' = h\nu_0 + h\nu_i, \quad \text{или} \quad \nu' = \nu_0 + \nu_i.$$

Число молекул, находящихся в состоянии колебания (с избытком энергии), значительно меньше числа молекул невозбужденных, и поэтому интенсивность фиолетового спутника должна быть несравненно меньшей, что и наблюдается на опыте.

С повышением температуры число возбужденных молекул быстро растет, и в соответствии с этим должна быстро возрастать интенсивность фиолетовых спутников, что также подтверждается опытом. Увеличение интенсивности фиолетовых спутников легко видеть на рис. 29.14, где спектр *2* соответствует температуре рассеивающего вещества (кварца), равной 20 °C, а спектр *3* — температуре 210 °C.

Изложенная простая теория, передавая основные черты явления, оставляет неосвещенным целый ряд его важных особенностей. Прежде всего остается необъясненным очень серьезное различие, отмеченное в таблице на с. 548. Некоторые интенсивные инфракрасные линии обнаруживаются в комбинационных спектрах как очень слабые, а иногда и совсем не обнаруживаются; наоборот, некоторые, и притом нередко самые интенсивные, линии комбинационного рассеяния не могут быть найдены среди инфракрасных абсорбционных спектров. Сверх того, упрощенная квантовая теория не позволяет усмотреть никакой связи с общей теорией рассеяния света, которой мы успешно пользовались до сих пор. Полное решение вопроса следует искать в более совершенной квантовой теории. Однако мы можем до известной степени уяснить вопрос, рассмотрев его в рамках классических представлений, которыми мы пользовались до сих пор. Надо

только помнить, что полной картины мы не сможем получить, не внеся в наши классические представления «поправки», соответствующей квантовому характеру явления, отличающему, по существу, все явления взаимодействия света и вещества.

Нарушение оптической однородности может быть обусловлено, как показано выше, вариациями в значении произведения $N\alpha$, где N — число молекул в единице объема, а α — коэффициент поляризуемости молекулы. Флуктуации в значении N обусловливают изученное выше рассеяние света (рэлеевское рассеяние); флуктуации в значении α могут быть другой причиной, обусловливающей рассеяние.

Изменения в поляризуемости могут наступить, если меняется конфигурация отдельных частей (атомов), составляющих молекулу, что всегда имеет место при колебаниях атомов, входящих в состав молекулы. Перемещения атомов при таких колебаниях могут вести к изменению внутреннего поля молекулы, воздействующего на электроны, смещение которых под действием света и определяет поляризацию молекулы. Если эти изменения облегчают или затрудняют смещения электронов, то мы имеем дело, следовательно, с изменением поляризуемости α.

Молекулы, поляризуемость которых отличается от средней поляризуемости, распределены по всему объему вещества по законам случая, и кроме того, колебания различных молекул характеризуются различными фазами. Это обстоятельство может вести к флуктуации показателя преломления, т.е. к нарушению оптической однородности, обусловливая, следовательно, рассеяние света.

Так как указанные изменения в поляризуемости, обусловленные колебаниями атомов в молекуле, имеют периодический характер, то, следовательно, и интенсивность рассеиваемого света меняется периодически с частотой этих внутримолекулярных колебаний ν_i. Следовательно, рассеянный свет, частота которого должна быть равна частоте падающего света ν_0, является *модулированным* светом с частотой модуляции ν_i, что соответствует свету с измененной частотой $\nu_0 \pm \nu_i$ (см. Введение). Таким образом, этот вид рассеяния света должен сопровождаться изменением частоты падающего света: наряду со светом начальной частоты должны появляться линии измененной частоты (спутники). Частота рассеянного света комбинируется, таким образом, из частоты падающего света и частоты внутримолекулярного (обычно инфракрасного) колебания. Отсюда название — *комбинационное* рассеяние.

Такое классическое рассмотрение позволяет понять, что интенсивности комбинационных и инфракрасных линий данной частоты могут значительно отличаться друг от друга. Действительно, интенсивность комбинационной линии частоты ν определяется тем, насколько значительно *меняется поляризуемость* молекулы α при колебании молекулы, соответствующем этой частоте. Интенсивность же инфракрасной линии абсорбции той же частоты будет зависеть от того, насколько хорошо способно возбуждаться это колебание под действием инфракрасного света подходящей частоты, т.е. насколько хорошо реагирует молекула на электромагнитное поле приходящей волны. Такая ее реакция определяется *изменениями электрического момента* молеку-

лы при соответствующем колебании. Эти два изменения — изменение поляризуемости и изменение электрического момента — могут быть по-разному выражены при различных колебаниях. Поэтому одни из этих колебаний будут лучше представлены в инфракрасных спектрах, другие — в комбинационных.

Например, при колебании атомов в молекуле CO_2 (рис. 29.15 *б*) расположение атомов меняется так, что сильно изменяется ее поляризуемость, но электрический момент молекулы остается неизменным (и в данном случае равным нулю), ибо два одноименно заряженных атома кислорода (O) неизменно остаются во время колебания симметрично расположенными по обе стороны заряда, связанного с углеродом. При другом же колебании (рис. 29.15 *в*) поляризуемость сохраняется неизменной, так как приближение одного из атомов кислорода к углероду сопровождается удалением другого и наоборот; но при этих колебаниях электрический момент молекулы меняется, как легко видеть из рисунка, показывающего, что величина и направление результирующего момента периодически меняются во время колебания. Поэтому колебание первого типа (см. рис. 29.15 *б*) поведет к образованию линии комбинационного рассеяния, и его частоту можно определить из спектра комбинационного рассеяния; во втором же случае (см. рис. 29.15 *в*) частоту колебания можно найти по положению полосы инфракрасного поглощения.

Рис. 29.15. Различные типы колебаний атомов в молекуле CO_2: *а* — исходное положение атомов; *б* — колебание, меняющее поляризуемость; *в* — колебание, меняющее электрический момент

Легко видеть, что эта классическая теория совершенно неправильно передает вопрос об относительной интенсивности фиолетовых и красных спутников, ибо она заставляет предполагать их равными, что противоречит опыту. В вопросе об интенсивности и ее зависимости от температуры нужно ввести поправку, даваемую представлением о световых квантах.

Метод комбинационного рассеяния дает важный способ исследования молекулярного строения. С его помощью легко и быстро определяются собственные частоты колебаний молекулы; он позволяет также судить о характере симметрии молекулы, о величине внутримолекулярных сил и вообще об особенностях молекулярной динамики. Во многих случаях он удачно дополняется методом инфракрасного поглощения, представляя предмет важной главы молекулярной спектроскопии. Спектры комбинационного рассеяния настолько характерны для молекул, что с их помощью оказывается возможным проведение анализа сложных молекулярных смесей, особенно органических молекул, где химические методы анализа весьма затруднены или даже невозможны. Так, с помощью комбинационного рассеяния успешно проводятся анализы состава бензинов, представляющих сложную смесь углеводородов.

Выше речь шла о комбинационном рассеянии света, возникающем при взаимодействии первичного излучения с молекулами среды.

Вполне аналогичное явление наблюдается и при рассеянии света атомами и ионами. Для выяснения сущности дела следует вспомнить о результатах изучения абсорбции и дисперсии света в атомных газах.

Согласно изложенному в § 156 атом можно рассматривать как совокупность осцилляторов, для которых собственные частоты колебаний определяются разностью энергий двух каких-либо квантовых состояний атома. В этой связи различие между атомами и молекулами состоит лишь в природе осцилляторов: в случае молекул они описывают движение ядер, а в атомах — движение электронов. Имея в виду эту аналогию, можно повторить проведенное выше объяснение, но теперь уже по отношению к атомам, и в рамках классической модуляционной картины, и в упрощенной квантовой схеме.

Отметим, что неупругое рассеяние фотонов было предсказано теоретически (А. Смекаль, 1923 г.) для их взаимодействия именно с атомами. Однако экспериментально оно было обнаружено намного позднее комбинационного рассеяния молекулами. Комбинационное рассеяние ионами было обнаружено в 1963 г., а комбинационное рассеяние атомами — в 1967 г.

Помимо описанного выше спонтанного комбинационного рассеяния существует еще и вынужденное комбинационное рассеяние (см. § 239).

Глава XXX

ВРАЩЕНИЕ ПЛОСКОСТИ ПОЛЯРИЗАЦИИ

§ 163. Введение

Рассмотренные выше процессы дисперсии и рассеяния света не исчерпывают, конечно, явлений, возникающих при взаимодействии света и вещества. Среди них чрезвычайно важное место и в принципиальном, и в практическом отношении занимает явление вращения плоскости поляризации света. Было обнаружено, что явление это имеет место в весьма разнообразных телах, получивших название *естественно-активных*. К числу таких тел принадлежат, например, сахар и ряд других органических веществ; поэтому измерение вращения плоскости поляризации стало ходовым аналитическим методом в ряде промышленных областей. Исследования доказали, что объяснение этого явления можно получить, рассматривая общую задачу взаимодействия поля световой волны с молекулами или атомами вещества, если только принять во внимание конечные размеры молекул и их структуру.

Отношение линейных размеров d молекул (атомов) к длине световых волн имеет порядок 10^{-3}; для многих оптических проблем можно считать это отношение бесконечно малым, упрощая, таким образом, трактовку задачи и не затрагивая в то же время ее существенных черт. Таким приближением мы пользовались, например, в задаче о дисперсии, полагая, что поле, действующее на электрон в атоме, равно

просто $E_0 \sin \omega t$, хотя поле волны, распространяющейся в направлении оси Z, есть $E_0 \sin(\omega t - kz)$ и, значит, строго говоря, для каждого момента t поле в разных точках молекулы, соответствующих различным значениям z, различно. Но так как в пределах молекулы различие z не превышает размера молекулы d, то оказывается, что, делая указанное упрощение, мы не вносим существенных изменений в результаты. Наоборот, в проблеме вращения плоскости поляризации подобное упрощение означает отказ от учета как раз той стороны дела, которая существенно определяет все явление.

Этот пример лишний раз показывает, что всякое упрощение (схематизация) задачи имеет относительный характер и должно быть строго обдумано применительно к рассматриваемой проблеме: в одних вопросах можно ограничиться первым приближением и дальнейшие уточнения не вносят существенно нового; в других необходимо более точно учитывать действующие факторы, переходя ко второму приближению, ибо только с его помощью могут быть выяснены существенные особенности задачи. С этой точки зрения проблема вращения плоскости поляризации имеет большой принципиальный интерес, заставляя нас принимать во внимание размеры молекул при взаимодействии с видимым светом, длины волн которого в тысячи раз больше этих размеров. Интересно также отметить, что для полного решения проблемы надо учитывать не только электрический момент, приобретаемый молекулой, но также и создаваемый световой волной магнитный момент молекулы, что также является излишним во множестве других оптических задач.

Сказанное о роли размеров молекул можно выразить иным, несколько более формальным, но общим образом. Дипольный момент, индуцируемый в молекуле, определяется значением напряженности поля **E** не в одной точке, а в области с размерами, сопоставимыми с протяженностью молекулы. То же заключение относится, очевидно, и к связи между **E** и вектором индукции **D**. Таким образом, вследствие конечности размеров молекул связь между **E** и **D** оказывается нелокальной, т.е. значение **D** в какой-либо точке зависит от значений вектора **E** в некоторой ее окрестности.

В § 149 было выяснено, что нелокальность связи между **D** и **E** обусловливает целый ряд явлений, получивших название эффектов пространственной дисперсии. Вращение плоскости поляризации представляет собой простейший и наиболее сильный из этих эффектов, его величина определяется отношением $d/\lambda \approx 10^{-3}$. Остальные эффекты пространственной дисперсии слабее, так как зависят уже от $(d/\lambda)^2$.

§ 164. Вращение плоскости поляризации в кристаллах

Явление вращения плоскости поляризации было открыто Араго (1811 г.) при изучении двойного преломления в кварце, в котором оно выражено весьма заметно. Хотя в настоящее время известны вещества, вращающая способность которых в несколько раз больше, чем у кварца (например, киноварь), тем не менее кварц и до настоящего

времени остается классическим объектом для демонстрации явления и используется во многих приборах, предназначенных для исследования вращательной способности.

Кварц является одноосным кристаллом, так что при пропускании света вдоль оси он должен был бы вести себя как изотропное тело. Однако опыт показал следующую особенность. Пусть (рис. 30.1) параллельный пучок света от источника S, поляризованный при помощи поляризатора N_1 и сделанный приблизительно монохроматическим (светофильтр F), падает на пластинку кристаллического кварца Q, вырезанную перпендикулярно к оптической оси, так что свет распространяется *вдоль* оси кварца. Если второй поляризатор N_2, служащий анализатором, скрещен с первым ($N_2 \perp N_1$), то все же свет проходит через нашу систему. Однако, поворачивая поляризатор N_2 на некоторый угол, можно вновь добиться полного затемнения поля. Это показывает, что в описанном опыте поляризованный свет, прошедший через кварц, не приобрел эллиптической поляризации, а остался линейно-поляризованным; при прохождении через кварц плоскость поляризации лишь *повернулась* на некоторый угол, измеряемый поворотом анализатора N_2, необходимым для затемнения поля в присутствии кварца. Меняя светофильтр, легко обнаружить, что угол поворота плоскости поляризации для разных длин волн различен, т.е. имеет место *вращательная* дисперсия.

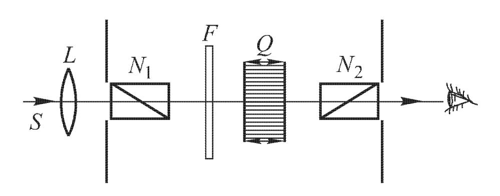


Рис. 30.1. Схема наблюдения вращения плоскости поляризации в кристалле: N_1, N_2 — поляризационные призмы; F — светофильтр; Q — пластинка, вырезанная перпендикулярно к оптической оси

Грубые измерения, сделанные с фильтрами, показывают, что кварцевая пластинка толщиной 1 мм вращает плоскость поляризации на следующие углы:

для	красного	света	15°,
»	желтого	»	21°,
»	зеленого	»	27°,
»	синего	»	33°,
»	фиолетового	»	51°.

Для данной длины волны угол поворота плоскости поляризации пропорционален толщине пластинки. Вращательную способность твердых веществ характеризуют величиной угла α, на который поворачивает плоскость поляризации пластинка толщиной 1 мм. Таким образом,

$$\varphi = \alpha d, \tag{164.1}$$

где φ — угол поворота, d — толщина пластинки в миллиметрах, α — коэффициент, зависящий от длины волны, природы вещества и температуры. Точные измерения дают для кварца для желтой линии (свет паров Na, $\lambda = 5893$ Å) $\alpha = 21°{,}7$. Само собой разумеется, что

расположение, показанное на рис. 30.1, симметрично относительно оси кристалла и вся картина остается неизменной, если поворачивать кристалл вокруг его оси. Опыт показывает, что направление вращения (знак) меняется при изменении направления распространения света. Поэтому, если поляризованный свет, прошедший через кристалл, отражается от зеркала и вторично проходит через тот же кристалл, то направление плоскости поляризации восстанавливается.

В соответствии с этим принято направление вращения устанавливать для наблюдателя, смотрящего *навстречу* световому пучку.

Наблюдения вращения в кварце обнаружили, что существуют два сорта кварца: *правовращающий*, или положительный, дающий поворот плоскости поляризации вправо (по часовой стрелке), и *левовращающий*, или отрицательный (поворот против часовой стрелки). Величина вращения в обоих случаях одинакова ($\alpha_+ = \alpha_-$). То же относится и к другим кристаллам: все они, по-видимому, существуют в двух разновидностях, для которых $\alpha_+ = \alpha_-$, хотя не во всех случаях известны обе модификации.

Конечно, явление вращения плоскости поляризации имеет место и тогда, когда свет направлен не вдоль оси кристалла, а под углом к ней. Но изучение его в этих условиях значительно труднее, ибо явление частично маскируется обычным двойным лучепреломлением. Еще труднее наблюдать явление в двуосных кристаллах, так как вращение может быть различным вдоль каждой из осей. Наконец, известны также некоторые кристаллы кубической системы, не обнаруживающие обычно двойного лучепреломления, но обладающие свойством вращать плоскость поляризации (хлорноватистокислый натрий $NaClO_3$ и бромноватистокислый натрий $NaBrO_3$); в этом случае величина вращения не зависит от ориентации кристалла.

§ 165. Уточнение методов определения вращательной способности

В опытах, описанных в § 164, угол поворота плоскости поляризации определялся в результате двух ориентаций N_2 на темноту: в отсутствие и в присутствии активного вещества. Такая установка довольно груба и нередко заменяется более точными. Широкое применение находят полутеневые устройства, обеспечивающие значительно бо́льшую точность измерения. Такой прибор состоит из поляризатора и полутеневого анализатора, направления колебаний в двух половинах которого составляют между собой малый угол 2φ. Простейший полутеневой анализатор можно получить, если обычную поляризационную призму разрезать вдоль по главному сечению, сошлифовать у каждой из половин по клинообразному слою с углом около $2°30'$ и вновь склеить (рис. 30.2). Поперечное сечение такой призмы вместо первоначального правильного ромба будет иметь вид искаженного ромба.

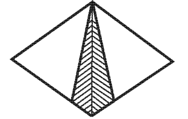
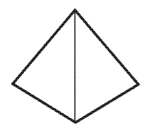



Рис. 30.2. Устройство простейшего полутеневого анализатора

Если плоскость колебаний PP света, выходящего из поляризатора, перпендикулярна биссектрисе угла между главными направлениями анализатора A_1 и A_2, то обе половинки анализатора освещены одинаково: $I_1 = I_2 = I_0 \sin^2 \varphi$, где I_0 — интенсивность света, выходящего из поляризатора, а I_1 и I_2 — интенсивности света, пропускаемого соответственно половинками анализатора (рис. 30.3). Если плоскость PP повернется на малый угол α в положение $P'P'$, то $I_1 = I_0 \sin^2(\varphi + \alpha)$ и $I_2 = I_0 \sin^2 (\varphi - \alpha)$. При малом значении угла φ даже небольшой поворот α приводит к явственному нарушению равенства освещенности обоих полей (рис. 30.4).

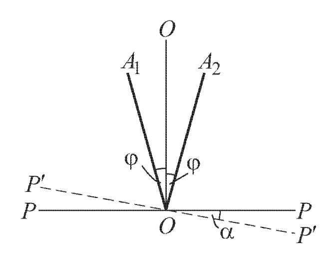


Рис. 30.3. Принцип действия полутеневого анализатора

Если после установки прибора на равенство освещенностей двух половин анализатора поместить между поляризатором и анализатором исследуемое вещество, то обе половины поля зрения не будут освещены одинаково. Для восстановления равенства освещенностей анализатор надо повернуть на угол α, который и будет равен углу поворота плоскости поляризации в исследуемом веществе.

Измерения вращательной дисперсии должны производиться для монохроматического света (например линии ртутной лампы). В более грубых измерениях довольствуются цветными фильтрами. Было предложено остроумное приспособление, позволяющее работать с белым светом без специального светофильтра (*бикварц*, см. упражнение 214). При работе с бикварцем установка производится на совпадение *оттенков* обеих половин поля. Опыт показал, однако, что установление идентичности цветов выполняется менее надежно, чем установка на равенство освещенностей. Поэтому в практических установках в настоящее время бикварц не употребляется, и применяют исключительно полутеневые анализаторы. В хороших современных приборах удается измерить поворот плоскости поляризации на 0°,01.

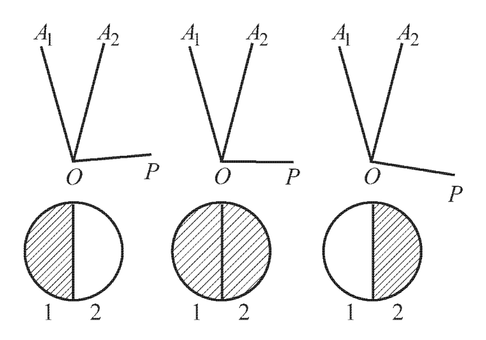


Рис. 30.4. Поле зрения полутеневого анализатора при разных положениях плоскости поляризации

§ 166. Вращение плоскости поляризации в аморфных веществах

Применение чувствительных методов исследования показало, что явление вращения плоскости поляризации весьма распространено и

обнаруживается в большей или меньшей степени также весьма многими некристаллическими телами. К числу их принадлежат и чистые жидкости, например, скипидар, и растворы многих веществ в неактивных растворителях (например, водные растворы сахара). В настоящее время известны тысячи активных веществ, обладающих весьма различной вращательной способностью, от едва заметной до очень большой (например, никотин в слое толщиной 10 см поворачивает плоскость поляризации желтого излучения на 164°). Чрезвычайно важным фактом, установленным впервые Пастером (1848 г.) на примере солей виннокаменной кислоты, является существование активных веществ в двух модификациях, правых и левых. В настоящее время известны обе модификации для большинства активных тел, и есть все основания полагать, что *все* активные вещества могут существовать в двух таких видах, причем числовые значения вращательной способности для обеих модификаций всегда равны между собой и отличаются только знаком.

Для растворов Био (1831 г.) установил на опыте следующие количественные законы: угол поворота плоскости поляризации φ прямо пропорционален толщине d слоя раствора и концентрации c активного вещества:

$$\varphi = [\alpha]\, d\, c. \tag{166.1}$$

Коэффициент пропорциональности $[\alpha]$ [1]), аналогично коэффициенту α для кристаллов, характеризует природу вещества и носит название *постоянной вращения*. Постоянная вращения зависит от длины волны и температуры, она может также меняться при изменении растворителя, и притом довольно сложным образом.

Зависимость постоянной вращения от температуры, вообще говоря, незначительна. Для большинства веществ она уменьшается примерно на одну тысячную своей величины при повышении температуры на один градус. Наблюдается изредка и обратный температурный ход.

Точно так же влияние длины волны на вращательную способность (вращательная дисперсия) может быть охарактеризовано лишь в общих чертах и для каждого случая должно быть изучено. Био установил, что вращательная способность примерно обратно пропорциональна квадрату длины волны, т.е.

$$[\alpha] \propto \frac{1}{\lambda^2}\,.$$

Это правило передает зависимость не точно и может служить лишь в качестве грубо ориентировочного. Вообще говоря, $[\alpha]$ с увеличением λ убывает, но существуют вещества, для которых вращательная дисперсия аномальна. И экспериментальные исследования, и теоретические изыскания (Друде) показывают, что области аномалии соответствуют областям собственных колебаний (полосы поглощения) и устанавливают, таким образом, связь этого явления с явлением дисперсии показателя преломления.

[1]) В отличие от постоянной вращения α для кристаллов, этот коэффициент для растворов обозначают через $[\alpha]$.

Формула Друде, подтверждаемая опытом, имеет вид

$$[\alpha] = \frac{A}{\lambda^2 - \lambda_i^2} \quad \text{или} \quad [\alpha] = \sum \frac{A_i}{\lambda^2 - \lambda_i^2}, \tag{166.2}$$

где λ_i — длины волн полос поглощения вещества, $i = 1, 2, 3, \ldots$

Законы Био показывают, что для растворенных тел вращение есть молекулярное свойство, так что величина вращения возрастает пропорционально числу молекул на пути луча света (пропорционально длине слоя и концентрации); в соответствии с этим наблюдается вращение и в аморфных телах, состоящих из тех же молекул (сахарные леденцы, например), и в парах соответствующих жидкостей (например, в парах скипидара или камфары). Опыт показывает, что постоянная вращения не зависит от агрегатного состояния. Так, для жидкой камфары (при 204 °C) найдено $[\alpha] = 70°{,}33$, а для парообразной (при 220 °C) $[\alpha] = 70°{,}31$.

Влияние растворителя на удельную вращательную способность вещества следует рассматривать как вторичное влияние, несколько изменяющее свойства молекул. Вместе с тем, мы знаем, что вращательная способность характеризует и многие кристаллы, причем оказывается, что в некоторых случаях вращательная способность связана именно с кристаллической структурой и не является свойством самих молекул. Так, плавленный (аморфный) кварц не вращает плоскость поляризации, тогда как кристаллический кварц принадлежит к числу наиболее активных веществ.

В настоящее время установлено, что все вещества, активные в аморфном состоянии (расплавленные или растворенные), активны и в виде кристаллов, хотя постоянная вращения для кристаллических форм может сильно отличаться от ее величины для аморфных; наоборот, существует ряд веществ, неактивных в аморфном виде и вращающих в кристаллическом состоянии. Таким образом, оптическая активность может определяться как строением молекулы, так и расположением молекул в кристаллической решетке. Действительно, исследование соответствующих кристаллов (кварц, хлорноватистокислый натрий) при помощи рентгеновских лучей показывает особенности структуры, позволяющие истолковать их оптическую активность.

§ 167. Сахариметрия

Определив значение $[\alpha]$ для данного растворителя, длины волны и температуры, можно использовать соотношение (166.1) для определения концентрации растворенного активного вещества. Принято выражать $[\alpha]$ в градусах, d — в дециметрах и c — в г/см^3; тогда постоянную $[\alpha]$ называют *удельным вращением*. Так, для водных растворов тростникового сахара при $t = 20$ °C для желтых лучей (линия паров натрия, $\lambda = 589{,}3$ нм) $[\alpha] = 66°{,}46$.

Быстрота и надежность этого метода определения концентрации активных веществ сделали его основным методом количественных определений, практикуемых при производстве таких веществ, как камфара, кокаин, никотин и, особенно, сахаристые вещества

(в частности, в сахарной промышленности). Измерения, выполняемые по определенным международным инструкциям, являются общепризнанными официальными контрольными приемами. В соответствии с этим приборы, предназначенные для таких измерений и получившие название *поляриметров* или *сахариметров*, доведены до высокой степени совершенства.

§ 168. Теория вращения плоскости поляризации

а. Общие основы. Френель (1817 г.) показал, что явление вращения плоскости поляризации сводится к особому типу двойного лучепреломления. В основе рассуждений Френеля лежит гипотеза, согласно которой скорость распространения света в активных веществах различна для лучей, поляризованных по правому и левому кругу. При этом для правых веществ большее значение имеет скорость правокруговой волны, а для левых веществ — наоборот. Применяя индексы d (droit — правый) и g (gauche — левый), запишем допущения Френеля в форме:

Правые вещества (D)	Левые вещества (G)
$v_d > v_g\,,\;\; n_d < n_g$	$v_d < v_g\,,\;\; n_d > n_g\,,$

где v — скорости циркулярно-поляризованного света, а n — соответствующие показатели преломления.

Френель проверил свои предположения при помощи опыта, специально придуманного для исследования различия в скорости распространения правого и левого циркулярно поляризованного света. Им была изготовлена сложная призма (рис. 30.5), состоящая из трех призм: двух — из правовращающего кварца (D) и одной — из левовращающего G (оси направлены вдоль стрелок на чертеже). Если, действительно, для правовращающего кварца $n_g > n_d$, а для левовращающего $n_g < n_d$, то линейно-поляризованный пучок света, проходя через такую призму, раздвоится, как показано на чертеже (ср. действие призмы, изображенной на рис. 17.8 *в*). В результате из призмы выйдут два световых пучка: один — поляризованный по правому, другой — по левому кругу (на рис. 30.5 угол расхождения показан для ясности чрезмерно большим). Опыт полностью подтвердил предположение Френеля.

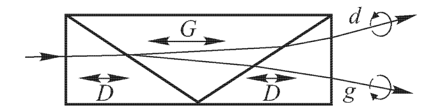


Рис. 30.5. Призма Френеля для иллюстрации общей теории вращения плоскости поляризации

Нетрудно показать, что доказанное Френелем двойное преломление активных веществ для циркулярно-поляризованного света объясняет явление вращения плоскости поляризации. Действительно, плоскополяризованный свет можно представить себе как совокупность двух циркулярно-поляризованных волн, правой и левой, с одинаковыми периодами и амплитудами. Пусть в месте входа в слой вращающего вещества совокупность право- и левополяризованного

света эквивалентна плоскополяризованному свету с колебаниями по AA (рис. 30.6 *а*), т.е. вращающиеся электрические векторы правой и левой волн симметричны по отношению к плоскости AA. Рассмотрим, какова будет взаимная ориентация этих векторов в любой точке среды (см. рис. 30.6 *б*). Предположим для определенности, что $v_d > v_g$. Так как левая волна распространяется с меньшей скоростью, то до какой-либо точки внутри среды она дойдет с некоторым отставанием по фазе по сравнению с правой. В рассматриваемой точке электрический вектор правой волны будет повернут вправо на *больший* угол, чем окажется повернутым влево вектор левой волны; следовательно, плоскостью, относительно которой симметрично расположены оба вектора, будет плоскость BB, повернутая *вправо* по отношению к AA. Итак, результирующее плоское колебание будет направлено по BB, т.е. плоскость поляризации света повернулась *вправо* на угол ψ, так что

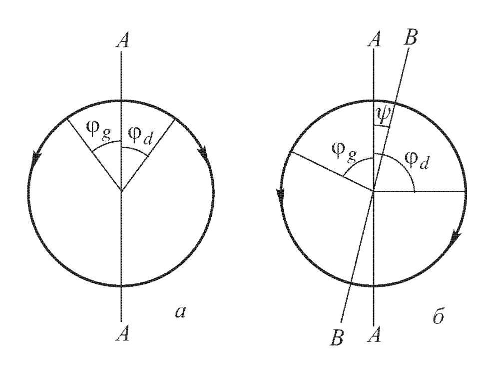


Рис. 30.6. К общей теории вращения плоскости поляризации

$$\varphi_d - \psi = \varphi_g + \psi \quad \text{или} \quad \psi = \frac{\varphi_d - \varphi_g}{2}.$$

Для аналитического решения той же задачи запишем выражение угла поворота светового вектора в функции времени t и глубины проникновения z для правого и левого лучей:

$$\varphi_d = \omega\left(t - \frac{z}{v_d}\right), \quad \varphi_g = \omega\left(t - \frac{z}{v_g}\right),$$

где $v_d = \dfrac{c}{n_d}$ и $v_g = \dfrac{c}{n_g}$ — соответственно фазовые скорости распространения правого и левого циркулярно-поляризованных лучей, а n_d и n_g — соответственные показатели преломления. Из этих выражений видно, что угол поворота плоскости поляризации ψ (см. рис. 30.6 *б*) на глубине $z = l$ равен

$$\psi = \frac{\varphi_d - \varphi_g}{2} = \frac{\omega l}{2c}(n_g - n_d) = \frac{\pi l}{\lambda_0}(n_g - n_d), \tag{168.1}$$

так как

$$\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{Tc} = \frac{2\pi}{\lambda_0},$$

где λ_0 — длина волны в вакууме. Формула (168.1) показывает, что в веществах, для которых $n_g > n_d$, плоскость поляризации поворачивается вправо ($\varphi_d > \varphi_g$), а в веществах, для которых $n_g < n_d$, — влево ($\varphi_d < \varphi_g$) в соответствии с данными Френеля.

б. Понятие о молекулярной теории вращения плоскости поляризации. Рассуждения Френеля позволили свести своеобразную задачу о вращении плоскости поляризации к более общей проблеме о зависимости показателя преломления от характера поляризации света. Таким образом, задача молекулярной теории вращения сводилась к выяснению причин различия в скоростях распространения правого и левого лучей в активных телах. То обстоятельство, что активные тела существуют в виде двух модификаций, правой и левой, привело Пастера к мысли, что в рамках молекулярных представлений активные тела должны быть дисимметричны: две разновидности активного вещества построены так, что одна является зеркальным изображением второй и, следовательно, никаким перемещением не может быть с ней совмещена. Для активных кристаллов это можно обнаружить непосредственным изучением их формы (см., например, изображенные на рис. 30.7 кристаллы правого и левого кварца[1])). Такие зеркально-симметричные кристаллические формы носят название *энантиоморфных*.

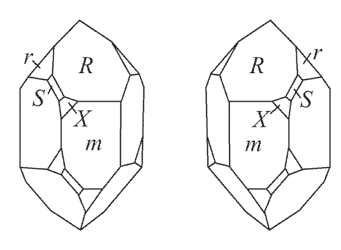


Рис. 30.7. Кристаллы правого и левого кварца

Для активных жидкостей наличие активности двух знаков должно обусловливаться дисимметричным строением молекулы. Представление об асимметричных молекулах нашло себе широкое применение в органической химии и было положено в основу стереохимии, т.е. учения о пространственном распределении атомов в молекулах. Асимметрия органических молекул связывается со свойством атома углерода вступать в соединения с четырьмя атомами или атомными группами (радикалами), причем в получившейся молекуле эти группы расположены в вершинах четырехгранной пирамиды, в центре которой расположен атом углерода. Для простейших молекул, например метана CH_4 (рис. 30.8 *а*) или четыреххлористого углерода CCl_4, эта пирамида должна быть правильной (тетраэдр). Но если четыре вершины заняты *разными* радикалами X, Y, Z, T, то молекула имеет дисимметричный характер и возможны две разновидности, представляющие собой зеркальные изображения друг друга (рис. 30.8 *б* и *в*).

Молекулы сахара и целого ряда других органических соединений содержат не один, а несколько асимметричных атомов углерода; различные группировки вокруг тех или иных асимметричных атомов могут приводить к разновидностям молекул, имеющих один и тот же молекулярный состав, но различное строение. Так, для сахара можно предусмотреть 16 различных форм, образующих восемь пар (правых и левых) оптических изомеров, действительно обнаруженных на опы-

[1]) Известны, однако, немногочисленные исключения из этого «правила Пастера», когда активные кристаллы характеризуются не дисимметрией внешней формы, а лишь дисимметрией составляющих их молекул.

те. Как уже упоминалось, большая часть оптически активных молекул содержит асимметричный атом углерода.

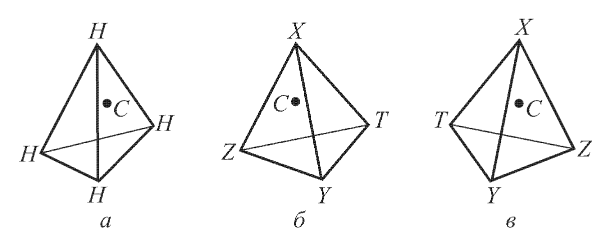


Рис. 30.8. Симметричные и дисимметричные молекулы типа С ($XYZT$): *а* — симметричная молекула метана; *б* и *в* — зеркальные модификации молекулы С ($XYZT$)

В настоящее время известны также активные соединения, содержащие в своих молекулах другие асимметричные атомы (кремний, фосфор, бор и т.д.).

Первоначальные попытки молекулярного толкования оптической активности имели, по существу, формальный характер и сводились к предположению, что связи, существующие в асимметричной молекуле, обусловливают винтообразные траектории электронов, смещаемых под действием световой волны. Борн (1915 г.) показал, что, исходя из более общей модели молекулы, пригодной для истолкования явлений молекулярной анизотропии вообще, можно объяснить и вращение плоскости поляризации асимметричными молекулами, т.е. молекулами, не имеющими ни центра симметрии, ни плоскости симметрии. При этом оказалось, как мы уже упоминали в начале главы, что при решении задачи о взаимодействии световой волны и молекулы в данном случае нельзя пренебрегать эффектами, зависящими от отношения d/λ, где d — размер молекулы, а λ — длина волны. В.Р. Бурсиан и А.В. Тиморева существенно дополнили теорию, показав, что необходимо принять во внимание не только электрический, но и магнитный момент, возбуждаемый в асимметричной молекуле полем световой волны.

Из соотношения Френеля (168.1) можно усмотреть, почему задача о вращении плоскости поляризации требует более детального учета условий взаимодействия волны и молекулы. Явление вращения плоскости поляризации представляет гораздо более тонкий метод исследования, чем другие явления, зависящие от различий в показателях преломления. В самом деле, лишь самые тонкие интерференционные методы позволяют обнаружить различие в показателе преломления порядка одной миллионной доли (10^{-6}). Между тем различие в одну миллионную между n_g и n_d приводит к очень легко наблюдаемому вращению. Действительно, при слое толщиной $l = 25$ см и $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см найдем на основании (168.1) $\psi = 90°$. Как уже упоминалось в § 165, современные способы исследования позволяют установить поворот плоскости поляризации даже в $0°,01$, т.е. обнаружить

различие между n_g и n_d, приблизительно в 10 000 раз меньшее (различие в десятом десятичном знаке).

§ 169. Магнитное вращение плоскости поляризации

В 1846 г. Фарадею удалось обнаружить вращение плоскости поляризации в так называемых оптически неактивных телах, возникающее под действием магнитного поля. Значение его открытия в истории физики исключительно велико. Это было первое явление, в котором обнаружилась связь между оптическими и электромагнитными процессами. Фарадей сам охарактеризовал значение своего открытия, написав: «Мне удалось намагнитить и наэлектризовать луч света и осветить магнитную силовую линию». Выражение это, впрочем, не должно давать повода к недоразумениям: наблюдаемое явление не есть результат непосредственного взаимодействия магнитного поля и поля световой волны; магнитное поле изменяет лишь свойства помещенного в него вещества, сообщая ему способность вращать плоскость поляризации.

Явление Фарадея можно осуществить следующим образом (рис. 30.9). Между полюсами электромагнита помещается исследуемое тело K, например кусок стекла. Линейно-поляризованный свет пропускается сквозь это тело так, чтобы направление света совпало

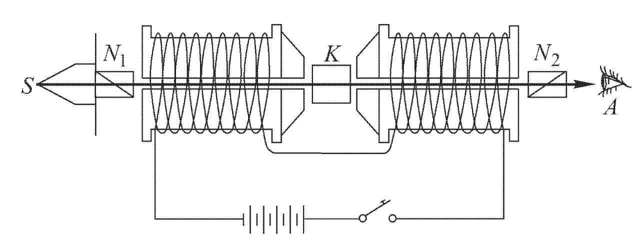


Рис. 30.9. Схема наблюдения магнитного вращения плоскости поляризации

с направлением магнитного поля, для чего необходимо просверлить сердечник электромагнита. Установив поляризационную систему на темноту в отсутствие поля, можно обнаружить при включении поля поворот плоскости поляризации, наблюдаемый и измеряемый обычными методами.

Количественные законы явления были установлены еще Фарадеем и наиболее полно исследованы на ряде объектов Верде: угол поворота φ плоскости поляризации пропорционален длине пути света в веществе l и напряженности магнитного поля H,

$$\varphi = \rho l H, \tag{169.1}$$

где ρ — постоянная, характерная для вещества и носящая название *постоянной Верде.*

Значения ρ невелики. Сравнительно большие значения ρ имеет CS_2 (сероуглерод) и некоторые сорта стекла; для CS_2 (в желтой

D-линии натрия) $\rho = 0',042$, для тяжелого флинта $\rho = 0',06–0',09$, если l выражено в сантиметрах, а H в эрстедах. Для большинства тел ρ еще меньше (от $0',01$ до $0',02$). Еще меньшее вращение обнаруживают газы.

Нет оснований сомневаться, что магнитное вращение обнаруживают все тела, хотя обычно в очень слабой степени. Чрезвычайно сильное вращение наблюдалось в очень тонких прозрачных слоях ферромагнитных металлов (Fe, Ni, Co). В слоях толщиной 0,1 мкм и в поле 10 000 Э вращение в железе составляет 2°. Из этих данных постоянная Верде для железа равнялась бы 20°, если бы можно было применять закон Верде. В действительности же, однако, вращение в ферромагнитных материалах растет пропорционально намагничению, а не напряженности поля.

Знак вращения условно считают для наблюдателя, смотрящего *вдоль* магнитного поля. Для громадного большинства веществ вращение происходит *вправо*, т.е. в ту же сторону, в какую навиты витки электромагнита. Такие вещества называются *положительными*. Встречаются, однако, и вещества, вращающие в противоположную сторону (*отрицательные*). Все отрицательные вещества содержат парамагнитные атомы. Однако многие парамагнитные тела и, сверх того, все диамагнитные характеризуются положительным вращением.

Направление вращения для каждого тела связано с направлением магнитного поля и *не зависит от направления распространения света* в отличие от естественного вращения, имеющего разные направления в зависимости от того, смотрим ли мы вдоль или навстречу пучку света. При естественном вращении основная причина, обусловливающая явление, состоит в действии поля световой волны; поэтому симметрия картины зависит от расположения ее векторов **E** и **H**, т.е. от направления света. В случае магнитного вращения плоскости поляризации основная причина лежит в действии магнитного поля, так что направление вращения задается направлением внешнего поля и не зависит от направления света.

Независимость направления вращения от направления света дала Фарадею возможность применить остроумный прием для усиления эффекта. При данном расстоянии между полюсами магнита увеличение длины пути d света в веществе достигается многократным отражением (рис. 30.10), для чего внутренние поверхности образца серебрятся (за исключением мест входа и выхода света).

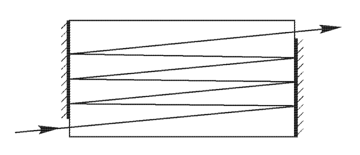


Рис. 30.10. Удлинение пути света в веществе, вращающем плоскость поляризации в магнитном поле

Магнитное вращение, так же, как и естественное, зависит от длины волны и несколько изменяется с температурой. Зависимость постоянной Верде от длины волны (дисперсия) можно приближенно определить законом, аналогичным закону Био:

$$\rho = \frac{A}{\lambda^2} + \frac{B}{\lambda^4}. \qquad (169.2)$$

Явление Фарадея стоит в непосредственной связи с эффектом Зеемана. Поэтому мы откладываем его теоретическое истолкование до следующей главы.

Глава XXXI

ЯВЛЕНИЕ ЗЕЕМАНА

§ 170. Сущность явления Зеемана

Установив в опытах над магнитным вращением плоскости поляризации света связь между магнитными и оптическими явлениями, Фарадей предпринял также попытку воздействовать магнитным полем на спектральные линии. Один из последних его опытов (1862 г.) состоял в наблюдении спектра паров натрия, помещенных между полюсами электромагнита, при включении и выключении поля. Отсутствие какого бы то ни было эффекта объясняется, как мы уже знаем, недостаточностью технических средств, которыми располагал Фарадей (малая разрешающая способность спектрального аппарата при слабых магнитных полях, применявшихся им).

Лишь позже, ровно через полстолетия после первого магнитооптического открытия Фарадея, Зееману (1896 г.) удалось обнаружить слабое изменение частоты спектральных линий под действием внешнего магнитного поля. В принципе расположение Зеемана соответствовало последней установке Фарадея. В дальнейших опытах, однако, было осуществлено важное дополнение: Зееман, кроме наблюдения за изменением частоты спектральных линий, обратил также

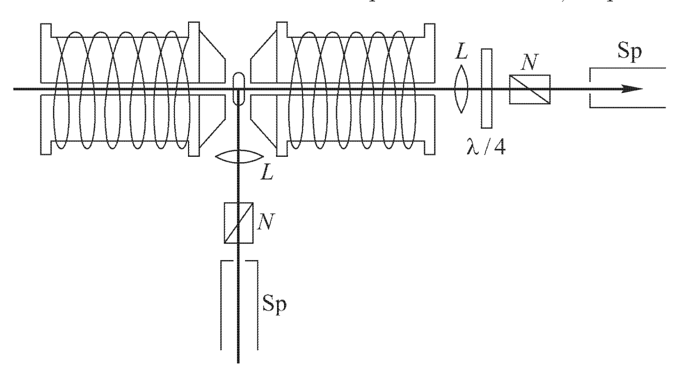


Рис. 31.1. Схема наблюдения явления Зеемана

внимание на характер поляризации этих линий в соответствии с указаниями Лорентца, развивавшего одновременно электронную теорию оптических явлений.

Схема расположения опытов Зеемана и основные результаты для простейшего случая, который удалось осуществить для очень узкой зелено-голубой линии кадмия, сводятся к следующему. Между

полюсами сильного электромагнита (рис. 31.1), способного обеспечить однородное поле в 10 000–15 000 Э, располагается источник линейчатого спектра, например гейслерова трубка или вакуумная дуга. Сердечник электромагнита просверлен, чтобы обеспечить наблюдения не только поперек магнитного поля (*поперечный эффект*), но и вдоль него (*продольный эффект*). Свет посылается в спектральный аппарат Sp большой разрешающей силы (около 100 000), например дифракционную решетку или интерференционный спектроскоп. На пути луча помещаются приспособления, позволяющие анализировать характер поляризации излучаемого света (линза L, анализатор N и пластинка в 1/4 волны). Поляризатором света служит само магнитное поле. Для наблюдения более сложных типов спектральных линий приходится прибегать к более сильным магнитным полям (около 40 000 Э) и более мощным спектральным аппаратам (разрешающая сила около 300 000–400 000). Магнит должен обеспечивать хорошее постоянство магнитного поля во времени и температура должна поддерживаться достаточно постоянной с тем, чтобы можно было использовать спектральный аппарат большой разрешающей силы.

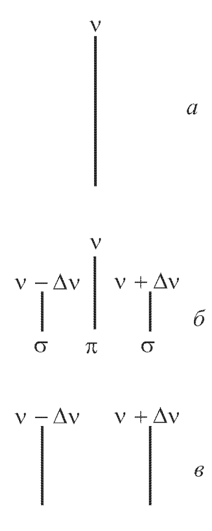


Рис. 31.2. Схематическое изображение простого (нормального) эффекта Зеемана: *а* — в отсутствие поля линия не поляризована; *б* — при наличии поля, поперечный эффект; *в* — при наличии поля, продольный эффект

Результаты, получаемые для простых спектральных линий, например некоторых линий H, Zn, Cd, сводятся к следующему. Линия, имеющая в отсутствие магнитного поля частоту ν, в магнитном поле представляется при продольном наблюдении в виде дублета с частотами $\nu - \Delta\nu$ и $\nu + \Delta\nu$, причем первая линия поляризована по левому кругу, вторая — по правому; при поперечном наблюдении получается триплет с частотами $\nu + \Delta\nu$, ν и $\nu - \Delta\nu$, причем крайние линии поляризованы так, что колебания в них перпендикулярны направлению магнитного поля (σ-компоненты), а поляризация средней линии соответствует колебаниям вдоль магнитного поля (π-компонента). Величина смещения $\Delta\nu$ пропорциональна напряженности магнитного поля. Наконец, по интенсивности π-компонента в два раза сильнее, чем каждая из σ-компонент, равных между собой; циркулярно-поляризованные компоненты при продольном эффекте по интенсивности совпадают с π-компонентой при поперечном. Указанное распределение интенсивностей показывает, что при переходе к полю нулевой напряженности расщепление исчезает, а излучение атома по любому направлению одинаково по интенсивности, как и должно быть.

Схематическое изображение спектральной картины приведено на рис. 31.2, причем высота линий показывает в линейном масштабе интенсивность спектральных линий.

§ 171. Элементарная теория явления Зеемана

Основы теории явления Зеемана разработал Лорентц, бывший в курсе исследований Зеемана и влиявший на их направление.

Теория дисперсии в том виде, в каком она следовала из электронных представлений Лорентца, позволяла предполагать, что оптические процессы в атоме обусловлены движением электронов. Излучение монохроматического света следует при этом рассматривать как результат движения электрона по простому гармоническому закону, т.е. под действием квазиупругой силы, а изменение излучения под влиянием магнитного поля — как следствие изменения движения электрона добавочной силой, с которой магнитное поле воздействует на движущийся заряд. Эта добавочная сила (лорентцова сила) выражается в виде

$$F = evH \sin(v, H) \tag{171.1}$$

(e — величина заряда, v — его скорость, H — напряженность магнитного поля) и направлена вдоль линии, перпендикулярной к плоскости (v, H), в ту или иную сторону в зависимости от знака e и соотношения направлений v и H (все величины даны в системе СГСМ).

Для простоты и наглядности расчета разложим колебательное движение электрона в отсутствие поля на следующие компоненты, на которые, как легко видеть, можно разложить гармоническое колебание любого направления. Одной из этих компонент пусть будет гармоническое колебание вдоль направления поля, а двумя другими — круговые равномерные движения, правое и левое, в плоскости, перпендикулярной к этому направлению. Действие магнитного поля на первую компоненту равно 0, ибо $\sin(v, H) = 0$. Действие же поля на круговые компоненты сведется к добавочной силе $\pm\, evH$, направленной вдоль радиуса (круговой траектории) к центру или в противоположную сторону, в зависимости от знака заряда и соотношения направления магнитного поля и скорости движения (рис. 31.3, отрицательный заряд). Таким образом, колебательное движение *вдоль* поля остается неизменным и продолжает происходить с первоначальной частотой ν. Движение же по кругам под действием поля приобретает бо́льшую $(\nu+\Delta\nu)$ или меньшую $(\nu-\Delta\nu)$ частоту в зависимости от того, увеличивает ли поле центростремительную силу, действующую на заряд (рис. 31.3 *а*), или уменьшает ее (рис. 31.3 *б*).

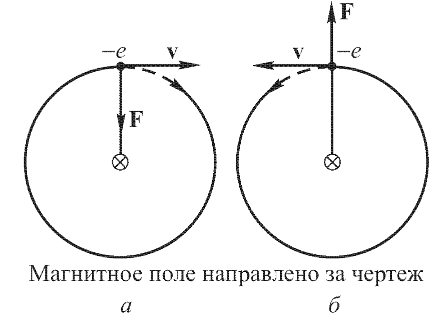


Рис. 31.3. К элементарной теории эффекта Зеемана

В соответствии с этим и излучение заряда, выполняющего такое усложненное движение, становится более сложным: его можно представить как совокупность трех монохроматических излучений различ-

ной частоты ($\nu-\Delta\nu$, ν, $\nu+\Delta\nu$), которые можно разделить при помощи соответствующего спектрального аппарата.

В направлении, перпендикулярном к магнитному полю, спектральный аппарат обнаружит первоначальную частоту ν, соответствующую колебанию заряда параллельно магнитному полю, т.е. излучение, представляющее собой π-компоненту; два других излучения с частотами $\nu + \Delta\nu$, $\nu - \Delta\nu$ соответствуют колебанию зарядов перпендикулярно к магнитному полю (σ-компоненты). Таково объяснение наблюденного Зееманом нормального триплета в поперечном эффекте.

В направлении *вдоль* магнитного поля компонента с ν излучаться не будет вследствие поперечности световых волн, две другие компоненты с $\nu + \Delta\nu$ и $\nu - \Delta\nu$ представятся в виде циркулярно-поляризованного света правого и левого вращения. При этом в случае отрицательного знака заряда e левая поляризация обнаруживается у линии уменьшенной частоты (*красная* компонента) (см. рис. 31.3 *б*), а правая — у линии увеличенной частоты (*фиолетовая* компонента) (см. рис. 31.3 *а*). В случае положительного заряда e направление круговой поляризации у красной и фиолетовой компонент должно быть обратным. Мы видели в § 170, что опыт дает соотношение, соответствующее *отрицательному* знаку заряда.

Для определения величины заряда найдем закон изменения частоты круговых компонент движения. В отсутствие магнитного поля центростремительная сила, обеспечивающая круговое движение заряда, задается квазиупругим притяжением br, так что угловая частота вращения ($\omega = 2\pi/T$) определяется из условия

$$br = m\omega^2 r, \tag{171.2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{b}{m}} = \omega_0. \tag{171.3}$$

Действие поля сводится к добавочной силе, действующей вдоль радиуса, т.е. к изменению центростремительной силы и, следовательно, частоты обращения:

$$\begin{aligned} &\text{для левого круга} \quad br - ev_g H = m\omega_g^2 r, \\ &\text{для правого круга} \quad br + ev_d H = m\omega_d^2 r. \end{aligned} \tag{171.4}$$

Так как $v_g = \omega_g r$ и $v_d = \omega_d r$, то уравнения примут вид

$$\begin{aligned} m\omega_g^2 + e\omega_g H - b = 0, \\ m\omega_d^2 - e\omega_d H - b = 0, \end{aligned} \tag{171.5}$$

откуда

$$\begin{aligned} \omega_g &= -\frac{1}{2}\,\frac{e}{m}\,H \pm \sqrt{\frac{b}{m} + \frac{1}{4}\,\frac{e^2H^2}{m^2}}, \\ \omega_d &= \frac{1}{2}\,\frac{e}{m}\,H \pm \sqrt{\frac{b}{m} + \frac{1}{4}\,\frac{e^2H^2}{m^2}}. \end{aligned} \tag{171.6}$$

Так как $b/m = \omega_0^2$, где ω_0 — частота в отсутствие магнитного поля, то

$$\sqrt{\frac{b}{m} + \frac{1}{4}\,\frac{e^2H^2}{m^2}} = \omega_0\sqrt{1 + \frac{1}{4}\,\frac{e^2H^2}{m^2\omega_0^2}}\,.$$

Член $\dfrac{1}{4}\,\dfrac{e^2H^2}{m^2\omega_0^2}$ очень мал по сравнению с единицей. Действительно, даже для наиболее легких зарядов (электрон, $e/m = 1{,}76\cdot 10^7$ СГСМ $=$ $= 1{,}759 \cdot 10^{11}$ Кл·кг$^{-1}$) и огромных полей порядка миллиона эрстедов мы для видимого излучения ($\omega_0 \approx 3 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$) получим $\dfrac{1}{4}\,\dfrac{e^2H^2}{m^2\omega_0^2} \approx$ $\approx 10^{-5}$. Пренебрегая этой величиной и помня, что частота ω должна быть положительной, находим

$$\omega_g = \omega_0 - \frac{1}{2}\,\frac{e}{m}\,H, \quad \omega_d = \omega_0 + \frac{1}{2}\,\frac{e}{m}\,H. \tag{171.7}$$

Таким образом, теория приводит к выводу, что величина расщепления равна

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0 = 2\pi\Delta\nu = \pm\frac{1}{2}\,\frac{e}{m}\,H, \tag{171.8}$$

т.е. пропорциональна напряженности магнитного поля H, как это и показывает опыт. Наибольшие магнитные поля, в которых измерялось расщепление магнитных линий, были получены в опытах П.Л. Капицы (1938 г.). Он установил, что даже для полей около 320 000 Э соблюдается пропорциональность между $\Delta\nu$ и H.

Полученное выше соотношение $\Delta\omega = \pm\dfrac{1}{2}\,\dfrac{e}{m}\,H$ дает возможность на основании измерений $\Delta\omega$ и H вычислить отношение e/m для зарядов, движение которых обусловливает эффект Зеемана. Это вычисление дает

$$\frac{e}{m} = 1{,}765 \cdot 10^7 \text{ СГСМ по измерениям 1914 г.,}$$

$$\frac{e}{m} = 1{,}761 \cdot 10^7 \text{ СГСМ по измерениям 1929 г.}$$

При сравнении рассчитанных величин с результатами измерения e/m по отклонению катодных лучей в электрическом и магнитном полях ($1{,}769 \cdot 10^7$) не остается сомнений, что заряженная частица в атоме, определяющая его оптические свойства, есть электрон [1]). Однако расхождение в определении e/m по двум методам заставляло подозревать какие-то принципиальные недочеты в определении по тому или другому методу. В самые последние годы улучшение методики определения e/m по отклонению катодных лучей привело к согласию со спектральными данными.

И теория, и опыт показывают, что для наблюдения явления Зеемана в обычных условиях требуются спектральные аппараты большой разрешающей силы. Так, для $\lambda = 300{,}0$ нм в поле 10 000 Э расщепление достигает всего лишь 0,003 нм. В полях, применявшихся Капицей,

[1]) Современное значение $e/m = 1{,}7588047(49) \cdot 10^7$ СГСМ.

расщепление достигало 0,15 нм и могло наблюдаться при помощи призменного спектрографа. Рисунок 31.4 воспроизводит фотографии явления Зеемана для линии кадмия $\lambda = 643{,}87$ нм (нормальный триплет; в верхней части рисунка изображена π-компонента, а в нижней — σ-компоненты).

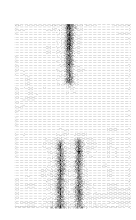


Рис. 31.4. Простой эффект Зеемана для синглетной линии кадмия, $\lambda = 643{,}87$ нм

Замечание. Более детальное исследование влияния магнитного поля на движение электрона показывает [1], что изменение угловой скорости электрона не сопровождается изменением радиуса его орбиты r. Поскольку радиус орбиты остается постоянным, то изменение угловой скорости на $\pm\Delta\omega$ сопровождается изменением *линейной* скорости на $\Delta v = \pm r\Delta\omega$, а следовательно, и изменением кинетической энергии электрона. При этом возникает вопрос: за счет работы каких сил происходит это изменение энергии? (Сила Лорентца перпендикулярна к направлению скорости и работы не совершает.)

Дело сводится к явлениям электромагнитной индукции. Пусть в отсутствие магнитного поля скорость электрона на орбите была v_0. При включении магнитного поля за то время, пока напряженность поля меняется от нуля до H, действует электродвижущая сила индукции, т.е. вихревое электрическое поле, линии которого расположены в плоскости, перпендикулярной к направлению изменяющегося магнитного потока. Это поле действует на электрон и в силу своего вихревого характера совершает некоторую работу даже при замкнутом пути электрона, изменяя кинетическую энергию его орбитального движения.

Может быть нелишне напомнить, что совершенно так же разрешаются и подобные кажущиеся энергетические парадоксы в электродинамике. Например, увеличение кинетической энергии магнита или катушки с током, приходящих в колебание [2] при наложении постоянного магнитного поля, есть также результат электромагнитной индукции.

§ 172. Аномальный (сложный) эффект Зеемана

Описанный выше тип расщепления — появление триплета из двух σ-компонент и одной π-компоненты — наблюдается, как выяснили дальнейшие исследования, крайне редко. Он характеризует простые спектральные линии, так называемые *синглетные* линии, представляющие одну определенную, практически монохроматическую волну, и называется *нормальным расщеплением*. Громадное же большинство

[1] См., например, Э. В. Шпольский. Атомная физика. Т. I. Наука, 1974.

[2] Окончательная ориентация катушки или магнита относительно поля есть вторичный эффект — результат трения в подшипниках, причем кинетическая энергия колебаний переходит в тепло.

спектральных линий сложно; они представляют собой *мультиплеты*, т.е. состоят из двух или нескольких тесно расположенных спектральных линий. Простым мультиплетом — дублетом — является, например, желтая линия натрия, представляющая собой пару линий D_1 и D_2, длины волн которых различаются почти на 6 Å ($\lambda_{D_1} = 5895{,}930$ Å и $\lambda_{D_2} = 5889{,}963$ Å), причем интенсивность линии D_2 в два раза больше, чем линии D_1. Нередко встречаются значительно более сложные мультиплеты, состоящие из многих компонент. Воздействие магнитного поля на эти мультиплеты дает гораздо более сложную картину расщепления, чем описанная выше. Так, дублет натрия расщепляется таким образом, что линия D_2 дает 6, а линия D_1 — 4 компоненты. Часть из них является π-компонентами, часть σ-компонентами, раздвинутыми так, что для одних расщепление больше, а для других меньше нормального расщепления в том же магнитном поле; интенсивность отдельных π- и σ-компонент такова, что смесь всех линий дает неполяризованный свет. На рис. 31.5 показана фотография описанного расщепления, а на рис. 31.6 изображен еще более сложный случай. На нем изображена одна из линий септета хрома, распадающаяся на 21 компоненту: в нижней части фигуры изображены 14 σ-компонент, а в верхней — 7 π-компонент (на репродукции некоторые наиболее слабые компоненты видны плохо).

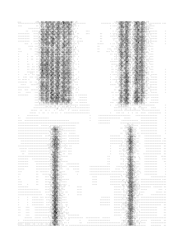


Рис. 31.5. Сложный эффект Зеемана для дублета натрия. Внизу — дублет в отсутствие поля, вверху — расщепление в магнитном поле

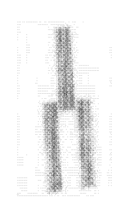


Рис. 31.6. Сложный эффект Зеемана для септета хрома. Внизу — четырнадцать σ-компонент, вверху — семь π-компонент

Сложность картины этого *аномального* эффекта Зеемана не случайным образом связана со сложным характером линии в отсутствие внешнего магнитного поля. Общая причина лежит в том, что электрон, кроме электрического заряда, обладает еще и определенным магнитным моментом. Взаимодействие этого магнитного момента с магнитным полем, господствующим внутри атома, приводит к сложной структуре спектральных линий, а взаимодействие его с внешним магнитным полем — к сложному или аномальному расщеплению. Учет таких взаимодействий возможен только с помощью квантовой теории. Лишь квантовая теория дала удовлетворительное толкование аномальному эффекту Зеемана, выяснив одновременно и причину сложной структуры спектральных линий.

Простой, или нормальный, эффект Зеемана также, конечно, истолковывается квантовой теорией, причем полученный с ее помощью результат совпадает с результатами простой теории Лорентца. Тот факт, что в первоначальных опытах Зеемана наблюдался нормальный триплет, было удачным обстоятельством, но он сыграл чрезвычайно важную роль в развитии электронной теории. Блестящее объяснение

простого эффекта Зеемана с помощью электронных представлений явилось одним из наиболее решительных успехов теории Лорентца, которые не были поколеблены и тогда, когда дальнейшие наблюдения показали, что явление очень часто имеет гораздо более сложный характер. Сохраняя объяснение, данное электронной теорией, эти более сложные случаи отнесли к аномальным, тогда как в действительности они представляют более общее явление, а «нормальный» эффект есть лишь частный случай его.

§ 173. Обратный эффект Зеемана. Его связь с явлением Фарадея

Эффект Зеемана удалось наблюдать и на линиях поглощения (*обратный эффект Зеемана*). Если абсорбирующее вещество, например пары металла, дающие резкую спектральную линию поглощения [1]), поместить между полюсами электромагнита, то вид спектра поглощения будет меняться при включении магнитного поля. При продольном наблюдении в отсутствие поля наблюдается резкая линия поглощения; при включении магнитного поля она заменяется двумя линиями поглощения, сдвинутыми в область бóльших и меньших длин волн симметрично по обе стороны от первоначальной линии; при этом величина сдвига $\Delta\nu$ растет пропорционально напряженности магнитного поля H и определяется тем же соотношением (171.8):

$$\Delta\nu = \pm\frac{1}{4\pi}\,\frac{e}{m}\,H \tag{173.1}$$

(в случае линии, соответствующей нормальному эффекту). При поперечном наблюдении первоначальная линия поглощения сопровождается двумя другими, расположенными по обе стороны ее на расстоянии $\Delta\nu = \pm\frac{1}{4\pi}\,\frac{e}{m}\,H$. Коэффициент поглощения будет зависеть от характера поляризации падающего света.

Теоретический смысл этих явлений легко понять. Под действием магнитного поля меняются собственные периоды колебания атомов и, следовательно, положение линий поглощения. Наблюдения в продольном направлении показывают, что собственные частоты, соответствующие правому и левому вращению, смещаются в разные стороны. Этим обстоятельством устанавливается связь между явлением Зеемана и явлением Фарадея. Так как показатель преломления зависит от близости частоты исследуемой волны к собственным частотам вещества (кривая дисперсии), то, следовательно, под действием магнитного поля изменяется и показатель преломления, причем *различно* для волн данной частоты, поляризованных по правому и левому кругу.

Итак, под действием магнитного поля возникает двойное (вращательное) преломление, т.е. согласно теории Френеля — вращение плоскости поляризации (явление Фарадея).

---

[1]) Беккерелю удалось наблюдать обратный эффект Зеемана и в некоторых кристаллах (ксенотит, тизонит), которые характеризуются крайне узкими полосами поглощения, особенно при низких температурах.

На кривой дисперсии (рис. 31.7) соотношения представлены в преувеличенном масштабе. Кривая I показывает ход показателя преломления в магнитном поле для луча, поляризованного по левому кругу, а кривая II — для луча, поляризованного по правому кругу. Из чертежа

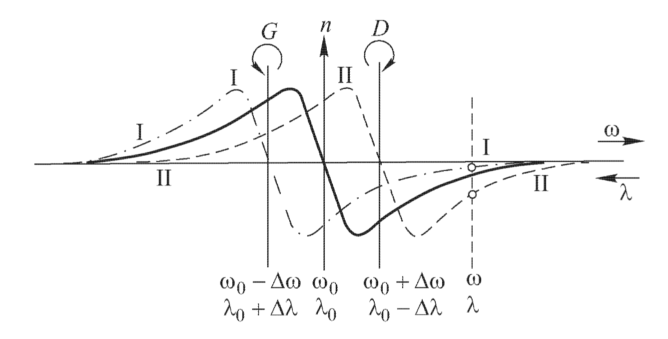


Рис. 31.7. Ход кривой дисперсии в отсутствие магнитного поля (сплошная кривая) и в магнитном поле (штриховые): I — для луча, поляризованного по левому кругу; II — для луча, поляризованного по правому кругу

ясно, что для какой-нибудь длины волны λ в магнитном поле появляется круговое двойное преломление. Эффект тем значительнее, чем ближе λ и λ_0. Действительно, вблизи собственных линий абсорбции эффект вращения особенно велик. Но даже и очень далеко от собственных частот явление легко наблюдается благодаря чрезвычайно большой чувствительности метода вращения плоскости поляризации (см. § 168).

§ 174. Явление Штарка

Явление Зеемана с полной ясностью показало, что основным электрическим элементом, определяющим оптические свойства атома, является электрон. Естественно ожидать, что и электрическое поле может воздействовать на частоту испускаемого света. Однако простая теория, основанная на этих соображениях, приводит к несколько неожиданным результатам, показывая, что гармоническое колебание не меняет своей частоты под действием электрического поля, в отличие от поведения гармонического осциллятора в магнитном поле (см. упражнение 219).

Судя по монохроматичности спектральных линий, колебания электрона в атоме очень близки к гармоническим, и большинство оптических явлений в первом приближении хорошо истолковывается на основе представления о гармоническом колебании. Если же принять во внимание отступление от гармоничности, то указанная теория дает небольшое расщепление спектральных линий, пропорциональное квадрату электрического поля, а именно $\Delta\omega \sim (e^2/2m^2\omega_0^2)E^2$, очень малое по сравнению с ω_0 даже для больших достижимых полей.

На возможность такого влияния электрического поля указал Фогт, которому не удалось, однако, наблюдать это явление ввиду трудности создания в разрядной трубке большого электрического поля, необходимого для успеха опыта.

Штарк (1913 г.) преодолел это затруднение и открыл явление, названное его именем и совсем не похожее на предсказанное Фогтом: явление в водороде было гораздо сильнее ожидаемого и, кроме того, оказалось зависящим от *первой степени* напряженности поля E (линейный эффект).

а. Особенность установки Штарка. Свечение газа в разрядной трубке сопровождается сильной ионизацией, вследствие чего нет возможности поддерживать внутри трубки сильные поля. Штарк нашел выход: сильная ионизация и свечение были сосредоточены в одной части трубки, а сильное поле создавалось в другой части, где нет ионов и где, следовательно, удается поддерживать высокое напряжение; разность давлений поддерживается откачкой, светящиеся же частицы вводились через отверстия (каналы, рис. 31.8). Зазор

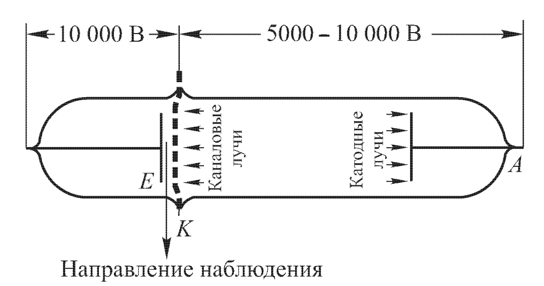


Рис. 31.8. Схема трубки для наблюдения эффекта Штарка

EK очень мал (около 1 мм), так что напряженность поля в конденсаторе EK достигает примерно 100 000 В/см.

В этой трубке наблюдается поперечный эффект. Специальная установка дает продольный эффект (наблюдать вдоль направления движения каналовых лучей нельзя, ибо явление осложняется эффектом Доплера).

б. Результаты для водорода. При поперечном наблюдении каждая линия распадается на ряд π- и σ-компонент, расположенных (в первом приближении) симметрично к исходной линии на расстояниях, кратных некоторому минимальному расстоянию, пропорциональному *первой степени* напряженности поля. Число компонент для каждой линии водородного спектра различно и подчиняется определенной закономерности, связанной со спектральными закономерностями. Общая картина распределения интенсивности очень сложна (рис. 31.9).

Классическая теория (см. выше) не в состоянии объяснить эффект. Подобно аномальному эффекту Зеемана явление Штарка требует для своего объяснения учета законов строения атома, т.е. кванто-

вых законов. Квантовая теория явления, разработанная впоследствии (Эпштейн–Шварцшильд, 1916 г.), удовлетворительно объясняет все его особенности. Также удовлетворительно объяснено то обстоятельство, что другие элементы, обладающие более чем одним электроном,

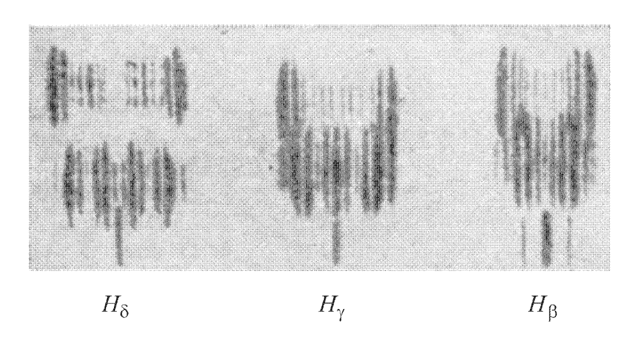


Рис. 31.9. Расщепление линий спектра водорода в электрическом поле

не обнаруживает линейного эффекта Штарка. Ионизованный атом гелия с одним электроном, наоборот, дает линейный эффект, подобный эффекту в водороде.

Квадратичный эффект, предсказанный Фогтом, был открыт значительно позднее (1924 г.), и связан при помощи полной теории с линейным эффектом Штарка. Грубое наблюдение влияния электрических полей на спектральные линии водорода возможно в любой разрядной трубке вблизи катода, где господствуют сильные поля (метод Ло Сурдо).

Влияние междумолекулярных электрических полей проявляется в уширении линий в обычных условиях разряда.

ДЕЙСТВИЯ СВЕТА

Воздействие света на вещество состоит в сообщении этому веществу энергии, приносимой световой волной, в результате чего могут возникать разнообразные эффекты. Таким образом, первичным процессом является *поглощение* света.

Поглощенная световая энергия в самом общем и наиболее распространенном случае переходит в тепло, несколько повышая температуру поглощающего тела. Но нередко лишь часть световой энергии переходит в тепло, другая же испытывает иные превращения, вызывая те или иные *действия* света. В настоящем разделе мы не будем рассматривать тех случаев, когда в результате воздействия света тело само становится источником и испускает излучение собственной или вынужденной частоты. Часть таких процессов (излучение вынужденных частот) была рассмотрена в гл. XXIX (рассеяние света). Другая их часть (излучение собственных частот) будет обсуждаться в гл. XXXVIII. Настоящий же раздел посвящен вопросам превращения световой энергии в механическую энергию электронов (фотоэффект и явление Комптона) или всей поглощающей системы (давление света), а также различным химическим действиям света (фотохимия, фотография, физиологическая оптика).

Глава XXXII

ФОТОЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ

§ 175. Введение

Среди разнообразных явлений, в которых проявляется воздействие света на вещество, важное место занимает *фотоэлектрический эффект*, т.е. испускание электронов веществом под действием света. Анализ этого явления привел к представлению о световых квантах и сыграл чрезвычайно важную роль в развитии современных теоретических представлений. Вместе с тем фотоэлектрический эффект используется в фотоэлементах, получивших исключительно широкое применение в разнообразнейших областях науки и техники и обещающих еще более богатые перспективы.

Открытие фотоэффекта следует отнести к 1887 г., когда Герц обнаружил, что освещение ультрафиолетовым светом электродов искрового промежутка, находящегося под напряжением, облегчает проскакивание искры между ними.

Явление, обнаруженное Герцом, можно наблюдать на следующем легко осуществимом опыте (рис. 32.1). Величина искрового промежутка F подбирается таким образом, что в схеме, состоящей из трансформатора T и конденсатора C, искра проскакивает с трудом (один-два раза в минуту). Если осветить электроды F, сделанные из чистого цинка, светом ртутной лампы Hg, то разряд конденсатора значительно облегчается: искра начинает проскакивать довольно часто, если, конечно, мощность трансформатора достаточна для быстрой зарядки конденсатора C. Поместив между лампой и электродами F стекло G, мы преграждаем доступ ультрафиолетовым лучам, и явление прекращается.

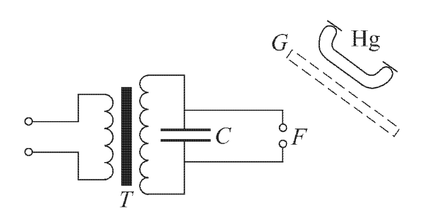
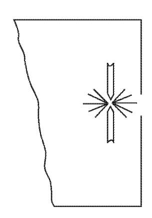


Рис. 32.1. Схема опыта Герца

Систематические исследования Гальвакса, А.Г. Столетова и других (1888 г.) выяснили, что в опыте Герца дело сводится к освобождению зарядов из электродов под действием света; попадая в электрическое поле между электродами, заряды эти ускоряются, ионизуют окружающий газ и вызывают разряд.



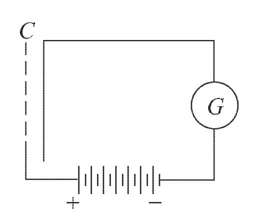


Рис. 32.2. Схема опытов Столетова по наблюдению фотоэффекта. Электрическая цепь состоит из батареи элементов и конденсатора C, положительно заряженная пластинка которого сделана в виде проволочной сетки. Свет проходит через ячейки проволочного электрода и падает на отрицательно заряженную пластинку. Фототок регистрируется гальванометром G

А.Г. Столетов осуществил опыты по фотоэффекту, применяя впервые *небольшие* разности потенциалов между электродами. «Повторяя в начале 1888 г., — пишет Столетов, — интересные опыты Герца, Видемана и Эберта, Гальвакса относительно действия лучей на электрические разряды высокого напряжения, я вздумал испытать, получится ли подобное действие при электричестве слабых потенциалов... Моя попытка имела успех выше ожидания» [1]).

Схема опытов, примененная Столетовым, изображена на рис. 32.2. Основными результатами исследований Столетова, сохранившими свое значение и до нашего времени, были следующие заключения.

1) Наиболее эффективно действуют ультрафиолетовые лучи, поглощаемые телом («чем спектр обильнее такими лучами, тем сильнее действие»).

[1]) Столетов А.Г. Избранные сочинения.– М.: Гостехиздат, 1950, с. 191.

2) Сила фототока пропорциональна создаваемой освещенности тела («разряжающее действие при прочих равных условиях пропорционально энергии активных лучей, падающих на разряжаемую поверхность»).

3) Под действием света освобождаются *отрицательные* заряды («действие лучей есть строго униполярное, положительный заряд лучами не уносится; по всей вероятности, кажущееся заряжение нейтральных тел лучами объясняется той же причиной»).

Если, например, цинковую пластинку, соединенную с электроскопом и заряженную отрицательно, осветить ультрафиолетовым светом, то электроскоп быстро разряжается; но та же пластинка, заряженная положительно, сохраняет свой заряд, несмотря на освещение. При тщательном наблюдении (электроскоп большой чувствительности) можно заметить, что незаряженная пластинка под действием освещения заряжается *положительно*, т.е. теряет часть своих отрицательных зарядов, первоначально нейтрализовавших ее положительный заряд.

Несколько лет спустя (1898 г.) Ленардом и Томсоном были произведены определения e/m для освобождаемых зарядов по отклонению их в электрическом и магнитном полях. Эти измерения дали для e/m значение $1{,}76 \cdot 10^7$ СГСМ, доказав, таким образом, что освобождаемые светом отрицательные заряды суть *электроны*.

§ 176. Законы фотоэффекта

а. Ток насыщения. Для исследования силы фототока применяется обычно схема, сходная со схемой Столетова (рис. 32.3). Здесь P — освещаемая пластинка металла, N — вторая пластинка, присоединенная через гальванометр G к соответствующему полюсу батареи B. Электроны, освобождаемые светом из P, под действием батареи B несутся к N и далее следуют по проводам через гальванометр, замыкая ток батареи B. Уже первые исследователи обнаружили, что явление в высокой степени зависит от *чистоты* освещаемой поверхности. Поэтому точные опыты производятся со свежими поверхностями, тщательно очищенными механическим путем или, еще лучше, образованными путем напыления металла в вакууме. Высокий вакуум поддерживается между электродами P и N во время измерения, ибо присутствие газов может сильно изменить свойства поверхности и, кроме того, осложняет условия выхода и переноса зарядов. Поддерживая освещение постоянным и изменяя напряжение батареи B, мы будем в известных пределах изменять силу тока в гальванометре. Но если опыт производится в высоком вакууме и электродам придана такая форма, что *все заряды*, вырванные из освещенной поверхности, попадают на второй электрод даже без помощи ускоряющего

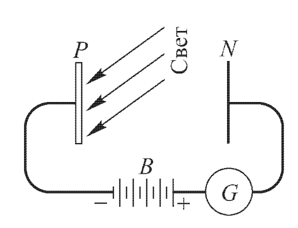


Рис. 32.3. Схема для исследования зависимости фототока от напряжения и силы света

поля [1]), то сила фототока не будет возрастать при увеличении поля. Наоборот, тормозящее поле, направленное так, чтобы мешать движению электронов от освещенной поверхности ко второму электроду, может *ослабить* фототок и даже свести его к нулю.

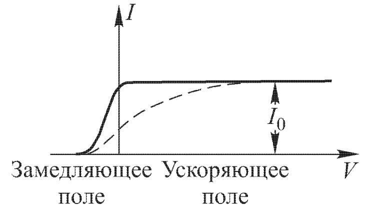


Рис. 32.4. Характеристика фототока

Действительно, опыт показывает что в соответствии с этими рассуждениями зависимость силы фототока I от приложенной к электродам разности потенциалов V — так называемая *характеристика* фототока — имеет вид, изображенный на рис. 32.4 (сплошная кривая). При электродах, форма и взаимное расположение которых не удовлетворяют поставленным выше требованиям, характеристика фототока более или менее сильно искажается (см. рис. 32.4, штриховая кривая). Однако сохраняются ее существенные черты: при некоторой не чрезмерно большой ускоряющей разности потенциалов ток доходит до постоянной величины (*ток насыщения*); при определенной тормозящей разности потенциалов ток падает до нуля. На стремление фототока к насыщению также указал А.Г. Столетов.

Так как ток насыщения соответствует условиям, при которых *все* освобожденные светом электроны проходят через цепь гальванометра, то сила тока насыщения и должна быть принята за меру фотоэлектрического действия света.

б. Зависимость тока насыщения от интенсивности падающего света. Тщательно выполненные измерения показывают, что сила тока насыщения строго пропорциональна световому потоку, поглощенному металлом. Так как интенсивность поглощенного в металлах света пропорциональна интенсивности падающего, то основной закон фотоэффекта можно сформулировать так: *сила фототока насыщения прямо пропорциональна падающему световому потоку.*

Закон этот проверен в очень широком интервале интенсивностей света и выполняется крайне строго. Благодаря ему фотоэлементы можно использовать в качестве превосходных объективных фотометров.

Закон, приведенный выше, выполняется с полной строгостью в том случае, когда измеряемый ток насыщения образован лишь электронами, освобожденными светом. Это имеет место, если чувствительная поверхность помещена в вакуум. В приборах, наполненных газом и обычно гораздо более чувствительных, так как в них к току электронной эмиссии прибавляется ток ионизации, могут уже возникать некоторые отступления от простой пропорциональности между силой тока насыщения и интенсивностью света; поэтому приборами описан-

[1]) Наилучшая форма расположения электродов — это сферический конденсатор; его внутренний шарик представляет собой светочувствительную поверхность, а размеры малы по сравнению с размерами внешнего шара.

ного рода надо пользоваться для измерительных целей с известной осмотрительностью.

в. Скорости фотоэлектронов. Снимая характеристику фототока (см. рис. 32.4), мы обнаруживаем, что наложение на электроды тормозящего электрического поля уменьшает силу тока. Отсюда следует, очевидно, что часть электронов обладает при вылете кинетической энергией $mw^2/2$, которая меньше работы, необходимой для преодоления приложенной разности потенциалов. Подобрав такую разность потенциалов V, при которой ток обращается в нуль, мы задерживаем *все* электроны, включая и самые быстрые. Таким образом, w_m — максимальная скорость электронов, освобожденных светом в описанном опыте, — определится из соотношения

$$\frac{1}{2}\, mw_m^2 = eV. \tag{176.1}$$

То обстоятельство, что даже при наиболее благоприятном расположении электродов характеристика фототока не обрывается сразу, а более или менее полого падает до нуля, указывает, что скорости вылетающих электронов различны: самые медленные электроны задерживаются очень слабым тормозящим полем; для задержания самых быстрых требуется встречная разность потенциалов, равная V. Изучив законы спадания характеристики, можно определить распределение электронов по скоростям. Причина такого разнообразия скоростей заключается в том, что свет может освобождать электроны не только с поверхности металла, но и из некоторой глубины; эти последние электроны теряют часть сообщенной им скорости раньше, чем они выйдут на поверхность, вследствие случайных столкновений внутри металла.

Поэтому физический интерес представляет *максимальная* скорость, определяемая при помощи соотношения (176.1), ибо она характеризует энергию, сообщаемую электрону при освобождении его светом.

Было бы, однако, ошибочным думать, что для освобождения электрона со скоростью w из поверхности металла достаточно сообщить ему энергию $mw^2/2$. Известно, что электрон при прохождении через поверхность металла должен преодолеть некоторое сопротивление своему выходу, затратив определенную работу P. Эта *работа выхода* препятствует в обычных условиях свободным электронам металла покинуть последний. Она различна для разных металлов, вследствие чего между двумя соприкасающимися кусками различных металлов устанавливается *контактная разность* потенциалов. Работу выхода можно также определить по явлению термоионной эмиссии, ибо количество электронов, испускаемых в течение секунды единицей поверхности накаленного металла, сильно зависит от величины работы выхода.

Таким образом, энергия $\mathscr{E}$, которую нужно сообщить электрону для того, чтобы он вырвался с максимальной скоростью w_m из пластины, характеризуемой работой выхода P, определяется соотношением

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2}\, mw_m^2 + P = eV + eV_0, \tag{176.2}$$

где $V_0 = P/e$ — *потенциал выхода.*

При помощи соотношения (176.2) можно найти величину энергии $\mathscr{E}$, получаемой электроном при фотоэффекте. Исследования Ленарда и ряда других позволили установить чрезвычайно важный закон: энергия $\mathscr{E}$, приобретаемая электроном, не зависит ни от интенсивности падающего света, ни от природы освещаемого вещества, ни от температуры его; эта энергия определяется лишь частотой падающего монохроматического света и растет с увеличением частоты.

§ 177. Уравнение Эйнштейна. Гипотеза световых квантов

Еще в тот период, когда указанный закон был экспериментально установлен в качественной форме, Эйнштейн (1905 г.) обосновал теоретически количественную связь между энергией, получаемой электроном при его освобождении светом, и частотой этого света. Согласно теории Эйнштейна, закон фотоэффекта имеет следующий вид:

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2}\, m w_m^2 + P = eV + P = h\nu, \qquad (177.1)$$

где $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная теории квантов, введенная Планком.

По мысли Эйнштейна *вся* энергия, полученная электроном, доставляется ему светом в виде определенной порции $h\nu$, величина которой зависит от частоты света (*световой квант*), и «усваивается» им целиком. Таким образом, электрон не заимствует энергию от атомов вещества катода, благодаря чему природа вещества не играет никакой роли в определении $\mathscr{E}$.

Энергия кванта очень велика по сравнению с тепловой энергией электронов, и поэтому изменение температуры должно лишь очень слабо сказываться на скорости вылетающих электронов (действительно, такое малое влияние было обнаружено в работах последнего времени). В рамках теории Эйнштейна пропорциональность силы фототока насыщения световому потоку также легко объяснима. Действительно, световой поток определяется числом квантов света, падающих на поверхность за единицу времени, а число освобожденных электронов должно быть пропорционально числу падающих квантов; при этом, как показывает опыт, лишь малая часть квантов передает свою энергию отдельным электронам, остальные же расходуются на нагревание металла в целом.

Теоретическая формула Эйнштейна была блестяще подтверждена десятилетие спустя опытами Милликена (1916 г.). Измерения Милликена, выполненные по схеме § 176, чрезвычайно усложненной вследствие применения ряда экспериментальных предосторожностей (свежеочищаемая поверхность металла в вакууме, учет контактных разностей потенциалов между различными частями аппаратуры и т.д.), дали строго линейную зависимость между V и ν для нескольких металлов (рис. 32.5). По наклону этих прямых для ряда изученных металлов (Na, Mg, Al, Cu) было определено значение постоянной h. Среднее из этих измерений есть $h = 6{,}67 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, что хорошо совпадает со значениями h, полученными из опытов иного рода.

Впоследствии данный метод был улучшен и привел к еще более точным определениям[1]) ($h = 6{,}658 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, П.И. Лукирский, 1928 г., метод сферического конденсатора, см. § 176).

Из измерений Милликена можно, пользуясь формулой Эйнштейна, определить также и работу выхода. Найдем то значение $\nu = \nu_0$, которому соответствует $V = 0$, т.е. точку пересечения прямой Милликена (см. рис. 32.5) с осью абсцисс; тогда $P = h\nu_0$.

Таким образом, если освещать металл светом частоты ν_0 (или меньшей), то $w = 0$, т.е. электроны не выйдут из металла даже при наличии некоторого ускоряющего поля. Поэтому найденную таким

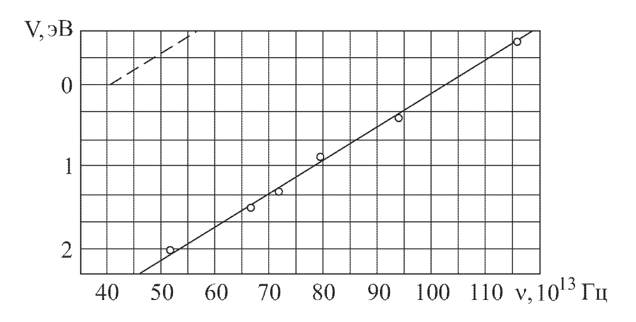


Рис. 32.5. Зависимость энергии фотоэлектронов от частоты

образом частоту ν_0 (или соответствующую длину волны $\lambda_0 = c/\nu_0$) называют *граничной частотой* (красная граница фотоэффекта). Она лежит в области тем более длинных волн, чем электроположительнее металл, т.е. чем легче отдает он свои электроны. Так, например, для щелочных металлов граница лежит в области видимого света, тогда как для большинства других металлов она находится в ультрафиолете. Необходимо отметить также, что присутствие примесей, например, газов, растворенных в металле, нередко сильно облегчает выход электронов, перемещая границу в область длинных волн. Ниже приведены значения «красной границы» для нескольких по возможности *чистых* металлов:

Металл	K	Na	Li	Hg	Fe	Ag	Au	Ta
λ_0, нм	550,0	540,0	500,0	273,5	262,0	261,0	265,0	305,0

§ 178. Обоснование гипотезы световых квантов в явлениях фотоэффекта

Уравнение Эйнштейна (177.1) (его можно также записать в виде $mw_m^2/2 = h(\nu - \nu_0) = eV$), подтвержденное опытами Милликена, под-

[1]) Цифры Милликена и Лукирского пересчитаны, исходя из нового, более точного значения заряда электрона.

вергалось и в дальнейшем разнообразным экспериментальным проверкам. В частности, частота падающего света варьировалась в очень широких пределах — от видимого света до рентгеновских лучей, и во всем интервале опыт оказался в превосходном согласии с теорией. В опытах с рентгеновскими лучами проверка упрощается благодаря тому, что ν очень велико по сравнению с ν_0. Поэтому соотношение Эйнштейна принимает вид $h\nu = eV$ и позволяет определить ν, если измерено V. Таким приемом пользуются даже для определения длины волны очень жестких γ-лучей, для которых метод дифракции на кристаллах невозможно осуществить с достаточной точностью из-за малости соответствующей длины волны.

Фотоэлектрические опыты с рентгеновскими лучами дают возможность исследовать, распространяется ли световая энергия равномерно во все стороны, как следует из обычных волновых представлений, или она «летит» то по одному, то по другому направлению в виде дискретных квантов. Действительно, кванты видимого света обладают малым запасом энергии (так, для желтого излучения $\nu = 5 \cdot 10^{14}$ с$^{-1}$, $h\nu = 3{,}31 \cdot 10^{-19}$ Дж); поэтому для регистрации их в большинстве опытов приходится иметь дело с большим числом квантов в единицу времени. В соответствии с этим действие, производимое случайным распределением летящих по всем направлениям световых квантов, трудно отличить от действия волны, равномерно распространяющейся во все стороны. Чем больше величина кванта, тем легче наблюдать действие отдельного кванта и легче, следовательно, осуществить опыт наблюдения распространения световой энергии не во все стороны равномерно, а вспышками, то по одному, то по другому направлению. Рентгеновские кванты удовлетворяют этому условию. Кроме того, с рентгеновскими лучами легче осуществить условия, необходимые для возбуждения небольшого числа актов испускания в секунду. Для получения рентгеновских лучей нужно бомбардировать электронами анод; всякая остановка (или торможение) электрона сопровождается испусканием рентгеновского импульса. В рамках теории световых квантов в самом благоприятном случае вся кинетическая энергия электрона после остановки перейдет полностью в один-единственный квант, частота которого ν определится из условия $\mathscr{E}_{\text{кин}} = h\nu$. Если бомбардирующий электрон разгонялся разностью потенциалов V, то $\mathscr{E}_{\text{кин}} = eV$.

Итак, условие максимальной частоты имеет вид

$$h\nu = eV.$$

Действительно, опыт подтвердил, что при испускании рентгеновских волн наблюдается максимальная частота (коротковолновая граница), определяемая из написанного условия, где V — ускоряющая разность потенциалов, e — заряд электрона, ν — частота границы и h — постоянная Планка. Волны более короткие (бо́льшие ν) никогда не наблюдаются, волны же более длинные соответствуют превращению лишь части кинетической энергии электрона в излучение. Определение коротковолновой границы рентгеновского спектра может быть выполнено весьма надежно. Поэтому такого рода опыты используются как один из наиболее совершенных методов определения значения

постоянной Планка с помощью соотношения $h\nu = eV$. Наилучшие измерения, выполненные этим методом, дали $h = 6{,}624 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

Регулируя число электронов, бомбардирующих анод, мы можем менять число излучаемых рентгеновских квантов. Если заставить такие рентгеновские лучи действовать на металлическую пластинку, вызывая фотоэффект, то, как показывает опыт, кинетическая энергия испускаемых электронов равняется энергии кванта. Таким образом, полная схема превращения имеет вид

$$eV = \frac{mw^2}{2} = h\nu = \frac{mw^2}{2},$$

т.е. весь цикл превращений состоит из: 1) превращения работы электрического поля eV в кинетическую энергию $mw^2/2$ электрона в рентгеновской трубке; 2) превращения кинетической энергии этого электрона в рентгеновский квант $h\nu$, и, наконец; 3) превращения энергии кванта полностью в кинетическую энергию $mw^2/2$ электрона, освобожденного этим квантом при фотоэффекте. Такой цикл гораздо больше походит на удар, чем на процесс постоянного накопления в освобождаемом электроне энергии, приносимой волнами.

Подобные опыты можно сильно разнообразить, пользуясь удобством экспериментирования, предоставляемым величинами рентгеновского кванта. Все они говорят в пользу передачи световой энергии концентрированными порциями, т.е. в пользу гипотезы световых квантов. Один из наиболее убедительных опытов этого рода принадлежит А.Ф. Иоффе.

Осуществлены также опыты, показывающие, что энергия рентгеновских лучей распространяется в разные стороны не одновременно, но что порции ее (кванты) летят то в ту, то в другую сторону. Опыт был выполнен при помощи двух счетчиков [1]), достаточно чувствительных для того, чтобы зарегистрировать действие одного рентгеновского кванта, и достаточно быстро отмечающих его появление. Опыт этот осуществлен Боте по схеме, указанной на рис. 32.6.

Тоненькая пленка A, освещенная сбоку рентгеновскими лучами R, сама становится источником рентгеновских лучей (*рентгеновская флуоресценция*). Два счетчика C_1 и C_2 расположены симметрично. Попадание рентгеновского излучения в каждый из них вызывает немедленное (меньше чем через 0,001 с) вздрагивание нити электро-

---

[1]) Счетчик представляет собой небольшой цилиндр, внутри которого на изоляторе помещено острие или тонкая проволока. Между цилиндром и острием создается большая разность потенциалов. Получающееся электрическое поле резко неоднородно и вблизи острия (или нити) может достигать весьма больших значений. Если в таком поле появляется несколько электронов или ионов, то они приобретают под действием поля очень большую скорость и могут ионизовать при столкновениях окружающие молекулы газа. Таким образом, число ионов быстро возрастает, и через счетчик протекает кратковременный ток заметной силы. Поэтому счетчик способен отмечать (считать) появление отдельных электронов или ионов и является одним из наиболее чувствительных приборов. В последнее время счетчики широко применяются для исследования космических лучей.

метра. Эти вздрагивания регистрируются автоматически на общей ленте. Если из A во все стороны расходятся волны, то работа обоих счетчиков должна происходить одновременно, в такт (с малыми случайными вариациями). Наоборот, если из A летят кванты то в одну, то в другую сторону, то показания электрометров будут беспорядочными и лишь случайно могут оказаться близкими или одновременными. Опыт совершенно отчетливо обнаружил беспорядочность показаний электрометров, т.е. доказал, что из A летят кванты то в одну, то в другую сторону.

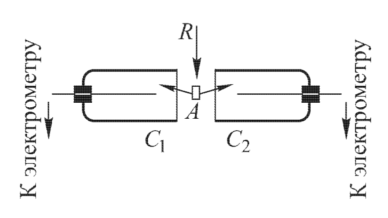


Рис. 32.6. Схема опыта Боте

Аналогичные опыты с квантами видимого света затруднены тем, что кванты эти малы. Однако к световым квантам очень чувствителен глаз; хотя глаз не реагирует на один отдельный квант, но опыты показывают, что необходимое для минимального светового ощущения число квантов в секунду не очень значительно. По измерениям С.И. Вавилова, в области максимальной чувствительности глаза (550 нм) для отдохнувшего глаза пороговая чувствительность в среднем составляет около 200 квантов, падающих за 1 с на зрачок наблюдателя. В этих условиях, как показали опыты Вавилова, удается наблюдать флуктуационные колебания светового потока, имеющие ясно выраженный статистический характер. Хотя в таких опытах и нельзя однозначно отделить квантовые флуктуации светового потока от флуктуаций, связанных с физиологическими процессами в глазу, тем не менее и они могут рассматриваться как подтверждающие квантовый характер явления; кроме того, эти опыты дают результаты, существенные для исследования свойств живого глаза. В частности, с их помощью удалось установить, что число квантов, которые должны поглощаться в *сетчатке* при пороговом раздражении, раз в 9–10 меньше числа квантов, падающих на зрачок, и составляет примерно 20 в секунду.

Итак, совокупность сведений о фотоэффекте, изложенных выше, настойчиво свидетельствует в пользу представления о световых квантах. Можно сказать, что свет частоты ν не только покидает атом в виде порции энергии, равной $h\nu$, но и в дальнейшем распространяется в пространстве и вступает во взаимодействие с веществом в виде такой порции, локализованной и перемещающейся как целое со скоростью света. Для таких элементарных световых частиц принято специальное название — *фотон*.

Энергия фотона зависит от его частоты и равна $h\nu$. Выше, в гл. XXII, был приведен один из основных выводов теории относительности, согласно которому с энергией $\mathscr{E}$ неразрывно связана масса m, причем численное соотношение между $\mathscr{E}$ и m дается выражением $\mathscr{E} = mc^2$. На этом основании масса m фотона определяется выражением

$$m = \frac{h\nu}{c^2}. \tag{178.1}$$

Так как фотон движется со скоростью света, то он обладает импуль-

сом с абсолютной величиной

$$p = mc = \frac{h\nu}{c} \tag{178.2}$$

и направлением, совпадающим с направлением распространения волны. Итак, энергия фотона равна $h\nu$, его масса равна $h\nu/c^2$, величина его импульса равна $h\nu/c$.

Корпускулярные свойства фотона не должны заставить нас забыть о том, что для огромного круга явлений, с которыми мы ознакомились ранее, волновые представления оказались в высшей степени плодотворными. Отметим только, что и в явлении фотоэффекта есть черты, говорящие в пользу классических волновых представлений о свете. Эти черты особенно отчетливо выступают при исследовании зависимости силы фототока от длины волны.

§ 179. Зависимость силы фототока от длины световой волны

Для исследования зависимости силы фототока от длины волны необходимо определить силу тока насыщения, соответствующего определенной лучистой энергии монохроматического света. Результаты подобных измерений приведены на рис. 32.7, где по оси ординат отложена сила тока насыщения I, отнесенная к поглощенной лучистой энергии, а по оси абсцисс — длина волны λ. Рисунок 32.7 показывает, что «красная граница» соответствует $\lambda = \lambda_0$ и с уменьшением длины волны сила тока на единицу поглощенной энергии возрастает. Это значит, что свет с более короткой длиной волны более эффективен. Если принять во внимание, что чем короче длина волны падающего света, тем *меньше* квантов содержится в единице поглощенной энергии (ибо для коротких волн сами кванты, равные $h\nu = hc/\lambda$, *больше*), то из кривой рис. 32.7 ясно видно, как сильно растет способность фотонов выделять электроны по мере перехода к более «крупным» фотонам.

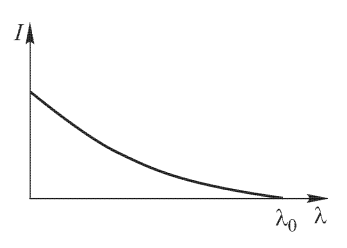


Рис. 32.7. Зависимость силы фототока от длины волны. Нормальный фотоэффект; λ_0 соответствует «красной границе»

Опыт показал, однако, что ход зависимости, изображенный на рис. 32.7, не всегда имеет место. У ряда металлов, особенно щелочных, для которых красная граница лежит далеко в видимой и даже в инфракрасной области спектра и которые, следовательно, чувствительны к широкому интервалу длин волн, наблюдается следующая особенность: сила тока имеет резко выраженный максимум для определенного спектрального участка, быстро спадая по обе его стороны (*селективный*, или *избирательный*, фотоэффект, рис. 32.8). Селективность фотоэлектрических явлений очень напоминает резонансные эффекты. Дело происходит так, как будто электроны в металле обладают собственным периодом колебаний, и по мере приближения час-

тоты возбуждающего света к собственной частоте электронов амплитуда колебаний их возрастает и они преодолевают работу выхода.

Подтверждение подобного взгляда можно было бы видеть в том обстоятельстве, что явление селективного фотоэффекта сильно зависит от направления поляризации света и угла падения. Если падающий свет (рис. 32.9) поляризован так, что электрический вектор параллелен плоскости падения ($E_{||}$), то эффект резко усиливается. Наоборот, при повороте плоскости поляризации на 90° ($E_{\perp}$) селективный эффект исчезает. В первом случае электрический вектор имеет слагающую, перпендикулярную к поверхности металла, во втором — нет. Легко видеть, что компонента E_0, перпендикулярная к поверхности металла, тем больше, чем ближе угол падения α к прямому (см. рис. 32.9). И действительно, величина селективного максимума резко возрастает по мере увеличения угла падения (рис. 32.10).

Рис. 32.8. Зависимость силы фототока от длины волны в области селективного фотоэффекта

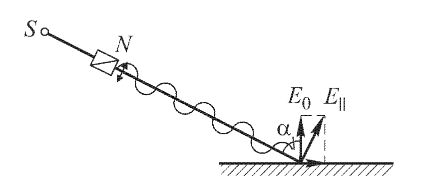


Рис. 32.9. Роль направления колебаний для величины селективного фотоэффекта

Если угол падения достаточно велик, то в области селективного эффекта изменение направления вектора **E**, т.е. ориентация электрического вектора, сказывается чрезвычайно отчетливо на величине фототока. Рисунок 32.11 изображает силу тока насыщения в зависимости от длины волны для двух ориентаций электрического вектора — перпендикулярной ($E_{\perp}$) и параллельной ($E_{||}$) плоскости падения. Приведенные кривые соответствуют углу падения в 60° и относятся к сплаву калия и натрия, максимум чувствительности которого приходится на длину волны $\lambda = 390{,}0$ нм. Ниже приводятся положения максимума для ряда чистых металлов:

Цезий	510,0 нм	Литий	280,0 нм
Рубидий	480,0 нм	Барий	400,0 нм
Калий	435,0 нм	Магний	250,0 нм
Натрий	340,0 нм	Алюминий	215,0 нм

По всей вероятности, и другие металлы обнаруживают селективный эффект, однако максимумы для них лежат в очень коротковолновой области спектра и труднодоступны для наблюдения.

Следует заметить, что легко наблюдаемый большой селективный максимум щелочных металлов принадлежит не чистому металлу, а соединениям, обычно образующимся на поверхности вслед-

ствие присутствия следов газа. При очень больших предосторожностях удается получить чистые поверхности, для которых эффект выражен гораздо слабее. Тем не менее существование селективного фотоэффекта и его характер отчетливо указывают на плодотворность волновых представлений для понимания фотоэффекта. Однако для полной количественной трактовки этих явлений, включая и явление селективного фотоэффекта, требуется применение углубленных представлений о металле, даваемых современной квантовой теорией.

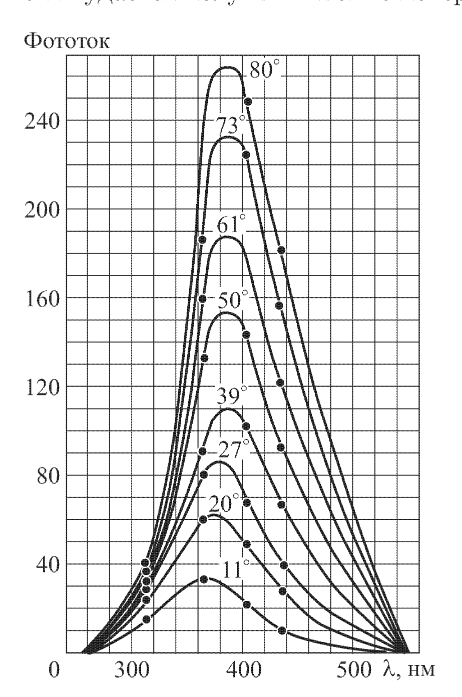


Рис. 32.10. Зависимость величины селективного фотоэффекта от угла падения (числа у кривых)

Законы фотоэффекта, изложенные в данном и предыдущем параграфах, были установлены для сравнительно небольших интенсивностей света. Интерпретация фотоэффекта, основанная на квантовых представлениях, связывает освобождение электрона с передачей ему энергии одного фотона падающего света. Выше мы убедились в том, что в случае мощного света оптический электрон атомов и молекул может приобрести энергию нескольких фотонов (многофотонные поглощение и ионизация, см. § 157). Аналогичное явление было обнаружено и по отношению к свободным электронам металлов (Фаркаш с сотр., 1967 г.).

Если при освещении поверхности металла электрон способен приобрести энергию N фотонов (т.е. энергию $Nh\nu$), то следует ожидать, очевидно, уменьшения граничной частоты в N раз (смещения красной границы фотоэффекта в сторону длинных волн). Наблюдению фотоэффекта за красной границей, требующему, как мы увидим, огромной интенсивности света, длительное время препятствовало сильное нагревание металла, приводящее к термоэлектронной эмиссии [1]), для которой красная граница, разумеется, не существует. Маскирующее влияние термоэмиссии было почти полностью устранено применением

[1]) Явление термоэлектронной эмиссии обусловлено тем, что наиболее быстрые электроны металла, обладающие энергией, превышающей работу выхода, преодолевают потенциальный барьер и выходят за пределы металла. Подробнее см. С.Г. Калашников. Электричество.– М.: Физматлит, 2002.

сверхкоротких импульсов лазерного излучения (см. § 230) длительностью 10^{-11}–10^{-12} с и скользящим освещением фотокатода (угол падения около 85°). И тот, и другой прием приводят к уменьшению нагревания и к подавлению термоэлектронной эмиссии. В этих условиях фотоэлектроны были надежно зарегистрированы далеко за красной границей (вплоть до пятикратного уменьшения частоты света в сравнении с граничной частотой, определяемой работой выхода).

Законы многофотонного, или нелинейного, фотоэффекта имеют много общего с законами линейного (однофотонного) фотоэффекта, рассмотренного выше. Пусть частота света лежит в пределах

$$\frac{P}{N} < h\nu < \frac{P}{N-1},$$

так что для выхода фотоэлектрона необходимо поглощение им не менее N фотонов. При этом условии, как показывает исследование распределения фотоэлектронов по скоростям, выполняется соотношение

$$\frac{mw_m^2}{2} + P = Nh\nu,$$

вполне аналогичное уравнению Эйнштейна (177.1) и означающее, что фотоэлектрон действительно приобрел энергию N фотонов. Число фотоэлектронов, характеризуемое величиной тока насыщения, оказалось пропорциональным интенсивности света, возведенной в степень N. Изменения поляризации света и угла падения (см. рис. 32.9) позволили выяснить, что нелинейный фотоэффект обусловливается исключительно слагающей напряженности электрического поля, перпендикулярной к поверхности катода.

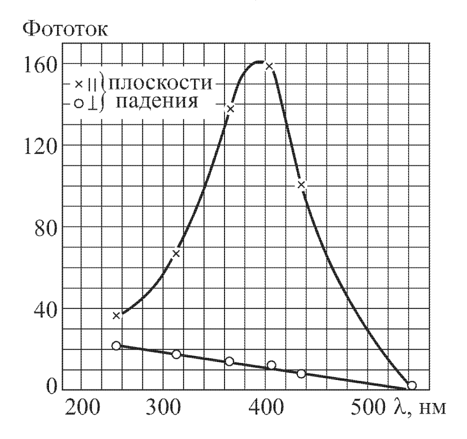


Рис. 32.11. Зависимость фотоэффекта от длины волны для двух различных направлений колебания

Перечисленные свойства нелинейного фотоэффекта установлены при использовании фотокатодов из различных материалов (натрий, золото, серебро и др., а также полупроводники), для различных значений $N = 2, 3, 4$ и 5, в широком интервале изменения интенсивности света (от 0,1 до 10^3 МВт/см^2). При значении потока, примерно равном 10^4 МВт/см^2, по-видимому, имеет место еще одно нелинейное явление, аналогичное автоэлектронной (или холодной) эмиссии: электрическое поле волны изменяет потенциальный барьер на поверхности металла, и электрон получает возможность «просочиться» через барьер, не приобретая энергии выхода. Такое «просачивание» легко понять, если вспомнить о волновых свойствах электрона и принять во внимание, что прохождение электрона через потенциальный барьер аналогично проникновению электромагнитной волны через тонкий слой оптически плотного вещества при угле падения, большем критического угла полного отражения (см. гл. XXIV).

§ 180. Внутренний фотоэффект

В предыдущем параграфе говорилось об освобождении электронов из освещаемой поверхности вещества и переходе их в другую среду, в частности в вакуум. Такое испускание электронов называют *фотоэлектронной эмиссией*, а само явление *внешним фотоэффектом.* Наряду с ним известен также и широко используется в практических целях так называемый *внутренний фотоэффект*, при котором, в отличие от внешнего, оптически возбужденные электроны остаются внутри освещенного тела, не нарушая нейтральности последнего. При этом в веществе изменяется концентрация носителей заряда или их подвижность, что приводит к изменению электрических свойств вещества под действием падающего на него света. Внутренний фотоэффект присущ только полупроводникам и диэлектрикам. Его можно обнаружить, в частности, по изменению проводимости однородных полупроводников при их освещении. На основе этого явления — *фотопроводимости* создана и постоянно совершенствуется большая группа приемников света — *фоторезисторов.* Для них используется в основном селенид и сульфид кадмия.

В неоднородных полупроводниках наряду с изменением проводимости наблюдается также образование разности потенциалов (фото-ЭДС). Это явление (фотогальванический эффект) обусловлено тем, что в силу односторонней проводимости полупроводников происходит пространственное разделение внутри объема проводника оптически возбужденных электронов, несущих отрицательный заряд и микрозон (дырок), возникающих в непосредственной близости от атомов, от которых оторвались электроны, и подобно частицам несущих положительный элементарный заряд. Электроны и дырки концентрируются на разных концах полупроводника, вследствие чего и возникает электродвижущая сила, благодаря которой и вырабатывается без приложения внешней ЭДС электрический ток в нагрузке, подключенной параллельно освещенному полупроводнику. Таким образом достигается прямое преобразование световой энергии в электрическую. Именно по этой причине фотогальванические приемники света и используются не только для регистрации световых сигналов, но и в электрических цепях как источники электрической энергии.

Основные промышленно выпускаемые типы таких приемников работают на основе селена и сернистого серебра. Весьма распространен также кремний, германий и ряд соединений — GaAs, InSb, CdTe и другие. Фотогальванические элементы, используемые для преобразования солнечной энергии в электрическую, приобрели особенно широкое применение в космических исследованиях как источники бортового питания. Они обладают относительно высоким коэффициентом полезного действия (до 20 %), весьма удобны в условиях автономного полета космического корабля. В современных солнечных элементах в зависимости от полупроводникового материала фото-ЭДС достигает 1–2 В, съем тока с 1 см^2 — нескольких десятков миллиампер, а на 1 кг массы выходная мощность достигает сотен ватт.

§ 181. Фотоэлементы и их применения

В настоящее время на основе внешнего и внутреннего фотоэффекта строится бесчисленное множество приемников излучения, преобразующих световой сигнал в электрический и объединенных общим названием — *фотоэлементы*. Они находят весьма широкое применение в технике и в научных исследованиях. Самые разные объективные оптические измерения немыслимы в наше время без применения того или иного типа фотоэлементов. Современная фотометрия, спектрометрия и спектрофотометрия в широчайшей области спектра, спектральный анализ вещества, объективное измерение весьма слабых световых потоков, наблюдаемых, например, при изучении спектров комбинационного рассеяния света, в астрофизике, биологии и т.д. трудно представить себе без применения фотоэлементов; регистрация инфракрасных спектров часто осуществляется специальными фотоэлементами для длинноволновой области спектра. Необычайно широко используются фотоэлементы в технике: контроль и управление производственными процессами, разнообразные системы связи от передачи изображения и телевидения до оптической связи на лазерах и космической техники представляют собой далеко не полный перечень областей применения фотоэлементов для решения разнообразнейших технических вопросов в современной промышленности и связи.

История создания фотоэлементов насчитывает уже более 100 лет. Первый фотоэлемент, основанный на внутреннем фотоэффекте и использующий явление фотопроводимости, был построен в 1875 г., первый же вакуумный фотоэлемент, основанный на внешнем фотоэффекте, был построен в 1889 г. Промышленное производство вакуумных фотоэлементов в Советском Союзе было организовано П.В. Тимофеевым в 1930 г. Интересно отметить, что фотоэлементы, использующие внешний фотоэффект, раньше приобрели широкое развитие, хотя внутренний фотоэффект был открыт по крайней мере на 50 лет раньше. Только в сороковых годах нашего столетия благодаря бурному развитию физики полупроводников и детальному изучению внутреннего фотоэффекта началось создание новых фотоэлементов на основе полупроводниковых материалов.

Огромное разнообразие задач, решаемых с помощью фотоэлементов, вызвало к жизни чрезвычайно большое разнообразие типов фотоэлементов с различными техническими характеристиками. Выбор оптимального типа фотоэлементов для решения каждой конкретной задачи основывается на знании этих характеристик. Для фотоэлементов с внешним фотоэффектом (вакуумных фотоэлементов) необходимо знание следующих характеристик: рабочая область спектра; относительная характеристика спектральной чувствительности (она строится как зависимость от длины волны падающего света безразмерной величины отношения спектральной чувствительности при монохроматическом освещении к чувствительности в максимуме этой характеристики); интегральная чувствительность (она определяется при освещении фотоэлемента стандартным источником света); величина квантового выхода (процентное отношение числа эмиттированных фотоэлектронов к числу падающих на фотокатод фотонов); инер-

ционность (для вакуумных фотоэлементов она определяется обычно через время пролета электронов от фотокатода к аноду). Важным параметром служит также темновой ток фотоэлемента, который складывается из термоэмиссии фотокатода при комнатной температуре и тока утечки.

В зависимости от материала фотокатода и материала колбы фотоэлемента их можно применять в диапазоне 0,2–1,1 мкм. Их интегральная чувствительность лежит в пределах 20–100 мкА на 1 лм светового потока, а термоэмиссия — в пределах 10^{-11}–10^{-16} А/см^2. Очень важным достоинством вакуумных фотоэлементов является их высокое постоянство и линейность связи светового потока с фототоком. Поэтому они длительное время преимущественно использовались в объективной фотометрии, спектрометрии, спектрофотометрии и спектральном анализе в видимой и ультрафиолетовой областях спектра. Главным недостатком вакуумных фотоэлементов при световых измерениях следует считать малость электрических сигналов, вырабатываемых этими приемниками света. Последний недостаток полностью устраняется в фотоэлектронных умножителях (ФЭУ), представляющих как бы развитие фотоэлементов. ФЭУ были впервые построены в 1934 г.

Принцип действия ФЭУ можно проследить на рис. 32.12. Фотоэлектроны, эмиттируемые с фотокатода *ФК* под действием электрического поля, ускоряются и попадают на первый промежуточный

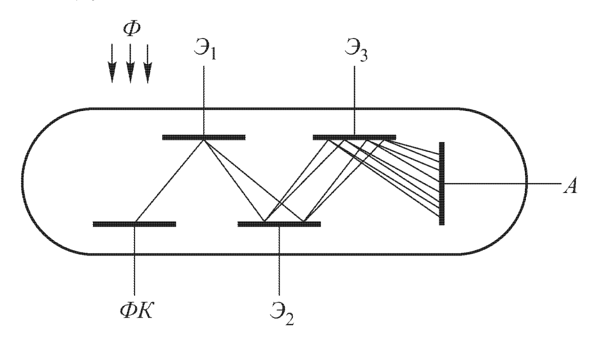


Рис. 32.12. Схема устройства фотоумножителя

электрод $Э_1$. Падая на него, фотоэлектроны вызывают эмиссию вторичных электронов, причем в определенных условиях эта вторичная эмиссия может в несколько раз превышать первоначальный поток фотоэлектронов. Конфигурация электродов такова, что большинство фотоэлектронов попадает на электрод $Э_1$, а большинство вторичных электронов попадает на следующий электрод $Э_2$, где процесс умножения повторяется, и т.д. Вторичные электроны с последнего из электродов (динодов), а их бывает до 10–15, собираются на анод. Общий коэффициент усиления таких систем достигает 10^7–10^8, а интегральная чувствительность ФЭУ достигает тысяч ампер на люмен. Это, конечно, не означает возможности получения больших токов, а свидетельствует лишь о возможности измерения малых световых потоков.

Очевидно, те же технические характеристики, что и у вакуумных фотоэлементов, а также коэффициент усиления и его зависимость от питающего напряжения полностью характеризуют ФЭУ. В настоящее время последние повсеместно вытесняют вакуумные фотоэлементы. К недостаткам ФЭУ следует отнести необходимость применения источника высоковольтного и стабилизированного питания, несколько худшую стабильность чувствительности и бо́льшие шумы. Однако путем применения охлаждения фотокатодов и измерения не выходного тока, а числа импульсов, из которых каждый соответствует одному фотоэлектрону, эти недостатки могут быть в значительной степени подавлены.

Большим преимуществом всех приемников света, использующих внешний фотоэффект, является то обстоятельство, что их фототок не изменяется при изменении нагрузки. Это означает, что при малых значениях фототока можно применить практически сколь угодно большое сопротивление нагрузки и тем самым достичь значения падения напряжения на нем, достаточно удобного для регистрации и усиления. С другой стороны, заменяя сопротивление на емкость, можно, измеряя напряжение на этой емкости, получать величину, пропорциональную усредненной величине светового потока за заданный интервал времени. Последнее чрезвычайно важно в тех случаях, когда необходимо измерить световой поток от нестабильного источника света — ситуация, типичная для спектроаналитических измерений.

Спектрометрия в инфракрасной области спектра не может производиться с помощью вакуумных фотоэлементов и ФЭУ по той причине, что современные фотокатоды имеют красную границу не выше 1100 нм. Однако уже сейчас известны материалы, позволяющие продвинуться до 3–4 мкм. Поэтому в инфракрасной области применяются фотоэлементы, работающие на основе внутреннего фотоэффекта. Сюда следует отнести неохлаждаемые фоторезисторы на основе InSb, PbSe и PbS, которые могут быть использованы до 6 мкм, и глубоко охлаждаемые фоторезисторы на основе германия, легированного золотом, цинком, медью и другими металлами, пригодные до 40 мкм.

Для измерения в более длинноволновой области спектра применяются тепловые приемники; последние либо изменяют свою проводимость, либо на них создается ЭДС при нагревании падающим излучением.

Полупроводниковые фотоэлементы характеризуются не строгой линейностью зависимости величины электрического сигнала от освещения. Этот недостаток, равно как и непостоянство чувствительности фотоэлемента, нестабильность его питания, а также дрейф усиления измерительной схемы, устраняется применением двухлучевой системы, в которой измеряется не абсолютное значение интенсивности света, прошедшего через поглощающее вещество, а ее отношение к интенсивности света просвечивающего источника.

В чрезвычайно большом числе случаев применения фотоэлементов не предъявляются строгие требования к их измерительным свойствам. Поэтому фотоэлементы, работающие на основе внутреннего фотоэффекта, в силу их малых габаритов, низких напряжений питания и ряда конструктивных достоинств повсеместно применяются

для автоматических систем, систем управления, преобразования солнечной энергии, контроля производства и т.д., за исключением тех случаев, когда относительно невысокие инерционные свойства этих фотоэлементов препятствуют их использованию.

Глава XXXIII

ЯВЛЕНИЕ КОМПТОНА

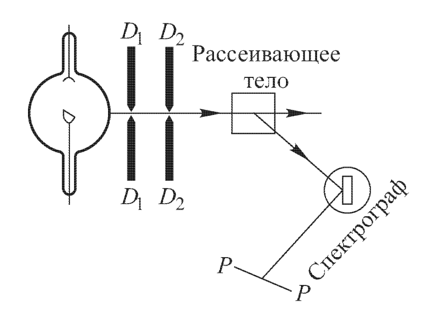
§ 182. Сущность явления Комптона и его законы

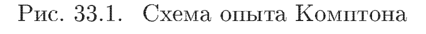
Исследование рассеяния рентгеновских лучей веществом привело в 1923 г. Комптона к открытию важного явления, значительно углубляющего наши представления о фотонах.

Явление Комптона состоит в изменении длины волны рентгеновских лучей, происходящем при рассеянии их легкими атомами. Впоследствии это явление было обнаружено и при рассеянии тяжелыми атомами, причем в последнем случае оно оказывается более сложным.

Рассеяние рентгеновских лучей с волновой точки зрения связано с вынужденными колебаниями электронов вещества, так что частота рассеянного света должна равняться частоте падающего. Тщательные измерения Комптона показали, однако, что наряду с излучением неизменной длины волны в рассеянном рентгеновском излучении появляется излучение несколько большей длины волны.

Схема опыта Комптона показана на рис. 33.1. Узкий пучок рентгеновских лучей, выделяемый диафрагмами D_1, D_2, рассеивается веществом с легкими атомами (уголь, парафин и т.д.). Рассеянный свет изучается на рентгеновском спектрографе фотографически или при помощи ионизационной камеры. Первичный пучок выбирается так,




Рис. 33.1. Схема опыта Комптона

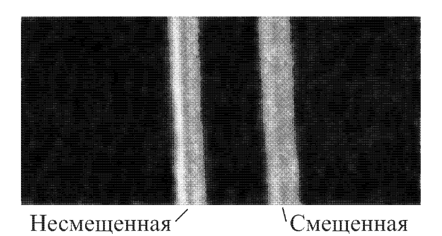


Рис. 33.2. Спектр рассеянных рентгеновских лучей

чтобы в нем содержалось монохроматическое рентгеновское излучение с длиной волны λ. Тогда в рассеянном излучении наряду с λ обнаруживается и бóльшая длина волны $\lambda' > \lambda$. Рисунок 33.2 дает представление о спектре рассеянных лучей.

Наблюдаемое изменение длины волны $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ не зависит от длины волны рассеиваемых рентгеновских лучей и от материала рассеивающего тела, но зависит от направления рассеяния. Если мы обозначим через θ угол между направлением первичного пучка и направлением рассеянного света, то зависимость от угла можно представить в виде

$$\Delta\lambda = 2k\sin^2\frac{\theta}{2}, \tag{182.1}$$

где $k = 0{,}0241$ Å — постоянная, найденная из опыта и показывающая величину изменения длины волны при рассеянии под прямым углом.

Необходимо отметить, что указанные законы справедливы для не очень жестких лучей и для веществ с малым атомным весом (например, водород, углерод, бор, алюминий), имеющих в своем составе электроны, относительно слабо связанные с ядром атома.

§ 183. Теория явления Комптона

Все перечисленные выше особенности явления Комптона можно истолковать, рассматривая его как процесс столкновения рентгеновских фотонов с атомами вещества.

То обстоятельство, что все легкие атомы ведут себя одинаково, позволяет предполагать, что процесс рассеяния сводится к столкновению *фотонов с электронами*. Действительно, в легких атомах связь электронов с ядром атома слаба, и под действием рентгеновских лучей электроны легко отделяются от атома. Поэтому можно в первом приближении рассматривать рассеяние *свободными электронами*.

Допустим, что столкновение фотона со свободным электроном происходит по закону упругого удара, при котором должно иметь место сохранение энергии и импульса сталкивающихся частиц. В результате столкновения электрон, который мы считаем покоящимся, приобретает известную скорость, и следовательно, соответствующую энергию и импульс; фотон же изменяет направление движения (рассеивается) и уменьшает свою энергию (уменьшается его частота, т.е. увеличивается длина волны).

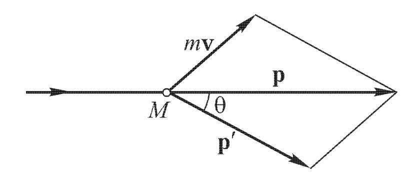


Рис. 33.3. К теории эффекта Комптона

Рисунок 33.3 изображает соотношение импульсов падающего фотона $\mathbf{p}$, рассеянного фотона $\mathbf{p}'$ и электрона после столкновения $m\mathbf{v}$. Удар должен удовлетворять условию сохранения импульса и условию сохранения энергии.

При составлении уравнения сохранения энергии надо принять во внимание зависимость массы электрона от скорости, ибо скорость электрона после рассеяния может быть значительна. В соответствии с этим кинетическая энергия электрона выразится как разность энергии электрона после и до рассеяния, т.е.

$$\mathscr{E}_{\text{кин}} = mc^2 - m_0c^2,$$

где m_0 — масса покоящегося электрона (ибо скорость электрона в рассеивающем теле мала), $m = m_0/\sqrt{1-\beta^2}$ — масса электрона, получившего в результате акта рассеяния значительную скорость v, а $\beta = v/c$ [1]).

Итак, условие сохранения энергии имеет вид

$$h\nu + m_0c^2 = h\nu' + mc^2, \tag{183.1}$$

а условие сохранения импульса на основании формулы (178.2) и рис. 33.3 запишется в виде

$$(mv)^2 = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu'}{c}\right)^2 - \frac{2h^2}{c^2}\,\nu\nu'\cos\theta. \tag{183.2}$$

Переписывая (183.1) в виде

$$m^2c^4 = h^2\nu^2 + h^2\nu'^2 - 2h^2\nu\nu' + m_0^2c^4 + 2hm_0c^2(\nu-\nu')$$

и вычитая из него (183.2), предварительно приведя все члены этого равенства к общему знаменателю, получим

$$m^2c^2(c^2-v^2) = m_0^2c^4 - 2h^2\nu\nu'(1-\cos\theta) + 2hm_0c^2(\nu-\nu').$$

Так как $m_0^2c^4 = m^2c^2(c^2-v^2)$, имеем

$$h\nu\nu'(1-\cos\theta) = m_0c^2(\nu-\nu').$$

Вводя вместо частоты длину волны, т.е. используя соотношения $\nu = c/\lambda$ и $\nu' = c/\lambda'$, а также обозначая $(\nu-\nu') = \Delta\nu$ и $(\lambda'-\lambda) = \Delta\lambda$, найдем

$$\frac{hc^2}{\lambda\lambda'}\,(1-\cos\theta) = m_0c^2\frac{c\Delta\lambda}{\lambda\lambda'}\,,$$

или окончательно

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0c}\,(1-\cos\theta) = \frac{2h}{m_0c}\,\sin^2\frac{\theta}{2}\,. \tag{183.3}$$

Формула (183.3) совпадает с экспериментальной формулой (182.1), определяющей закон явления. В самом деле, подставляя числовые значения h, m_0 и c, найдем $h/m_0c = 0{,}02426$ Å в соответствии с наблюдениями. Приводимая ниже таблица показывает, насколько хорошо экспериментальные данные согласуются с теорией.

---

[1]) $\mathscr{E}_{\text{кин}} = mc^2 - m_0c^2 = \dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - m_0c^2 = m_0c^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) = m_0c^2[(1/2)\,\beta^2 + (3/8)\,\beta^4 + \ldots]$. Если β достаточно мало по сравнению с единицей, так что можно пренебречь членами β^4 и выше, то формула принимает вид

$$\mathscr{E}_{\text{кин}} = \frac{m_0c^2\beta^2}{2} = \frac{m_0v^2}{2}\,,$$

т.е. переходит в обычное выражение классической нерелятивистской механики.

θ	$\Delta\lambda$ (выч.)	$\Delta\lambda$ (изм.)	λ_0, Å	Вещество
72°	0,0168	0,0170	0,708	Графит
90°	0,0243	0,0241	0,708	Графит
110°	0,0345	0,0350		
160°	0,0469	0,0470		
170°	0,0480	0,0482	0,708	Парафин

В первоначальной теории предполагалось, что электроны в веществе свободны. В действительности же надо принять во внимание, что электрон связан с атомом, и в балансе энергии учитывать работу, затраченную на отрыв электрона от атома, с одной стороны, и энергию, идущую на сообщение движения самому атому, с другой стороны. Учет этих обстоятельств объясняет ряд деталей в явлении Комптона, в первую очередь наличие несмещенной линии (если электрон не будет оторван от атома), а также соотношение интенсивностей смещенной и несмещенной линий. В таком более общем случае выступает уже и зависимость от длины первичной волны, равно как и влияние материала рассеивающего тела. Сравнение с опытом подтверждает эту более полную теорию.

Явление изменения длины волны при рассеянии света можно было бы объяснить с волновой точки зрения при помощи явления Доплера: электроны, рассеивающие рентгеновские лучи, под действием их выбрасываются из атомов по различным направлениям с разными скоростями. Таким образом, рассеянное излучение должно иметь измененную длину волны в зависимости от скорости и направления движения рассеивающих электронов. Вычислив, как должны были бы двигаться рассеивающие электроны, нетрудно получить классическую картину явления Комптона.

Движение электронов, получивших заметные скорости в результате рассеяния рентгеновских лучей, удается наблюдать непосредственно на опыте. Для этой цели были произведены исследования с помощью *камеры Вильсона*, которая позволяет судить и о направлении рассеянных лучей и о направлении движения электронов, выбитых при рассеянии рентгеновских лучей (электроны «отдачи»). И на пути электронов, и на пути рассеянного рентгеновского света появляются ионы, на которых конденсируется водяной пар, что делает видимым эти пути.

Как уже указано, можно рассчитать взаимные направления электронов и рассеянных лучей, необходимые для классического объяснения явления Комптона при помощи эффекта Доплера. С другой стороны, можно вычислить это распределение направлений электронов и фотонов по теории упругих столкновений. Эти две точки зрения приводят к разным результатам. Упомянутые опыты свидетельствуют в пользу квантовой теории явления, так что объяснение его с помощью эффекта Доплера следует признать неудовлетворительным. Таким образом, явление Комптона, подобно основным законам фотоэффекта, говорит в пользу представления о фотонах.

§ 184. Эффект Доплера и гипотеза световых квантов

Совокупность сведений о фотоэффекте видимых и рентгеновских лучей, равно как и данные о явлении Комптона, убедительно свидетельствуют в пользу гипотезы фотонов. Для характеристики ее плодотворности представляется интересным рассмотреть некоторые явления, допускающие трактовку как с волновой точки зрения, так и с точки зрения теории фотонов.

К числу таких явлений можно отнести эффект Доплера, который был впервые объяснен на основе волновой теории и с этой точки зрения уже был рассмотрен в гл. XXI. Эффект Доплера — типичное волновое явление, и истолкование его на основе теории фотонов представляется на первый взгляд затруднительным. Однако удается показать возможность такой интерпретации путем рассуждений, очень близких к рассуждениям, служащим для объяснения явления Комптона. Для простоты ограничимся столь малыми скоростями движения источника v, при которых можно пренебречь членами второго порядка относительно v/c. Тогда по принципу Доплера изменение частоты излучаемого источником света выразится формулой

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{v}{c}\cos\theta, \tag{184.1}$$

где θ — угол между направлением движения и направлением, по которому ведется наблюдение света.

Пусть источник света массы M движется со скоростью $\mathbf{v}_1$, т.е. обладает импульсом $M\mathbf{v}_1$. Испущенному фотону сообщается импульс $\mathbf{p}'$, причем $|\mathbf{p}'| = h\nu'/c$. В соответствии с этим должны измениться скорость источника и его импульс, причем последний становится равным $M\mathbf{v}_2$. Так как импульс фотона крайне мал по сравнению с импульсом источника, то изменение этого последнего будет также крайне незначительным. Рисунок 33.4 показывает расположение этих векторов. Изменение скорости источника и, следовательно, изменение его кинетической энергии $\Delta\mathscr{E}$ должно сопровождаться передачей этой энергии фотону или заимствованием ее от фотона, в зависимости от взаимного расположения направления излучения и направления движения, составляющих между собой угол θ. Таким образом, энергия фотона изменится на $\Delta\mathscr{E}$ и вместо $h\nu$, соответствующей излучению покоящегося источника, станет равной $h\nu' = h\nu + \Delta\mathscr{E}$. Вычисление $\Delta\mathscr{E}$ не составляет труда:

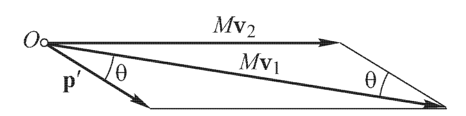


Рис. 33.4. К фотонной теории эффекта Доплера

$$\Delta\mathscr{E} = \frac{1}{2}M(\mathbf{v}_1)^2 - \frac{1}{2}M(\mathbf{v}_2)^2 = \frac{1}{2}M(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2). \tag{184.2}$$

В соответствии с законом сохранения импульса имеем

$$M\mathbf{v}_1 - M\mathbf{v}_2 = \mathbf{p}', \quad |\mathbf{p}'| = \frac{h\nu'}{c}, \tag{184.3}$$

где $\mathbf{p}'$ — импульс испущенного фотона. Подставив изменение скорости атома, определяемое соотношением (184.3), в выражение (184.2), получим

$$\Delta\mathscr{E} = \mathbf{p}'\mathbf{v}_1 - \frac{p'^2}{2M} = h\nu'\,\frac{v_1}{c}\,\cos\theta - \frac{(h\nu')^2}{2Mc^2}\,. \tag{184.4}$$

Таким образом, энергия фотона, излученного движущимся источником, равна

$$h\nu' = h\nu + \Delta\mathscr{E} = h\nu + h\nu'\frac{v_1}{c}\,\cos\theta - \frac{(h\nu')^2}{2Mc^2}\,. \tag{184.5}$$

Полученное соотношение представляет собой квадратное уравнение относительно ν', которое можно легко решить. Однако второй и третий члены в правой части (184.5) оказываются малыми поправками к первому члену. Поэтому приближенно можно считать $\nu = \nu'$ в указанных членах. Итак,

$$\nu' = \nu + \nu\,\frac{v_1}{c}\,\cos\theta - \frac{h\nu}{2Mc^2}\,\nu,$$

т.е. относительное изменение частоты, обусловленное движением атома, равно

$$\frac{\nu'-\nu}{\nu} = \frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{v_1}{c}\,\cos\theta - \frac{h\nu}{2Mc^2}\,. \tag{184.6}$$

Первый член в правой части равенства (184.6) совпадает с относительным изменением частоты, получаемым с помощью волновых представлений и принципа Доплера (ср. (184.1)). Второй член имеет сугубо квантовое происхождение (с формальной точки зрения об этом свидетельствует присутствие в нем постоянной Планка h). Этот член отражает тот факт, что атом, покоившийся до испускания фотона ($v_1 = 0$), с необходимостью придет в движение после того, как фотон будет излучен: фотон «уносит» импульс $\mathbf{p}'$, и атом должен приобрести импульс, обратный по знаку и равный по модулю (см. (184.3) при $v_1 = 0$). Это движение вполне аналогично движению, приобретаемому лодкой, из которой выпрыгнул пассажир. Поэтому сдвиг частоты, равный $-h\nu/(2Mc^2)$, получил название *сдвига* из-за *эффекта отдачи.*

Если рассматривать не процесс испускания, а процесс поглощения фотона атомом, то с помощью законов сохранения энергии и импульса можно получить, взамен (184.6), следующее соотношение:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{v_1}{c}\,\cos\theta + \frac{h\nu}{2Mc^2}\,, \tag{184.7}$$

т.е. изменение частоты при поглощении имеет обратный знак в сравнении со случаем испускания.

До сих пор мы рассматривали элементарный акт излучения или поглощения фотона одиночным атомом. Если речь идет о спектре испускания или поглощения ансамблем атомов, например, атомным газом, то «обычный» доплеровский сдвиг $(v_1/c)\cos\theta$ и сдвиг из-за эффекта отдачи $h\nu/(2Mc^2)$ приводят к разным явлениям. В газе присутствуют атомы, обладающие различными скоростями и движущиеся в различных направлениях. Поэтому член $(v_1/c)\cos\theta$, зависящий

от проекции скорости $\mathbf{v}_1$ на направление наблюдения (т.е. направление $\mathbf{p}'$), приведет к уширению линии излучения (поглощения) газом в целом. В § 22 эта полуширина была вычислена, и она оказалась равной

$$\delta\nu = \frac{\bar{v}}{c}\ \nu = \frac{\bar{v}}{\lambda}, \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{2kT}{M}}, \tag{184.8}$$

где T — температура газа, k — постоянная Больцмана. Сдвиг из-за эффекта отдачи не зависит от скорости атома, т.е. он одинаков для всех атомов; следовательно, он проявится в смещении положения максимума линии, уширенной вследствие теплового движения атомов, на величину $h\nu^2/(2Mc^2)$, равную

$$\frac{h\nu^2}{2Mc^2} = \frac{h}{2M}\ \frac{1}{\lambda^2}. \tag{184.9}$$

Оценим отношение сдвига линий (184.9) к ее ширине (184.8). Подставив числовые значения универсальных постоянных, найдем

$$\frac{h/(2M\lambda^2)}{\bar{v}/\lambda} = \frac{h}{2M\lambda\bar{v}} = \frac{h}{2\lambda\sqrt{2rTM}} = 1{,}55\cdot 10^{-8}\frac{1}{\lambda\sqrt{TA}},$$

где A — атомный вес, а длина волны λ выражена в сантиметрах. Таким образом, даже для низких температур и легких атомов сдвиг линии из-за отдачи меньше ее ширины вплоть до длин волн порядка 10^{-9} см, т.е. во всей рентгеновской области спектра. В более коротковолновой области ($\lambda < 10^{-2}$ нм, γ-лучи) положение обратное, — сдвиг линии оказывается больше ее ширины. Поскольку сдвиги линий испускания и поглощения имеют противоположные знаки, то возникла парадоксальная ситуация, — фотон, испущенный каким-либо атомом, не может поглотиться в газе, состоящем из таких же атомов.

По указанной причине длительное время экспериментально не обнаруживалось резонансное поглощение γ-квантов в газах. Однако в кристаллах оно было открыто Мёссбауэром в 1958 г. Дело в том, что атом, входящий в состав кристалла, жестко связан со всеми атомами макроскопического объема вещества, и импульс поглощаемого фотона передается не одиночному атому, а всему кристаллу в целом. Вследствие огромной (в атомных масштабах) массы кристалла импульс отдачи пренебрежимо мал, и линии испускания и поглощения практически не смещены друг относительно друга.

В оптической области спектра эффект отдачи приводит к очень малому сдвигу линии. Тем не менее он может при определенных условиях проявляться в спектральных свойствах излучения оптических квантовых генераторов, и в 1975 г. эти проявления были обнаружены на опыте.

Таким образом, квантовая теория излучения не только приводит к выводам, следующим из волновой теории, но и дополняет их новым предсказанием, нашедшим блестящее экспериментальное подтверждение.

Глава XXXIV

ДАВЛЕНИЕ СВЕТА

§ 185. Экспериментальное изучение давления света

Среди различных действий света на вещество давление света играет весьма видную роль. Оно имело большое значение в развитии электромагнитной теории света, оно представляет значительный интерес с общефилософской точки зрения на природу света и имеет важные космические применения.

Идея, согласно которой свет должен давить на освещаемые им тела, была высказана еще Кеплером, который видел в ней объяснение формы кометных хвостов. Идея о световом давлении подсказывалась ньютоновой теорией истечения: световые частицы, ударяясь об отражающие или поглощающие их тела, должны были бы передавать им часть своего импульса, т.е. производить давление.

Теория и эксперимент в этом вопросе пережили длинную историю. В экспериментальном отношении имелись и совсем наивные попытки, и попытки серьезного характера, вроде тех, которые привели Крукса к открытию особого вида явлений (*радиометрических*), связанных с кинетикой разреженных газов. Франклин рассматривал неудачи всех известных к его времени попыток обнаружить давление света как один из аргументов против корпускулярной теории света. Впоследствии Юнг также прибегал к этому аргументу, хотя ни Франклин, ни Юнг не имели возможности указать минимальную величину предполагаемого давления, поскольку относительно массы световых частиц нельзя было высказать никакого суждения и, следовательно, нельзя было судить, достаточна ли чувствительность крутильных весов, применявшихся для этих опытов.

Возражения Франклина, имевшие принципиальное значение, поскольку волновая теория света развивалась как теория упругая, потеряли свою силу в качестве аргумента против корпускулярных представлений, когда Максвелл вывел необходимость светового давления с точки зрения электромагнитной волновой теории и даже вычислил его величину.

Так как свет есть электромагнитная поперечная волна, то, падая на поверхность проводника (зеркального или поглощающего тела), он должен производить следующие действия: электрический вектор, лежащий в плоскости освещенной поверхности, вызывает ток в направлении этого вектора; магнитное поле световой волны действует на возникший ток по закону Ампера так, что направление действующей силы совпадает с направлением распространения света. Таким образом, пондеромоторное взаимодействие между светом и отражающим или поглощающим его телом приводит к возникновению давления на тело. Сила давления зависит от интенсивности света. Для случая, когда световые лучи образуют параллельный пучок, давление p по вычислению Максвелла равняется плотности световой энергии u, т.е. энергии в единице объема. При этом предполагается, что тело, на которое па-

дает свет, абсолютно черное, т.е. сполна поглощает всю падающую на него световую энергию. Если же коэффициент отражения тела не равен нулю, а имеет значение R, то давление $p = u(1 + R)$, так что для идеального зеркала ($R = 1$) имеем $p = 2u$. Если количество энергии, падающей нормально на 1 см^2 за 1 с (освещенность), обозначить через E, то плотность лучистой энергии будет равна E/c, где c — скорость света. Таким образом, световое давление можно представить в виде

$$p = \frac{E}{c}\,(1 + R). \tag{185.1}$$

Для силы, с которой солнечные лучи в яркий день давят на 1 м^2 черной поверхности, Максвелл получил величину 0,4 мГ. Если свет падает на стенку по всем направлениям внутри полости, то при плотности излучения u давление на черную поверхность будет $p = u/3$.

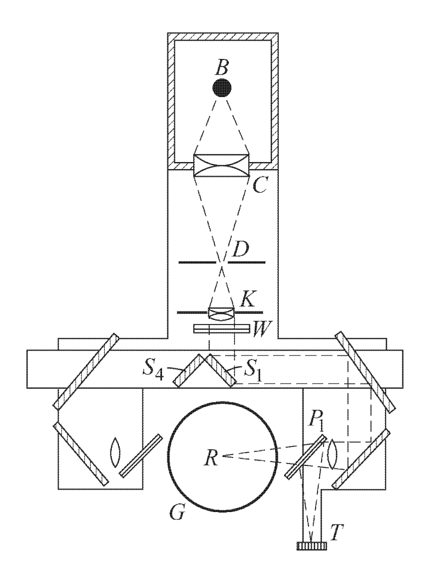


Рис. 34.1. Схема опытов П.Н. Лебедева по измерению давления света

Световое давление было обнаружено на опыте и впервые измерено П.Н. Лебедевым в Москве[1]) при помощи опытов, представлявших для своего времени образец экспериментального искусства.

Прибор Лебедева состоял из легкого подвеса на тонкой нити, по краям которого были прикреплены тонкие и легкие крылышки, одно из которых было зачернено, а другое оставлено блестящим. Подвес R помещался в откачанном сосуде G (рис. 34.1), образуя весьма чувствительные крутильные весы. Свет от дуговой лампы B концентрировался при помощи системы линз и зеркал на одном из крылышек и вызывал закручивание подвеса R, которое наблюдалось при помощи трубы и зеркальца, прикрепленного к нити (не показанных на рисунке). Передвигая двойное зеркало S_1S_4, можно было направлять свет от дуги B на переднюю или на заднюю поверхность крылышка и таким образом менять направление закручивания. Пластинка P_1 позволяла направлять определенную часть пучка на термоэлемент T, который служил для измерения величины падающей энергии. Опыты были проведены с подвесами различной формы (рис. 34.2).

[1]) Предварительное сообщение о своих работах П.Н. Лебедев сделал в 1899 г. на съезде в Швейцарии, подробный доклад — на конгрессе в Париже в 1900 г. (см. П.Н. Лебедев. Избранные сочинения.– М.: Гостехиздат, 1949, с. 154, 155).

Главной трудностью в опытах Лебедева является действие конвекционных потоков газа и наличие радиометрического действия. Эти помехи могут быть в сотни тысяч раз больше светового давления.

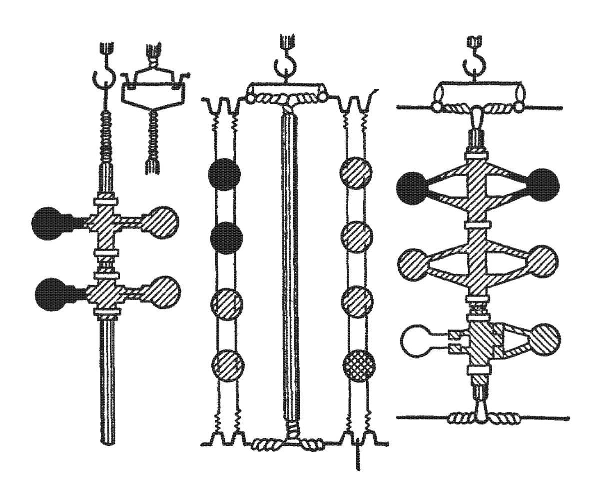


Рис. 34.2. Различные системы крепления крылышек в приборе П.Н. Лебедева

Конвекционные потоки закручивают подвес при несколько наклонном положении крылышка. Так как действие это не зависит от направления падающего светового потока, то Лебедев изучал и исключал его с помощью изменения направления освещения (подвижное зеркало S_1S_4).

Радиометрические действия возникают в разреженном газе вследствие разности температур освещенной и неосвещенной сторон крылышка. Молекулы газа, остающиеся в баллоне, отражаются от более теплой стороны с большей скоростью, и вследствие отдачи крылышки стремятся повернуться в том же направлении, что и под действием светового давления. Радиометрическое действие уменьшается, если применять очень тонкие металлические крылышки для уменьшения разности температур и увеличить разрежение газа в баллоне. Когда свет направлен на блестящее крылышко, то световое давление должно быть приблизительно в два раза больше, чем при воздействии света на зачерненное крылышко. Наоборот, радиометрическое действие больше при освещении черного крылышка, ибо при этом больше нагревание последнего. В опыте Лебедева действительно наблюдалось примерно вдвое большее действие на зеркальное крылышко, чем на черное, что доказывает практическое исключение радиометрического действия.

Измерения Лебедева дали величину, согласующуюся с теорией Максвелла (с точностью до 20 %). Много лет спустя (1923 г.) Герлах повторил опыты Лебедева, пользуясь современными более совер-

шенными методами получения вакуума. Благодаря этому не только значительно облегчилось выполнение опытов, но и удалось получить лучшее (до 2%) совпадение с теоретическими величинами.

Лебедев экспериментально решил также и другую несравненно более трудную задачу, обнаружив и измерив давление света на газы (1909 г.) [1]).

§ 186. Давление света в рамках теории фотонов

В рамках фотонной теории световое давление следует интерпретировать как результат передачи импульса фотонов поглощающей или отражающей стенке. Поток монохроматического света частоты ν, падающий нормально на стенку и приносящий за 1 с на 1 см^2 энергию, равную E, содержит N фотонов, где N определяется из условия

$$Nh\nu = E,$$

т.е. $N = E/h\nu$. Так как каждый фотон обладает импульсом $h\nu/c$, то он сообщает поглощающей стенке импульс $h\nu/c$, а отражающей стенке импульс $2h\nu/c$ (ибо при отражении импульс фотона изменяется от $+h\nu/c$ до $-h\nu/c$, т.е. на $2h\nu/c$).

Итак, импульс, сообщаемый 1 см^2 абсолютно поглощающей стенки за 1 с, равен

$$\frac{Nh\nu}{c} = \frac{E}{c}.$$

Но импульс, сообщаемый 1 см^2 поверхности за 1 с, и есть давление на эту поверхность. Итак, давление на поглощающую стенку равно $p = E/c$, а на полностью отражающую $p = 2E/c$. В общем случае, когда коэффициент отражения равен R, из полного числа N фотонов, падающих за 1 с, поглощается $(1 - R)N$ и отражается RN фотонов. Сообщаемый ими единице поверхности импульс равен

$$(1-R)N\frac{h\nu}{c} + RN\cdot 2\frac{h\nu}{c} = N\frac{h\nu}{c}\,(1+R) = \frac{E}{c}\,(1+R)$$

в согласии с формулой Максвелла.

Как бы ни было истолковано явление светового давления в рамках корпускулярной или волновой теорий, сам факт его экспериментально установленного существования имеет большое значение. Этот факт доказывает наличие у света не только энергии, но и импульса, с несомненностью свидетельствуя о материальности света, о том, что свет наряду с веществом является одной из форм материи.

§ 187. Роль светового давления в некоторых космических явлениях

Как уже упоминалось, световое давление позволило объяснить ряд явлений, происходящих во Вселенной.

[1]) Хороший обзор работ П.Н. Лебедева по световому давлению составлен В.А. Фабрикантом (УФН. 1950. Т. 42, вып. 2).

Образование кометных хвостов, развивающихся по мере приближения кометы к Солнцу и располагающихся в направлении от Солнца, заставило еще Кеплера высказать предположение, что кометные хвосты представляют собой поток частиц, отбрасываемых действием давления света прочь от Солнца, когда комета подходит к нему достаточно близко. Расчеты и особенно экспериментальные исследования Лебедева подкрепили такое предположение. По этим данным можно оценить, что частицы *достаточно малых размеров* будут испытывать более сильное отталкивание вследствие излучения Солнца, чем притяжение массой Солнца, ибо с уменьшением радиуса частицы притяжение уменьшается пропорционально кубу радиуса (массе), а отталкивание падает как *квадрат* радиуса (поверхность). Для частиц подходящего размера преобладание отталкивания над притяжением (или наоборот) будет иметь место на любом расстоянии от Солнца, ибо как плотность излучения, так и гравитационное действие одинаково изменяются с расстоянием ($1/r^2$). То обстоятельство, что кометные хвосты начинают развиваться только *вблизи* Солнца, можно было бы объяснить тем, что лишь вблизи Солнца образуются в результате испарения частицы достаточно малых размеров. Впрочем, в последнее время выяснилось, что образование кометных хвостов представляет весьма сложный процесс, и световое давление, по-видимому, не объясняет всего разнообразия явлений.

Сравнительно недавно было показано, что световое давление играет важную роль в вопросе о предельном размере звезд. Из астрономических данных известно, что звезды, массы которых превосходят известный максимум, не наблюдаются. Эддингтон обратил внимание на то, что увеличению размеров звезды должно препятствовать следующее обстоятельство. С увеличением массы звезды и ростом тяготения ее наружных слоев к центру повышается работа сжатия внутренних слоев звезды и растет соответственно температура этих слоев, достигая миллионов градусов. Однако повышение температуры означает повышение плотности лучистой энергии внутри звезды, а следовательно, и величины светового давления. Согласно вычислениям равновесие между силой притяжения, с одной стороны, и силами отталкивания, обусловленными световым давлением, — с другой, приводит к некоторому предельному значению для массы звезды: звезды большей массы неустойчивы и должны были бы распасться. Действительно, верхний предел массы звезд, вычисленный на основе этих соображений, согласуется, по-видимому, с результатами астрофизических наблюдений.

Глава XXXV

ХИМИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ СВЕТА

§ 188. Введение

Химические превращения под действием света были замечены очень давно и уже с конца XVIII века сделались объектом систематического научного исследования.

Фотохимические превращения весьма разнообразны. Может происходить *полимеризация* вещества, т.е. образование молекул, представляющих комплекс молекул или атомов исходного продукта; таково, по-видимому, явление образования красного фосфора из желтого. Красная модификация фосфора сильно отличается от желтой по ряду химических и физических свойств и может быть получена из нее путем длительного освещения (лучше коротковолновым светом); полимеризации фосфора можно достичь и без действия света, например путем значительного нагревания или в результате некоторых химических реакций.

Под действием света наблюдается разложение сложных молекул на составные части, например, разложение аммиака NH_3 на азот и водород или бромистого серебра $AgBr$ на серебро и бром. Происходит также и образование сложных молекул, например известная реакция образования хлористого водорода при освещении смеси хлора и водорода, протекающая настолько бурно, что сопровождается взрывом.

Многие из фотохимических реакций играют весьма важную роль в природе и технике. Наибольшую важность представляет, несомненно, фотохимическое разложение углекислоты, происходящее под действием света в зеленых частях растений. Эта реакция имеет огромное значение, ибо она обеспечивает круговорот углерода, без которого было бы невозможно длительное существование органической жизни на Земле. В результате жизнедеятельности животных и растений (дыхание) идет непрерывный процесс окисления углерода (образование CO_2). Обратные процессы восстановления углерода и превращения его в формы, усваиваемые организмом, являются *фотохимическими* процессами. Под влиянием света в высших растениях и одноклеточных организмах осуществляется восстановление углекислоты по схеме

$$2H_2O + CO_2 + mh\nu \rightarrow CH_2O + H_2O + O_2$$

с последующей полимеризацией муравьиного альдегида CH_2O, приводящей к образованию молекул вида $n\,(CH_2O) \rightarrow C_nH_{2n}O_n$ (углеводы). К углеводам принадлежит ряд сахаров, которые при дальнейших превращениях могут давать крахмал и другие важнейшие соединения, составляющие растительную ткань. Такого рода фотосинтез протекает в сложных молекулярных комплексах и состоит из нескольких последовательно происходящих процессов, пока еще не вполне выясненных. Первичным процессом, в котором принимает непосредственное участие свет (световая стадия фотосинтеза), служит поглощение фотона в пигментах (хлорофилл и др.). Энергия возбуждения мигрирует по молекулярной цепи (так называемые экситоны) и инициирует ряд химических реакций (темновая стадия фотосинтеза). Поскольку энергия восстановления CO_2 составляет около 110 ккал/моль (или 5 эВ на молекулу), для фотосинтеза одной молекулы CH_2O требуется не менее трех квантов с длиной волны 700 нм, отвечающей максимальному поглощению хлорофилла. Это обстоятельство с несомненностью свидетельствует о многоступенчатости процесса фотосинтеза. В действительности число поглощаемых фотонов еще больше и в некоторых случаях достигает восьми и более.

В ряде растений происходят иные фотохимические реакции. Например, для некоторых бактерий кислород является ядом, вместо воды используется сероводород по схеме

$$2H_2S + CO_2 + mh\nu \rightarrow CH_2O + H_2O + 2S,$$

и в результате выделяется муравьиный альдегид и сера. Большую роль в природе играет также фотохимическое восстановление азота.

Упомянутая уже выше фотохимическая реакция разложения бромистого серебра (и других его галоидных солей) лежит в основе фотографии и всех ее необозримых научных и технических применений. Явления выцветания красок, сводящиеся главным образом к их фотохимическому окислению, имеют очень большое значение для понимания процессов, происходящих в глазу человека и животных и лежащих в основе зрительного восприятия. Многие фотохимические реакции в наше время используются в химических производствах и приобрели, таким образом, непосредственное промышленное значение.

§ 189. Основные законы фотохимии

Уже сравнительно давно фотохимическое действие света было сопоставлено с поглощением света, и было установлено, что фотохимически может действовать только поглощенный свет. Что же касается количественной стороны, то здесь работа ряда ученых привела к утверждению, что количество фотохимически прореагировавшего вещества Q пропорционально поглощенному световому потоку Φ и времени освещения t, т.е. количеству поглощенной световой энергии. Первое высказывание этого рода, хотя и в довольно смутной форме, было сделано еще Сенабье в 1782 г. Впоследствии оно уточнялось и обосновывалось, пока, наконец, после тщательных исследований Бунзена и Роско (1855 г.) над реакцией образования хлористого водорода из хлора и водорода этот основной закон фотохимии не был окончательно установлен.

Согласно основному закону количество фотохимически прореагировавшего вещества равно

$$Q = \kappa \Phi t, \tag{189.1}$$

где величина множителя пропорциональности κ зависит от природы происходящей фотохимической реакции. Таким образом, величина коэффициента κ определяет, как велико количество прореагировавшего вещества, приходящееся на единицу (например на один джоуль) поглощенной энергии.

Количественное исследование фотохимических процессов чрезвычайно осложняется тем обстоятельством, что первичный процесс, вызванный светом, может сопровождаться многочисленными побочными (вторичными) реакциями чисто химического характера. Конечно, только первичный процесс идет за счет энергии поглощенного света; во всех же вторичных процессах мы имеем дело с превращениями, обусловленными химическими преобразованиями, т.е. изменением

взаимной конфигурации атомов и, следовательно, изменением внутренней энергии системы.

Наличие вторичных процессов позволяет понять чрезвычайно большое разнообразие в скорости различных фотохимических процессов, т.е. различие в значении коэффициента κ, меняющегося при переходе от одной реакции к другой в тысячи и даже сотни тысяч раз. Общие закономерности, отличающие действие света, нужно, конечно, искать в первичных процессах, которые, собственно говоря, и должны были бы называться фотохимическими. Эйнштейн (1905 г.), высказав гипотезу световых квантов, указал крайне простой закон, справедливый для (первичных) фотохимических процессов: каждому поглощенному кванту $h\nu$ соответствует превращение одной поглотившей свет молекулы (*закон эквивалентности*). Опытная проверка этого закона возможна лишь для таких реакций, в которых мы в состоянии разделить первичные и вторичные процессы, или где вторичные процессы вообще не имеют места. Естественно полагать, что роль вторичных явлений особенно велика в наиболее бурно протекающих процессах. Действительно, в идущем со взрывом процессе образования хлористого водорода первичным является лишь расщепление хлора. Бурное же протекание процесса есть результат *цепи* вторичных процессов, согласно уравнениям

$$\mathrm{Cl}_2 + h\nu = \mathrm{Cl} + \mathrm{Cl} \text{ — первичный процесс,}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Cl} + \mathrm{H}_2 &= \mathrm{HCl} + \mathrm{H} \\ \mathrm{H} + \mathrm{Cl}_2 &= \mathrm{HCl} + \mathrm{Cl} \end{aligned}\right\} \text{ вторичные процессы}$$

и т.д.

Цепь в таких цепных реакциях может быть очень длинной (свыше миллиона звеньев), пока какая-либо случайная примесь или стенка сосуда не перехватит освободившийся атом хлора и тем не оборвет цепи. Можно искусственно задержать развитие цепи, если ввести в смесь какое-либо вещество, жадно перехватывающее атомы хлора. Применение такого *акцептора* (захватчика) обрывает цепи и обеспечивает возможность проведения реакции медленным темпом, без взрыва. При подобном исключении вторичных процессов или, еще лучше, при изучении реакций, не осложненных вторичными процессами, удалось проверить закон Эйнштейна и установить его справедливость.

Первые надежные измерения этого рода, требующие измерения количества поглощенного *монохроматического* света (частоты ν) и количества прореагировавшего вещества, были выполнены в 1916 г. Варбургом. Была изучена реакция разложения бромистого серебра AgBr под действием света. Измерения показали, что каждый квант поглощенного света разлагает одну молекулу бромистого водорода, т.е. реакция идет согласно уравнению $2\mathrm{HBr}+2h\nu = \mathrm{H}_2+\mathrm{Br}_2$. В рамках теории фотонов понятно, что поглощение света может быть серьезным стимулом химического превращения. Действительно, поглощение фотона молекулой сообщает ей очень большое количество энергии, эквивалентное средней кинетической энергии теплового движения при температурах в десятки тысяч градусов, согласно соотношению $h\nu = (3/2)kT$, где $k = 1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К, а T — абсолютная температура.

Понятно также, что более короткие волны должны быть химически более активными. Так как поглощение одного фотона должно по закону Эйнштейна вести к превращению одной молекулы, то активными могут быть лишь те волны, для которых $h\nu$ больше энергии активации D, необходимой для первичного процесса (например, диссоциации поглотившей свет молекулы). Так как вероятность поглощения одной молекулой одновременно двух или большего числа квантов крайне мала, то условие, определяющее предельную частоту активного света, записывается в виде

$$h\nu \geqslant D. \tag{189.2}$$

Этот вывод, равно как и закон эквивалентности Эйнштейна, упоминавшийся выше, имеет силу лишь для условий, когда интенсивность света сравнительно мала. Если же освещенность достаточно велика, то положение существенно изменяется. Как было разъяснено в § 157, в случае очень больших освещенностей может происходить одновременное поглощение двух, трех и большего числа квантов. В результате необходимая энергия активации D доставляется несколькими фотонами, и условие (189.2) не отвечает опыту.

К тому же исходу может привести и последовательное поглощение нескольких фотонов одной и той же молекулой. В самом деле, представим себе, что в результате поглощения одного фотона молекула переходит в некоторое возбужденное состояние, но его энергия еще меньше энергии активации, и значит, реакция произойти не может. Если поток фотонов достаточно велик, то за время пребывания в возбужденном состоянии молекула «успевает» поглотить еще один фотон и перейти в следующее, энергетически более высокое состояние, из последнего — в еще более высокое и т.д. Для многих молекул (например, CO_2, SF_6, BCl_3 и др.) было прослежено последовательное поглощение нескольких десятков фотонов инфракрасного излучения ($\lambda = 10$ мкм) и даже их диссоциация.

Многофотонное возбуждение молекул требует очень мощного излучения (10 МВт/см^2 и более) и стало возможным только после создания лазеров. Монохроматичность лазерного света позволяет также до известной степени управлять фотохимическими реакциями. Дело в том, что для протекания многих реакций важно возбудить какую-то определенную степень свободы молекулы или небольшую их группу. При нагревании в силу закона равного распределения энергии возбуждаются все степени свободы. В противоположность этому, освещение монохроматическим светом позволяет воздействовать на ту степень свободы, которая активна в смысле интересующей нас химической реакции. Таким способом удается, например, осуществлять реакции, которые при общем нагревании не возникают из-за наличия других реакций, обладающих меньшей энергией активации. Изменением интенсивности облучения реагирующей смеси можно контролировать скорость протекания химических процессов и т.п.

С развитием лазерной техники и по мере накопления экспериментального материала в этой области управляемые химические реакции, несомненно, найдут широкое применение в химической технологии.

§ 190. Сенсибилизированные фотохимические реакции

Если $h\nu \geqslant D$, то, согласно предыдущему, первичная фотохимическая реакция возможна. Но для этого необходимо, чтобы молекула поглощала свет указанной частоты ν. Если же ν лежит вне полосы поглощения, то не будет происходить ни поглощение, ни фотохимическая реакция. Возможно, однако, осуществить процесс фотохимического разложения и в таком случае, добавив к исследуемому веществу другое, полоса поглощения которого включает ν. Фотон $h\nu$ поглощается молекулой этого второго вещества (сенсибилизатора), а полученный таким образом запас энергии может передаться при столкновении молекуле исследуемого вещества. Фотохимические реакции подобного типа называются *сенсибилизированными*. Для их осуществления необходимо, чтобы встреча молекулы разлагающегося вещества с возбужденной молекулой сенсибилизатора произошла раньше, чем последняя потеряет свою добавочную энергию в виде излучения (флуоресценция) или каким-либо иным образом. Поэтому необходимым условием действия сенсибилизатора является возможность достаточно частых столкновений между молекулами сенсибилизатора и изучаемого вещества, т.е. достаточное давление (если речь идет о реакции в газе).

Примером такого процесса может служить образование перекиси водорода H_2O_2 из водорода и кислорода под действием света длины волны $\lambda = 253{,}7$ нм. Такой свет не поглощается ни водородом, ни кислородом и не может вызывать никаких превращений в их смеси. Если же в сосуд ввести пары ртути, которая чрезвычайно хорошо поглощает свет этой длины волны, то возникает реакция, по-видимому, по следующей схеме:

$$\mathrm{Hg} + h\nu = \mathrm{Hg}^*,$$
$$\mathrm{Hg}^* + \mathrm{H}_2 = \mathrm{HgH} + \mathrm{H}$$

(Hg^* означает возбужденный атом ртути), или

$$\mathrm{Hg}^* + \mathrm{H}_2 = \mathrm{Hg} + 2\mathrm{H},$$

и атомы водорода вступают в реакцию с кислородом, образуя H_2O_2.

Сенсибилизированные реакции довольно распространены. Так, процесс ассимиляции углерода, по-видимому, является сенсибилизированной реакцией, в которой роль сенсибилизатора выполняет хлорофилл, входящий в состав всех зеленых частей растения. Сенсибилизация широко применяется в фотографической технике.

§ 191. Основы фотографии

Важное практическое применение фотохимического процесса представляет собой современная фотография. Здесь также имеет место первичный фотохимический процесс и последующие вторичные химические реакции. При этом в фотоэмульсии первичный и вторичные процессы разделены настолько отчетливо, что представляют собой две раздельные операции.

Процесс фотографирования состоит в освещении чувствительного слоя фотопластинки и последующей химической обработке ее (*проявлении*). Результатом фотохимического процесса, происходящего в пластинке или фотопленке под действием света, является разложение бромистого серебра, причем металлическое серебро выделяется в виде мельчайших частичек. Однако для получения заметного почернения фотопластинки требовалось бы исключительно сильное и длительное освещение. Действительно, если завернуть пластинку до половины в черную бумагу и оставить на длительное время на свету, то, сняв бумагу, можно заметить, что освещенная часть лишь немного темнее неосвещенной. При практически же осуществляемых кратковременных экспозициях на экспонированной таким образом половине пластинки нельзя заметить никаких следов освещения. Первичное фотографическое действие служит лишь началом процесса, подготовляя те места фотопластинки, на которые подействовал свет, к более или менее интенсивному выделению металлического серебра (образуя так называемое *скрытое*, или *латентное*, изображение). Действуя далее на пластинку соответствующими химическими реактивами, можно вызвать восстановление металлического серебра (разложение AgBr) в тем большей степени, чем сильнее было освещено соответствующее место пластинки (проявление). Когда проявление закончено, то удаляют остаток неразложенного бромистого серебра (путем растворения его в растворе гипосульфита $Na_2S_2O_3$) и таким образом предохраняют фотопластинку от дальнейших изменений на свету (*фиксирование*). С полученного негатива можно приготовить позитивный отпечаток на другой пластинке или на фотобумаге.

Используя таким образом вторичные химические процессы, удается получить негатив после времени экспозиции, составляющего малую часть секунды.

Первичный фотохимический процесс, приводящий к получению скрытого изображения, долгое время оставался совершенно неясным. Было известно, что это «изображение» может сохраняться неизменным в течение ряда лет и после проявления передавать все мельчайшие детали картины. Таким образом, скрытое изображение является чрезвычайно стойким, хотя и не поддается непосредственному наблюдению. В настоящее время можно, по-видимому, составить следующую картину этого процесса. Серебряные соли, составляющие светочувствительный слой, содержат ионы серебра. Под действием света происходит фотоэлектрический эффект, в результате которого освобожденные электроны нейтрализуют положительные ионы серебра, превращая их в атомы. Металлическое серебро в виде отдельных атомов или мелко раздробленных коллоидов и составляет скрытое изображение. Так как концентрация выделившегося серебра не превышает на основании сделанных измерений и подсчетов 10^{-7} г/см^3, а светочувствительный слой имеет толщину около 2–20 мкм, то понятно, что непосредственное наблюдение скрытого изображения в этих условиях невозможно. При освещении толстых слоев удалось установить образование металлического серебра в количествах, достаточных для его обнаружения по поглощению света.

Подобные процессы хорошо были изучены уже раньше на кристаллах каменной соли и других галоидных солей щелочных металлов, которые в толстых слоях дают явное окрашивание под действием света вследствие выделения металлов в виде атомов или коллоидных частиц. Указания на аналогию между этими процессами и образованием скрытого изображения делались уже давно. В 1926 г. это предположение было высказано в определенной форме; оно было окончательно доказано работами М.В. Савостьяновой, а также Поля и его учеников.

Интересно отметить, что, по-видимому, непосредственное разложение на свету испытывают не кристаллы бромистого серебра, а менее стойкие его соли, вероятно, сернистые соединения серебра, образующиеся на поверхности кристаллов во время процесса «созревания» светочувствительной эмульсии. Сера присутствует в качестве примесей в желатине эмульсии. Желатин, тщательно очищенный от серы, не пригоден для изготовления чувствительных фотоэмульсий.

Возникающие под действием света зародыши на поверхности кристаллов бромистого серебра делают возможным воздействие проявителя на эти кристаллики, в результате чего бромистое серебро восстанавливается в металлическое серебро химическим путем (проявление).

Наблюдая процесс проявления под микроскопом, можно видеть, что начавшееся проявление ведет к восстановлению серебра во всем кристалле, иногда даже серебро выбрасывается из кристаллика наподобие протуберанца (рис. 35.1). Таким образом выделяется значительное количество металлического серебра, могущее в десятки миллионов раз превосходить количества серебра скрытого изображения. Чем больше интенсивность падающего света, тем на большем числе кристалликов образуются зародыши и тем сильнее будет действие проявителя. С другой стороны, чем крупнее кристаллик, тем больший проявительный эффект дает образование зародыша. Отсюда понятно, что при прочих равных условиях увеличение размеров кристалликов должно увеличивать чувствительность пластинки, но зато уменьшать способность последней к передаче деталей (*разрешающую способность* пластинки).

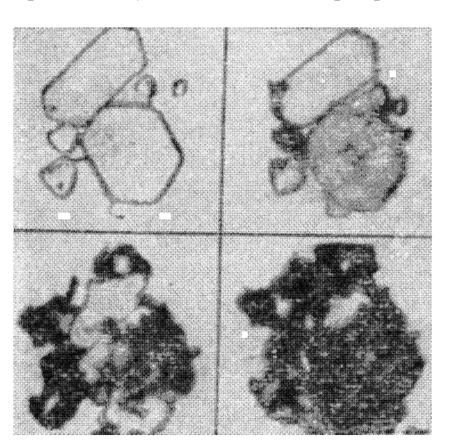


Рис. 35.1. Микрофотографии последовательных стадий проявления кристалликов бромистого серебра

Благодаря огромному прогрессу в изготовлении фотографических пластинок и пленок применение фотографии в науке и технике достигло крайне широкого распространения. Не говоря уже о возможности фотографической фиксации ультрафиолетовых и инфракрасных лучей, недоступных прямому наблюдению глазом, фотография

оказывает незаменимые услуги при запечатлении очень кратковременных процессов (электрическая искра, например, при времени экспозиции 10^{-5}–10^{-6} с, импульсы лазерного излучения длительностью 10^{-6}–10^{-12} с) или процессов крайне слабой интенсивности, требующих использования очень длительной экспозиции. Исключительно многообразны применения фотографии в астрономии и астрофизике. В репродукционной технике фотография занимает важнейшее место (цинкография и т.д.). Наконец, вся кинематографическая техника основана на достижениях фотографии.

§ 192. Сенсибилизация фотографических пластинок

Нормальная фотографическая эмульсия чувствительна к сравнительно коротким световым волнам, ибо заметное поглощение бромистым серебром начинается приблизительно около 500,0 нм. Поглощение возрастает для более коротких волн, так что максимум чувствительности в видимой части приходится на фиолетовый конец спектра. Таким образом, распределение светлых и темных мест в ландшафте, снятом на пластинке, подобно наблюдаемому через фиолетовое стекло. Со стороны коротких ультрафиолетовых волн чувствительность пластинок ограничена тем, что желатин начинает заметно поглощать свет близ $\lambda = 230{,}0$ нм и, следовательно, короткие волны практически не проникают в эмульсию и приходится прибегать к специальным пластинкам без желатина.

Применение сенсибилизаторов, действующих по принципу, описанному в § 190, значительно улучшает дело. Слой желатина прокрашивается соответствующим красителем, поглощающим те или иные волны. Очувствление к желто-зеленому цвету достигается обычно прибавлением эритрозина (ортохроматические пластинки), очувствление к желто-зеленому и красному — прибавлением пинахрома или пинацианола (панхроматические пластинки). Подбором подходящих красителей можно заметно увеличить чувствительность эмульсии к тому или другому спектральному участку.

Найдены сенсибилизаторы и к инфракрасному излучению. Фотографирование в инфракрасном свете представляет большие преимущества при съемке удаленных объектов сквозь атмосферу, затянутую тонкой дымкой, благодаря уменьшению рассеяния длинных волн (см. § 159). Фотографирование в инфракрасном свете удалось продвинуть приблизительно до 1,2 мкм.

Замечательные результаты были достигнуты советскими астрофизиками (Г.А. Шайн с сотрудниками), которые применили пластинки, чувствительные к инфракрасным лучам, для фотографирования туманностей, причем удалось установить совершенно новые очертания в ранее известных туманностях и открыть новые. И здесь причина успеха лежит, по-видимому, в том что благодаря меньшему рассеянию длинных световых волн становится возможным фотографировать более глубокие слои туманностей или источники, скрытые туманностями, расположенными на луче зрения.

Фотографирование на обычных пластинках в области короткого ультрафиолета, поглощаемого желатином, легко достигается при

помощи сенсибилизации, основанной на ином принципе. Чувствительная поверхность пластинки покрывается веществом, флуоресцирующим под действием коротких ультрафиолетовых лучей (например, тонким слоем машинного масла). Свет флуоресценции, имеющей бóльшую длину волны, проникает сквозь желатин и хорошо фотографируется. Таким путем без труда удается использовать обычные пластинки для фотографирования в ультрафиолете при $\lambda = 180{,}0$ нм и короче.

§ 193. Восприятие света глазом

Оптическую систему глаза образуют выпуклая роговая оболочка, служащая внешним слоем, зрачок, играющий роль диафрагмы, хрусталик и прозрачное стекловидное тело, заполняющее глазную камеру (см. рис. 14.8 § 91). Все свободное пространство заполняет так называемая водянистая влага. Эта оптическая система дает изображение рассматриваемых предметов на внутренней поверхности глазной камеры, которую выстилает *сетчатка*. Сетчатка представляет собой

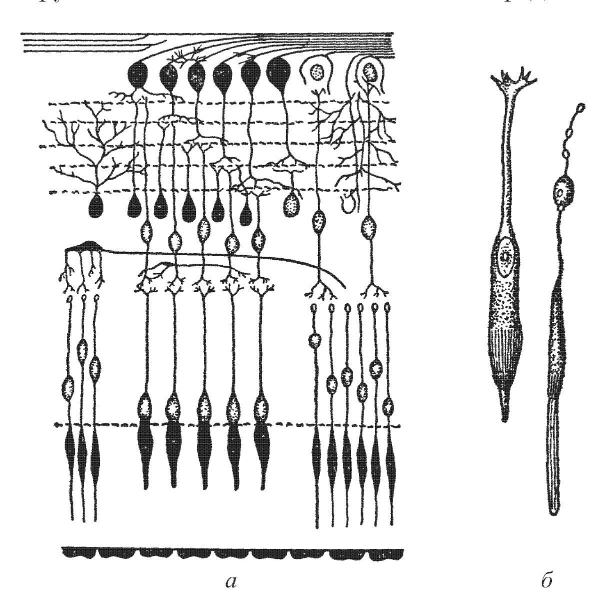


Рис. 35.2. Схематическиое изображение сетчатки: *а* — строение сетчатки глаза (низ рисунка соответствует дну глаза); *б* — палочки и колбочки

сложную структуру, состоящую из нескольких слоев нервных клеток разного типа и разного назначения, и играет роль приемника излучения.

Схематический разрез сетчатки приведен на рис. 35.2 *а*. Свет поступает со стороны, соответствующей верхней части рисунка. Непо-

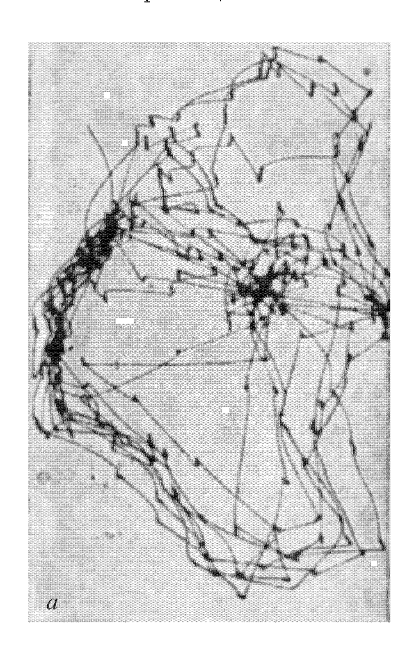
средственно светочувствительными являются так называемые рецепторные клетки — *колбочки* и *палочки*, заложенные в последнем слое сетчатки (рис. 35.2 *б*). Именно в палочках и колбочках свет вызывает первичное раздражение, которое превращается в электрические импульсы. Последние передаются через ряд промежуточных клеток и выходят из сетчатки по волокнам зрительного нерва. Эти волокна (число их порядка нескольких миллионов) передают сигналы в подкорковые центры, а оттуда — в кору головного мозга. Число рецепторных клеток весьма велико. В глазу человека число колбочек достигает 7 миллионов, а число палочек — 130 миллионов. Распределены они очень неравномерно. Периферия глаза занята почти исключительно палочками; число колбочек на единицу площади возрастает по мере приближения к центру глаза. Несколько в стороне от оптической оси глаза, ближе к виску, расположена область, именуемая *желтым пятном* и имеющая в середине небольшое углубление (*«центральная ямка»*), занятое исключительно колбочками, число которых достигает здесь 13 000–15 000. Центральная ямка играет особо важную роль при различении деталей.

Опыт показывает, что мы ясно видим только те предметы, изображение которых проецируется на желтое пятно, и особенно хорошо различаем детали, проецирующиеся на центральную ямку. Когда же изображение падает на периферические части глаза, то, хотя ощущение света вполне отчетливо, различение деталей практически не имеет места. Такое различие в свойствах центральной и периферийных частей сетчатки обусловлено в основном двумя причинами. Глаз может различить лишь те детали объекта, угловые размеры которых не меньше углового расстояния между соседними колбочками или палочками. В центральной же ямке плотность колбочек наибольшая, и различение деталей оказывается наилучшим. С удалением от центральной ямки плотность рецепторов падает, в соответствии с чем уменьшается и способность различать детали. Кроме того, число колбочек в центральной ямке равно числу волокон зрительного нерва, т.е. каждая колбочка действительно является независимым приемником света. По мере перехода к периферии сетчатки все большее число рецепторов приходится на одно отдельное волокно, и разрешение еще сильнее уменьшается, так как минимально разрешаемое расстояние определяется размерами области сетчатки, которую занимают «объединенные» рецепторы. По этим причинам при рассматривании предмета мы всегда фиксируем его изображение на желтое пятно и даже на центральную ямку.

Поле зрения этих участков глаза невелико. Так, на желтое пятно одновременно может проецироваться картина, занимающая по горизонтальному направлению около 8°, а по вертикальному — около 6°. Поле зрения центральной ямки еще меньше и равно 1–1,5° по горизонтальному и вертикальному направлениям. Таким образом, из всей фигуры человека, стоящего на расстоянии 1 м, мы можем фиксировать на желтое пятно, например, только его лицо, а на центральную ямку — поверхность, немного большую глаза. Все остальные части фигуры проецируются на периферическую часть глаза и рисуются в виде смутных деталей. Живой глаз, однако, обладает способно-

стью быстро перемещаться (поворачиваться) в своей орбите, так что за очень короткий промежуток времени мы можем последовательно фиксировать большую поверхность.

На рис. 35.3 *а* показана траектория, по которой глаз последовательно осматривает детали объекта, а на рис. 35.3 *б* — сам объект. Точки соответствуют тем местам, на которых глаз останавливается, черточки — перемещению глаза. Таким образом, глаз как приемник света



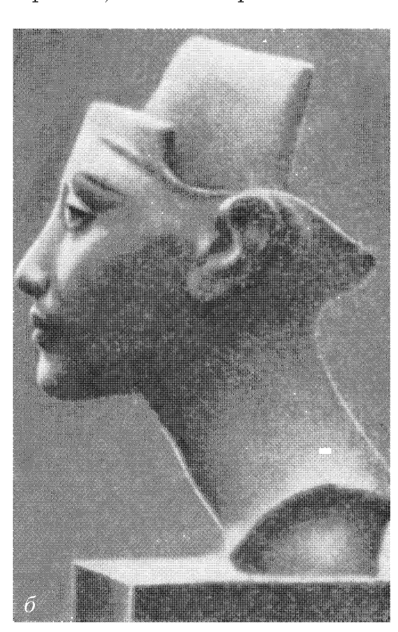


Рис. 35.3. Траектория, по которой глаз осматривает детали объекта (*а*), и сам объект (*б*)

сочетает в себе особенности, присущие фотографическому и фотоэлектрическому методу регистрации. Одновременно, с хорошим разрешением воспринимается конечная, но небольшая часть изображения. Все же изображение регистрируется за счет последовательного просматривания. Такое устройство позволяет концентрировать внимание на наиболее существенных деталях предметов и вместе с тем получать некоторое общее представление обо всем, что находится в поле зрения. Благодаря этой особенности глаза мы не замечаем ограниченности поля ясного зрения и оцениваем поле зрения глаза по вертикальному и горизонтальному направлениям примерно в 120–150°, т.е. значительно больше, чем у очень хороших оптических инструментов.

Светочувствительные элементы — палочки и колбочки — играют существенно различную роль в зрительном ощущении. Исследования с несомненностью показывают, что палочки гораздо более чувствительны к свету, и в темноте (сумерках) зрительное ощущение полу-

чается за счет раздражения именно палочек. Колбочки же, будучи менее чувствительными, обладают способностью к цветному зрению. Последнее требует пояснения.

Цветное зрение — это способность различать излучения разного спектрального состава *независимо от их интенсивности.* Ведь и на черно-белой фотографии объекты разной окраски обычно отличаются друг от друга. Однако *при надлежащем соотношении интенсивностей* излучения, различные по цвету, могут дать одинаковое почернение на негативе. Соотношение интенсивностей, при котором излучения разного цвета дают одинаковые почернения, определяется спектральной чувствительностью слоя. При наличии цветного зрения (как и при цветной фотографии) существуют излучения, действия которых остаются различными при любых соотношениях интенсивности. Например, красный свет любой яркости отличается от зеленого, синего, белого и т.п.

При слабом освещении, когда работают только палочки, способность цветоразличения теряется. Исследуя способность глаза различать излучения, удалось с большой достоверностью установить, что палочки работают наподобие фотоэлемента с вполне определенной кривой спектральной чувствительности с максимумом близ 510 нм.

Цветоразличение колбочковым аппаратом такое же, как у системы, состоящей из трех светочувствительных приемников с разными, но также вполне определенными кривыми спектральной чувствительности. В настоящее время трудно сказать, находятся ли все три типа приемников в каждой колбочке, или существуют колбочки трех разных типов, но сам факт наличия в колбочках сетчатки человека приемников трех типов несомненен. Иногда встречаются люди (около 5 % мужчин и очень мало женщин), зрение которых отличается от нормального отсутствием одного из приемников — так называемые «дихроматы». Все излучения, которые для нормальных наблюдателей различаются только по возбуждению недостающего приемника, неразличимы для дихроматов. Еще реже встречаются среди людей «монохроматы», зрение которых и при ярком освещении подобно палочковому.

Весьма разнообразно цветное зрение животных, в частности насекомых. Наиболее точные количественные данные об особенностях зрения животных дают электрофизиологические исследования. Оказывается, что электрические импульсы в волокнах зрительного нерва идут не все время действия света на сетчатку, а только вслед за изменениями освещения. Если два излучения неразличимы для данного животного, то при замене одного из них другим импульсы в нервном волокне не возникают. Этот прием позволяет с хорошей точностью и достоверностью выяснить, сколько типов приемников имеется в сетчатке того или иного животного и каковы их кривые спектральной чувствительности.

Для возбуждения светочувствительного рецептора свет должен поглотиться им, причем чем больше поглощение для какой-либо длины волны, тем больше, как правило, и чувствительность к ней. Поэтому кривые спектральной чувствительности для светочувствительных веществ обычно имеют много общего (а часто и просто совпадают)

с их спектральными кривыми поглощения. Это обстоятельство уже давно побудило искать светочувствительные пигменты сетчатки.

Первым был обнаружен родопсин (зрительный пурпур) — светочувствительное вещество палочек. Родопсин — вещество розоватого цвета, разлагается (выцветает) под действием света и снова восстанавливается в темноте. Его спектральная кривая поглощения очень хорошо соответствует спектральной чувствительности глаза при слабом освещении, когда работают только палочки. Особенно заметно это проявляется в *явлении Пуркинье*, которое заключается в следующем. Родопсин имеет максимум чувствительности в сине-зеленой части спектра и практически не чувствителен в оранжево-красной. В соответствии с этим при слабом освещении оранжевые и красные предметы, кажущиеся очень яркими днем, при слабом освещении представляются очень темными по сравнению с голубыми и синими.

Родопсин находят сейчас в сетчатке очень многих животных, и у всех у них по электрофизиологическим данным имеется приемник с соответствующей кривой спектральной чувствительности. У других животных в палочках обнаружен другой пигмент — порфиропсин с несколько иной кривой поглощения и соответственно иной кривой спектральной чувствительности палочек.

В колбочках животных удалось выделить свои светочувствительные пигменты. У некоторых животных (черепахи, дневные птицы) различная спектральная чувствительность приемников, необходимая для цветоразличения, достигается за счет своеобразных светофильтров. У таких животных перед колбочками расположены жировые капельки, имеющие разную окраску. Это напоминает прием, применяемый в цветной фотографии (особенно в полиграфических репродукционных процессах). С цветного объекта делается три снимка через три разных светофильтра; они заменяют съемку на слоях с разной спектральной чувствительностью. Аналогичную роль играют и «светофильтры», расположенные перед колбочками.

Важной особенностью глаза является его способность работать в необычайно широком диапазоне освещенностей. Прямые лучи Солнца создают на поверхности Земли освещенности порядка 100 000 лк, а в темноте глаз может отличить от темноты поверхность с освещенностью 10^{-6} лк. Работа в столь обширном диапазоне обеспечивается целым рядом различных механизмов. Почти мгновенно реагирует на резкое увеличение освещенности зрачок; диафрагмируя входное отверстие глаза, он уменьшает количество света, попадающего на сетчатку. При слабом освещении зрачок вновь расширяется. У некоторых животных, в особенности у насекомых, изменение чувствительности глаза к свету происходит за счет миграции в сетчатке темного пигмента, экранирующего рецепторы. Кроме того, оказывается, что при слабом освещении в одном нервном волокне суммируются сигналы от многих рецепторов и число последних тем больше, чем слабее освещение, причем увеличение чувствительности достигается во вред разрешающей способности. Этим, по-видимому, объясняется тот общеизвестный факт, что при недостаточно ярком освещении глаз перестает

различать мелкие детали. Затем, как уже говорилось, для работы при слабом освещении существует специальный палочковый аппарат.

Кроме всех перечисленных средств глаз может еще изменять чувствительность рецепторов под действием света. Каждому известно по собственному опыту, что происходит при быстром переходе из светлого помещения в темное или наоборот. В первом случае сначала глаз ничего не различает, пока «не привыкнет к темноте», при выходе же из темного помещения на свет освещение в первый момент, пока глаз «не привыкнет к свету», кажется слепящим. Эти явления называются *адаптацией* (т.е. приспособлением) глаза. Время, необходимое для адаптации к темноте, составляет 20–30 мин.

Еще сравнительно недавно механизм адаптации связывали с процессом выцветания зрительного пурпура на свету и его регенерацией в темноте. Это объяснение считалось важной составной частью так называемой фотохимической теории зрения, которая сводит причину возникновения зрительного ощущения к химическому разложению пурпура под действием света. Однако вопрос, по-видимому, значительно сложнее. Оказывается, что чувствительность глаза к свету сильнее всего меняется, когда изменение количества зрительного пурпура еще очень невелико, и наоборот, когда концентрация пурпура резко падает, чувствительность изменяется незначительно. У некоторых животных, например, у кальмаров электрофизиологическими методами констатируется изменение чувствительности к свету на несколько порядков, хотя светочувствительный пигмент почти не выцветает. Вместе с тем, фотохимическая теория зрения получила новые подтверждения. У многих животных найдены различные светочувствительные пигменты сетчатки, причем между кривыми поглощения этих пигментов и спектральной чувствительностью приемников наблюдается хорошее соответствие. Поэтому связь механизмов зрения с фоточувствительностью пигментов представляется более или менее достоверной.

Все перечисленные механизмы позволяют глазу работать в широком диапазоне освещенностей. В состоянии полной адаптации глаз представляет собой крайне чувствительный инструмент, способный реагировать на очень малые потоки энергии, равные $(2\div 3)\cdot 10^{-17}$ Вт. Таким образом, адаптированный глаз может воспринимать световой поток, состоящий из нескольких десятков квантов в секунду (при $\lambda = 550$ нм) (ср. § 178).

С другой стороны, в состоянии максимальной приспособленности к яркому освещению (адаптация к свету) глаз может без вреда для организма переносить сравнительно большие яркости. Благодаря этому вариации светового потока, лежащие еще в пределах способности восприятия, очень велики: от $2\cdot 10^{-17}$ Дж/с до $2\cdot 10^{-5}$ Дж/с. При бо́льших яркостях источника необходимо защищать глаз искусственно. Так, наблюдение Солнца (солнечного затмения) можно вести только через дымчатые (закопченные) стекла или другие подходящие светофильтры. При пребывании на ледниках также необходимо применение дымчатых или цветных очков и т.д.; в этом случае, правда, очки необходимы и для поглощения ультрафиолетового света, кото-

рый достигает на больших высотах значительной интенсивности и вреден для глаза. Сильное изменение яркости, происходящее настолько быстро, что защитный аппарат глаза не успевает подействовать, может привести к тяжелым расстройствам зрения и даже к полной его потере.

Если «работа» палочек (сумеречное зрение) может считаться в какой-то мере разъясненной, то действие колбочек и вообще восприятие цветов (дневное зрение) продолжает оставаться еще не вполне ясным.

Из существующих теорий цветного зрения лучше других объясняет известные факты *трехцветная теория* Гельмгольца. В отношении первичного рецепторного механизма она является даже единственно возможной. Действительно, непосредственно экспериментально доказана возможность получения излучения любого цвета (с небольшими оговорками) смешением излучений красного, зеленого и сине-фиолетового цветов. Согласно трехцветной теории это есть следствие существования в сетчатке глаза трех светочувствительных приемников, у которых различны области спектральной чувствительности. Поэтому сине-фиолетовый свет (коротковолновый) возбуждает по преимуществу только один из трех приемников, зеленый (средняя часть спектра) возбуждает главным образом второй, а красный свет — почти исключительно третий. Поэтому смешивая излучения трех цветов в разных количествах, мы можем получить практически любую комбинацию возбуждений трех приемников, а это и значит получать любые цвета. Приведенные соображения несколько схематичны, и в действительности все обстоит сложнее.

Дело в том, что области чувствительности приемников сильно перекрываются, и поэтому любые излучения возбуждают не один, а по крайней мере два или даже сразу все три приемника. Это усложняет приведенную выше упрощенную схему, но не лишает ее физического смысла. Детальный анализ обнаруживает идеальное количественное соответствие существующей трехцветной теории и эксперимента.

Электрофизиологические эксперименты на животных, о которых сказано выше, вместе с исследованиями зрительных пигментов дали новое подкрепление теории Гельмгольца. Следует, однако, заметить, что все, о чем говорилось до сих пор, касается способности глаза различать излучения, но совсем не затрагивает всех вопросов, связанных с цветовыми ощущениями, которые связаны в значительной мере с психологией и выходят за рамки физики. В частности, важно заметить, что цветовые ощущения не связаны однозначно со спектральным составом излучении. Они зависят от предварительных воздействий (адаптация, последовательные образы), от окружения (одновременный контраст) и даже от всей обстановки наблюдений. Например, пальто человека, освещенное солнцем, кажется черным, а стена дома в тени — белой, хотя пальто в этих условиях отражает больше света, чем стена. Приведенный пример показывает невозможность связать все сложные явления зрительных возбуждений с первичным механизмом фоторецепции в сетчатке.

ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Глава XXXVI

ЗАКОНЫ ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

§ 194. Тепловое излучение

Электромагнитное излучение всех длин волн обусловливается колебаниями электрических зарядов, входящих в состав вещества, т.е. электронов и ионов. При этом колебания ионов, составляющих вещество, соответствуют излучению низкой частоты (инфракрасному) вследствие значительной массы колеблющихся зарядов. Излучение, возникающее в результате движения электронов, может иметь высокую частоту (видимое и ультрафиолетовое излучение), если электроны эти входят в состав атомов или молекул и, следовательно, удерживаются около своего положения равновесия значительными силами. В металлах, где много свободных электронов, излучение последних соответствует иному типу движения; в таком случае нельзя говорить о колебаниях около положения равновесия; свободные электроны, приведенные в движение, испытывают нерегулярное торможение, и их излучение приобретает характер *импульсов*, т.е. характеризуется спектром различных длин волн, среди которых могут быть хорошо представлены и волны низкой частоты.

Излучение тела сопровождается потерей энергии. Для того чтобы обеспечить возможность длительного излучения энергии, необходимо пополнять убыль ее; в противном случае излучение будет сопровождаться какими-либо изменениями внутри тела, и состояние излучающей системы будет непрерывно изменяться. Указанные процессы могут быть весьма разнообразны, и следовательно, может быть различен и характер свечения.

Известны процессы излучения, сопровождающие химические превращения внутри тела, — так называемая *хемилюминесценция*. Сюда относится, например, свечение гниющего дерева или свечение фосфора, медленно окисляющегося на воздухе. В этом случае испускание лучистой энергии идет параллельно с изменением химического состава вещества и уменьшением запаса его внутренней энергии.

Процессы излучения, вызываемые освещением тела, одновременным или предварительным, объединяются под названием *фотолюминесценции*. В данном случае для поддержания свечения необходимо подводить к телу энергию в виде излучения, поступающего от внешнего источника.

Весьма распространен способ возбуждения свечения путем электрического воздействия на излучающую систему. Наиболее распро-

страненным свечением такого рода (*электролюминесценция*) является свечение газов или паров под действием проходящего через них электрического разряда, который может иметь разнообразные формы: тлеющий разряд, обычно наблюдаемый в гейслеровых трубках, лампы «дневного света», электрическая дуга, искра. Во всех таких случаях энергия, необходимая для излучения, сообщается атомам и молекулам газа путем бомбардировки электронами, разгоняемыми электрическим полем разряда. Бомбардировка электронами может вызвать также свечение твердых тел, например, минералов (*катодолюминесценция*).

Наконец, можно заставить тело светиться, сообщая ему необходимую энергию нагреванием. И в этом случае можно поддерживать излучение неизменным, если убыль энергии, уносимой излучением, пополнять сообщением соответствующего количества тепла. Последний вид свечения наиболее распространен и называется *тепловым излучением.* Собственно говоря, такое тепловое излучение имеет место и при низких температурах (например, при комнатной), но только в этих условиях излучение практически ограничивается лишь очень длинными инфракрасными волнами.

Тепловое излучение тел можно противопоставить всем иным видам излучения в силу особенностей, представление о которых дает следующее рассуждение.

Предположим, что излучающее тело окружено идеально отражающей, непроницаемой для излучения оболочкой. Тогда излучение, испускаемое телом, не рассеивается по всему пространству, а, отражаясь *сполна* стенками, сохраняется в пределах полости, падая вновь на излучающее тело и в большей или меньшей степени вновь им поглощаясь. В таких условиях никакой потери энергии наша система — излучающее тело и излучение — не испытывают. Однако это еще не значит, что испускающее тело и излучение находятся в равновесии между собой. Энергия нашей системы содержится частично в виде энергии излучения (электромагнитных волн), частично в виде внутренней энергии излучающего тела. Состояние системы будет равновесным, если с течением времени распределение энергии между телом и излучением не меняется. Поместим внутрь полости нагретое тело (твердое, жидкое или газообразное — безразлично). Если в единицу времени тело больше испускает, чем поглощает (или наоборот), то температура его будет понижаться (или повышаться). При этом будет ослабляться или усиливаться испускание, пока, наконец, не установится равновесие. Такое равновесное состояние устойчиво. После всякого нарушения его, в силу описанного механизма, вновь восстановится равновесное состояние.

Наоборот, излучение, возбуждаемое не нагреванием, а какими-либо другими процессами, не будет равновесным. Пусть, например, излучение имеет характер хемилюминесценции, т.е. сопровождает какой-то процесс химического изменения вещества. Поглощение большей или меньшей доли испущенной световой энергии не вернет вещество в его первоначальное состояние. Более того, повышение температуры, вызванное поглощением тепла, обычно ведет лишь к более энергичному протеканию химической реакции. Процесс непрерывно-

го изменения излучающей системы будет продолжаться до тех пор, пока может идти химическая реакция, и, следовательно, система все больше и больше удаляется от первоначального состояния. Равновесие установится только тогда, когда закончится химический процесс, а с ним и хемилюминесценция, и характер установившегося излучения будет определяться температурой нашего тела, т.е. равновесное состояние будет соответствовать опять-таки тепловому излучению.

То же справедливо и при фотолюминесценции. Внесем в зеркальную полость какое-нибудь фосфоресцирующее вещество, предварительно возбужденное освещением. Свечение нашего тела будет постепенно ослабевать; действительно, свет фосфоресценции, отраженный зеркальными стенками, может частично поглощаться нашим веществом и нагревать его; однако он не сможет поддерживать длительной фосфоресценции, для возбуждения которой требуется освещение светом более короткой длины волны, чем испускаемый свет (закон Стокса). Значит, и в данном случае будут иметь место постепенное нагревание тела за счет света фосфоресценции и постепенная замена этого излучения тепловым излучением нагретого тела, т.е. излучением, интенсивность и спектральный состав которого определяются температурой тела. Аналогично будет затухать свечение, вызванное кратковременным электрическим разрядом, и заменяться тепловым излучением, соответствующим установившейся температуре системы.

Таким образом, равновесное излучение всегда имеет характер теплового излучения, причем такое равновесие между излучением и веществом может иметь место для любого тела (твердого, жидкого, газообразного). Это тепловое, или равновесное, излучение подчиняется определенным общим закономерностям, вытекающим из принципов термодинамики, в силу которых установившееся тепловое равновесие изолированной системы не может нарушиться вследствие излучения какими-либо частями данной системы или вследствие каких-либо других тепловых обменов. Тепловое излучение иногда называют *температурным*.

§ 195. Тепловое излучение и правило Прево

Основная величина, характеризующая тепловое состояние тела, есть его температура. Эта величина является определяющей также и в явлениях теплового излучения, что можно без труда усмотреть из следующего грубого опыта. Нагревая какое-либо тугоплавкое вещество (уголь, металл), мы замечаем, что видимое на глаз (темно-красное) свечение появляется лишь при определенной температуре (около 500 °C). По мере повышения температуры свечение становится ярче и обогащается более короткими волнами, переходя примерно при 1500 °C в яркое белое каление. Контролируя свечение спектроскопом, мы можем видеть, как по мере повышения температуры постепенно развивается сплошной спектр свечения, начиная от узкой области красного излучения ($\lambda \approx 700{,}0$ нм) и переходя постепенно в полный видимый спектр. Наблюдая свечение при помощи термоэлемента, можно обнаружить и инфракрасное, и ультрафиолетовое излучение нагреваемого тела.

В этих опытах выясняется и другая важнейшая черта температурного излучения. Спектральный состав излучения, соответствующего данной температуре, для различных хорошо поглощающих веществ (например, окислов различных металлов, угля и т.д.) практически одинаков, но для прозрачных тел излучение может иметь заметно отличный состав. Так, нагревая кусок стали, мы при температуре около 800 °C увидим яркое вишнево-красное каление, тогда как прозрачный стерженек плавленного кварца при той же температуре совсем не светится, не испускает видимых (в частности, красных) лучей. Таким образом, обнаруживается бóльшая способность к излучению тел, хорошо поглощающих. Это обстоятельство определяет условия обмена лучистой энергией, ведущего к установлению теплового равновесия между телами.

Опыт показывает, что тела различной температуры, могущие передавать друг другу тепло, по истечении некоторого времени принимают одинаковую температуру, т.е. приходят в тепловое равновесие. Это происходит и в том случае, когда наши тела заключены в непроницаемую для тепла оболочку, в которой создан вакуум, т.е. исключена возможность теплового обмена в силу теплопроводности и конвекции, и имеет место лишь излучение и поглощение. Излучая и поглощая тепло, тела A_1 и A_2 в конце концов принимают одинаковую температуру T. Тепловое равновесие имеет динамический характер, т.е. и при одинаковых температурах всех тел происходит, конечно, излучение и поглощение лучистой энергии, но так, что в единицу времени тело столько же излучает тепла, сколько оно его поглощает. Отсюда ясно, что если два тела A_1 и A_2 обладают различной способностью к поглощению, то и их способность к испусканию не может быть одинаковой. Действительно, раз установилось тепловое равновесие, то для каждого тела должно соблюдаться равенство между количеством испускаемой и поглощаемой им в единицу времени энергии. *Если два тела поглощают разные количества энергии, то и испускание должно быть различно* (Прево, 1809 г.).

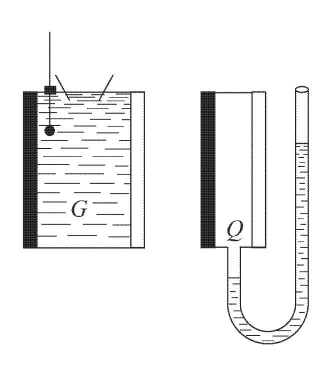


Рис. 36.1. Приборы для демонстрации правила Прево: G — излучающий сосуд; Q — воздушный термометр

Нетрудно подтвердить это заключение простыми опытами. В качестве излучателя возьмем наполненную горячей водой коробку (рис. 36.1), плоские стенки которой обладают различной способностью к поглощению: одна сделана из хорошо полированного металла и поглощает очень мало, а другая покрыта черным слоем окисла и почти нацело поглощает падающую на нее энергию. В качестве приемника удобно использовать воздушный термометр, резервуар которого Q также представляет собой металлическую коробку со стенками из различного материала. По расширению воздуха в Q можно судить о количестве поступающего за единицу времени тепла. Поворачивая сосуд G к термометру (или Q к излучателю)

блестящей или черной стороной, можно убедиться, что блестящая поверхность меньше излучает и меньше поглощает, чем черная. Сделав термометр дифференциальным и придав всему расположению вид, изображенный на рис. 36.2 и понятный без пояснения, мы заметим, что капля в дифференциальном термометре остается на месте, т.е. оба резервуара Q_1 и Q_2 получают одинаковое количество тепла. В таком видоизменении этот опыт позволяет заключить, что поглощательная способность какой-либо поверхности пропорциональна ее испускательной способности.

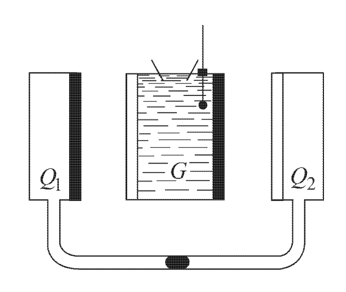


Рис. 36.2. Опыт, показывающий пропорциональность между поглощательной и испускательной способностями поверхности: G — излучающий сосуд; Q_1, Q_2 — дифференциальный воздушный термометр

Описанные опыты имеют важный принципиальный недостаток, ибо излучательная и поглощательная способности сравниваются при *различной* температуре, а способность тела к излучению и поглощению зависит от его температуры. Впрочем, для выбранных объектов (полированный и черный металлы) и незначительной разности температур (меньше 100 °C) это различие играет ничтожную роль.

§ 196. Закон Кирхгофа

Правило Прево, устанавливающее связь между способностью тела поглощать и излучать тепло, имело качественный характер. Полстолетия спустя Кирхгоф (1859 г.) придал ему вид строгого количественного закона, играющего основную роль во всех вопросах теплового излучения.

Для характеристики теплового излучения мы воспользуемся величиной потока энергии Φ, т.е. количества энергии, излучаемого в единицу времени (мощность излучения). Поток, испускаемый единицей поверхности излучающего тела по всем направлениям, будем называть *испускательной способностью* и обозначим через E. Определенная таким образом испускательная способность соответствует светимости (см. Введение, фотометрические понятия) и иногда называется *энергетической светимостью*. Наряду с ней можно рассматривать и *энергетическую яркость* B, определяемую аналогично яркости при фотометрических измерениях. Для черного тела яркость не зависит от направления, так что $E = \pi B$ (см. § 7).

Тепловое излучение занимает более или менее широкую спектральную область, и так как испускательная способность тела зависит от длины волны (частоты), то для характеристики ее мы должны оговорить, к какому спектральному участку относится наше определение. Положим, что спектральный участок заключен между частотами ν и $\nu + d\nu$. Чем меньше $d\nu$, тем детальнее будет охарактеризована испускательная способность тела (рис. 36.3 a). Вместе с тем, количество энергии, относящееся к узкому спектральному интервалу,

пропорционально его ширине $d\nu$, что кладет практический предел сужению спектрального интервала.

Таким образом, величина светового потока $d\Phi$ данного спектрального интервала связана с шириной этого интервала $d\nu$ соотношением $d\Phi = E_\nu\, d\nu$, где E_ν — коэффициент, характеризующий *испускательную способность* нашего тела для частоты ν.

Мы можем, конечно, представить испускательную способность не в функции частоты ν, а в функции длины волны λ, т.е. построить график не E_ν, а E_λ (рис. 36.3 *б*). Поскольку площади как под той, так и под другой кривой определяют интегральную энергию излучения, то рационально выбрать масштабы так, чтобы площади эти были равны. Выделяя каждый раз площадку, дающую величину одного и того же светового потока $d\Phi$, приходящегося на интервал частот $d\nu$ или интервал соответствующих длин волн $d\lambda$, найдем

$$d\Phi = E_\nu\, d\nu = E_\lambda\, d\lambda,$$

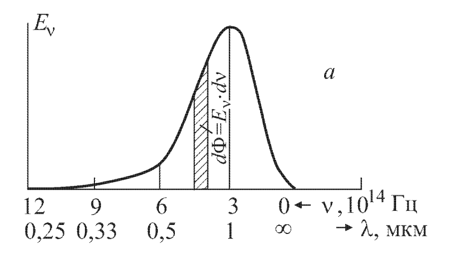
$$\text{т.е.}\quad E_\nu = E_\lambda \frac{d\lambda}{d\nu}.$$

Так как $\lambda\nu = c$ (c — скорость света), то

$$\frac{d\lambda}{d\nu} = -\frac{c}{\nu^2} = -\frac{\lambda^2}{c},$$

причем знак минус не имеет существенного значения, ибо он показывает только, что с возрастанием ν убывает λ.

Итак, $E_\nu = E_\lambda \lambda^2/c$, т.е. при переходе от кривой E_ν к кривой E_λ вид кривой трансформируется (см. рис. 36.3). В частности, положение максимумов на той и другой кривой соответствует разным частотам (длинам волн). Поэтому всегда надлежит указывать, какая из кривых имеется в виду. В теоретических расчетах чаще встречается кривая E_ν, в результатах экспериментальных измерений — чаще E_λ.



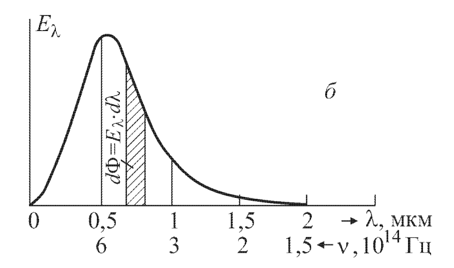


Рис. 36.3. Спектральная зависимость испускательной способности черного тела при $T = 2900$ К: *а* — зависимость E_ν от ν, выраженная в равномерной шкале частот; *б* — зависимость E_λ от λ, выраженная в равномерной шкале длин волн. Площадь заштрихованного участка дает поток $d\Phi = E_\lambda d\lambda = E_\nu d\nu$, приходящийся на интервал частот $d\nu$ или соответствующий интервал длин волн $d\lambda$

Опыт показывает далее, что E_ν (равно как и E_λ) в сильной степени зависит от *температуры* испускающего тела, так что испускательная способность $E_{\nu,T}$ есть функция частоты и температуры. Тот факт, что $E_{\nu,T}$ зависит от температуры излучающего тела и не зависит от температуры окружающих тел, есть физическое выражение идеи Прево

о динамическом равновесии между телами, обменивающимися лучистой энергией. Нагретое до температуры T тело излучает в единицу времени одинаковое количество энергии, независимо от того, окружено ли оно нагретыми или холодными телами, но тепловое равновесие установится на уровне, обусловленном балансом энергии между всеми этими излучателями.

Итак, испускательную способность тела $E_{\nu,T}$ можно определить по измерению потока энергии, посылаемого единицей поверхности тела во все стороны, согласно соотношению

$$d\Phi = E_{\nu,T}\, d\nu. \tag{196.1}$$

Зная испускание тела в каждом спектральном участке, можно без труда вычислить суммарное излучение, проинтегрировав (196.1) по всем частотам:

$$E_T = \int d\Phi = \int\limits_0^\infty E_{\nu,T}\, d\nu. \tag{196.2}$$

Вместе с тем, если на единицу поверхности тела падает световой поток $d\Phi$, то часть этого потока $d\Phi'$ будет поглощаться телом. *Поглощательной способностью* тела A называют отношение поглощенного потока $d\Phi'$ к падающему $d\Phi$, т.е.

$$A = \frac{d\Phi'}{d\Phi}\,.$$

Само собой разумеется, что и в этом случае имеется в виду поток в узком спектральном интервале $d\nu$ (квазимонохроматический), ибо поглощательная способность тел также зависит от длины волны. Опыт показывает также, что A зависит и от температуры и, таким образом, поглощательная способность тела есть функция частоты и температуры тела. $A_{\nu,T}$ по принятому определению есть всегда правильная дробь, и максимальное значение $A_{\nu,T}$ — единица.

Кирхгоф назвал тела, для которых $A_{\nu,T} = 1$ для всех *частот и температур*, *абсолютно черными* или *абсолютно поглощающими* телами. Сажа, равно как и платиновая чернь, приближается по своим свойствам к абсолютно черному телу.

Закон Кирхгофа касается соотношения между $E_{\nu,T}$ и $A_{\nu,T}$ и гласит: *отношение испускательной и поглощательной способностей тела не зависит от природы тела*, т.е. $\dfrac{E_{\nu,T}}{A_{\nu,T}}$ есть универсальная для всех тел функция частоты и температуры, тогда как $E_{\nu,T}$ и $A_{\nu,T}$, взятые отдельно, могут меняться чрезвычайно сильно при переходе от одного тела к другому.

Обозначив для абсолютно черного тела испускательную способность через $\varepsilon_{\nu,T}$, а поглощательную способность — через $\alpha_{\nu,T}$, можно написать закон Кирхгофа в виде

$$\frac{E_{\nu,T}}{A_{\nu,T}} = \frac{\varepsilon_{\nu,T}}{\alpha_{\nu,T}} = \varepsilon_{\nu,T}, \tag{196.3}$$

так как $\alpha_{\nu,T} = 1$.

Таким образом, универсальная функция Кирхгофа есть не что иное, как *испускательная способность абсолютно черного тела.* Рассуждения Кирхгофа, приведшие его к формулировке своего закона,

имеют очень общий характер и покоятся на втором законе термодинамики, в силу которого тепловое равновесие, установившееся в изолированной системе, нельзя нарушить обменом тепла между частями системы.

Представим себе замкнутую оболочку, внутренняя часть которой эвакуирована, а стенки представляют собой черное тело, характеризующееся коэффициентами $E_{\nu,T} = \varepsilon_{\nu,T}$ и $\alpha_{\nu,T} = 1$. Пусть температура стенок повсюду сделана одинаковой и равной T. Отдельные участки стенок обмениваются излучением, но этот обмен не способен нарушить тепловое равновесие. Следовательно, излучение, которое посылает в течение единицы времени какой-то участок стенки $d\sigma$ внутрь полости (т.е. $\varepsilon\, d\sigma$), равняется излучению, поглощаемому им за то же время. Но так как коэффициент поглощения этого участка равен 1, то величина $\varepsilon\, d\sigma$ характеризует излучение, доходящее до нашего участка за единицу времени от всей остальной оболочки. Вообразим теперь, что наш участок стенки $d\sigma$ заменен участком [1] той же температуры, но отличным от черного и имеющим испускательную и поглощательную способности E и A. За единицу времени данный участок по-прежнему будет получать излучение, равное $\varepsilon\, d\sigma$, ибо это — излучение, идущее от всей остальной части оболочки, оставшейся неизменной. Из этого излучения наш участок поглотит энергию $A\varepsilon\, d\sigma$. За то же время участок излучит $E\, d\sigma$. Так как тепловое равновесие (постоянство температуры стенок всей оболочки) не должно нарушаться тепловым обменом, то, очевидно,

$$E\, d\sigma = A\varepsilon\, d\sigma \quad \text{или} \quad \frac{E}{A} = \varepsilon.$$

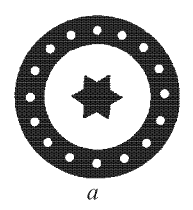
Закон Кирхгофа доказан, таким образом, для любого тела. Из приведенных рассуждений ясно, что замененный нами внутри стенки полости участок $d\sigma$ для наблюдателя, следящего за посылаемым этим участком излучением, ничем не отличается от других «черных» участков стенки. Действительно, в единицу времени он испускает внутрь полости излучение в количестве $E\, d\sigma$ и отражает из общего падающего на него потока излучения $(1 - A)\varepsilon\, d\sigma$. Общее количество посылаемого им излучения есть $d\sigma[E + (1 - A)\varepsilon] = \varepsilon\, d\sigma$ (в силу доказанного выше соотношения $E/A = \varepsilon$), т.е. равно излучению любого *черного* участка стенки того же размера.

§ 197. Применение закона Кирхгофа. Абсолютно черное тело

Закон Кирхгофа и многочисленные его следствия хорошо подтверждаются на опыте. Например, внося в горячее несветящееся водород-

[1] Само собой разумеется, что участок этот не должен ничего пропускать, ибо в противном случае часть излучения будет уходить наружу, и рассматриваемая система не будет изолированной. Так как пропускаемость нашего тела равна нулю, то коэффициент отражения его равняется $(1 - A)$, т.е. из всей падающей на него энергии оно *поглощает долю* A и *отражает долю* $1 - A$.

ное пламя кусок расписанного фарфора с темным рисунком на белом поле, можно видеть при накаливании фарфора яркий (сильно излучающий) рисунок на сравнительно темном поле (рис. 36.4). Но если внести такой кусок внутрь закрытой полости (печки), снабженной лишь небольшим отверстием для наблюдения, и сильно прогреть стенки печки, то мы не сможем различить рисунок на раскаленном черепке, излучающем практически равномерно: светлые места меньше излучают, но больше отражают, темные места — наоборот.



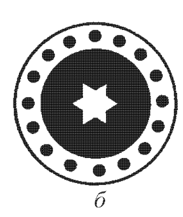


Рис. 36.4. Темные места разрисованного фарфора (*а*) при накаливании излучают сильнее (*б*)

Необходимо, однако, отметить, что, согласно закону Кирхгофа, тело, сильнее поглощающее, должно и больше испускать только при условии, что сравнение производится при *одинаковой* температуре. Это условие соблюдено в описанном выше опыте с расписанным фарфором, отдельные части которого нагреты до одной температуры; то же имеет место и в ряде других аналогичных опытов: при накаливании платиновой пластинки, до половины покрытой платиновой чернью, черные части светятся гораздо ярче; капля фосфорнокислого натрия на платиновой проволочке остается темной, хотя проволочка ярко раскалена, ибо капля даже при высокой температуре остается прозрачной для видимых лучей, и т.д. Поэтому лишь кажущимся парадоксом является известный опыт, в котором в водородное пламя вводятся рядом куски извести и угля и известь оказывается гораздо более ярко раскаленной, чем уголь. Конечно, поглощательная, а следовательно, и испускательная способность угля гораздо больше, чем у извести для всех длин волн, и поэтому при равной температуре уголь будет светиться во всем спектральном интервале ярче, чем известь. Но в описанных условиях опыта температура угля оказывается гораздо ниже температуры извести. Причина лежит отчасти в химических процессах, сопровождающихся поглощением тепла, отчасти в том, что уголь именно в силу своей большой испускательной способности излучает много энергии во всем спектре, в том числе очень много и в инфракрасной области. Этот огромный непрерывный расход энергии и приводит к тому, что температура, до которой раскаляется уголь, оказывается значительно ниже, чем температура самого пламени или извести, не несущей таких больших потерь энергии, ибо ее испускательная способность селективна и, в частности, в инфракрасной части очень мала.

Чрезвычайно поучительный случай применения закона Кирхгофа был описан Вудом. Как известно, плавленый кварц, т.е. стеклообразная масса, изготовленная из чистых расплавленных кристаллов кварца, обладает хорошей прозрачностью в широком интервале длин волн. В соответствии с этим он плохо светится при накаливании. Вуду удалось приготовить тонкие столбики кварца, окрашенные ионами некоторых редких земель, например неодима, дающего ясные полосы

поглощения; при нагревании такого кварца в пламени бунзеновской горелки можно было наблюдать прекрасный полосатый спектр, состоящий из красной, оранжевой и зеленой полос, разделенных темными промежутками. Области максимумов свечения соответствовали областям поглощения *окрашенного* кварца при температуре, близкой к температуре свечения. При достаточно высокой температуре, впрочем, и чистый плавленый кварц начинает заметно поглощать и испускать свет, так что при температуре около 1500 °C кварц светится белым светом.

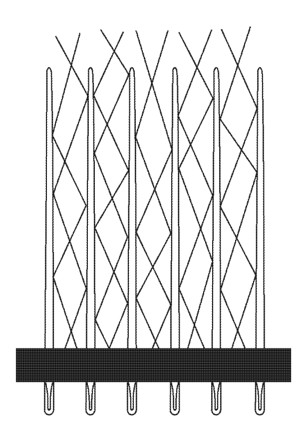


Рис. 36.5. Щетка из полированных иголок вследствие многократных отражений обладает большой поглощательной и испускательной способностью

Закон Кирхгофа имеет совершенно общее значение, независимое от механизма, обусловливающего поглощение: всякая сильно поглощающая система будет и сильно излучать, независимо от того, обусловлено ли сильное поглощение свойствами поверхности или устройством системы как целого. Так, например, щетка из стальных полированных иголок, расположенных, как показано на рис. 36.5, будет сильно поглощать свет, ибо луч, попавший между иголками, претерпит многократное отражение от разных иголок, прежде чем сможет выйти наружу. Таким образом, хотя поглощение поверхностью полированной иголки невелико, общее поглощение системы будет значительно, так как произойдет для каждого луча многократно. При нагревании такая система в согласии с законом Кирхгофа будет и сильно испускать, причем и здесь механизм значительного испускания связан с тем, что каждый участок поверхности иголки не только непосредственно излучает, но и отражает наружу многочисленные лучи, испускаемые другими участками.

На таком же принципе основано устройство тела, наиболее приближающегося по своим свойствам к абсолютно черному. Оно изготовляется в виде почти замкнутой полости (рис. 36.6), снабженной маленьким отверстием, диаметр которого не больше $1/10$ поперечника полости, так что отверстие видно из точек стенки под телесным углом, не большим 0,01 ср. Излучение, проникающее через отверстие, падает на стенки полости, частично поглощается ими, частично рассеивается или отражается и вновь попадает на стенки. Вследствие малых размеров отверстия луч должен претерпеть много отражений и рассеяний, прежде чем он сможет выйти из отверстия обратно наружу. Повторные поглощения на

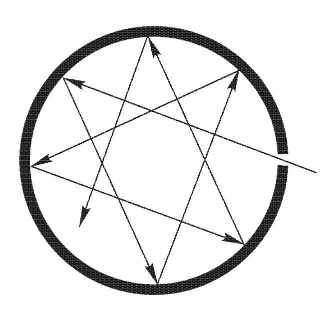


Рис. 36.6. Абсолютно черное тело

стенках приводят к тому, что практически весь свет любой частоты поглощается такой полостью (см. упражнение 223).

Поглощающая способность хорошо выполненного черного тела описанного устройства практически не отличается от единицы для любой длины волны. Согласно закону Кирхгофа, и испускательная ее способность очень близка к $\varepsilon_{\nu,T}$, где T означает температуру стенок полости. Во всех исследованиях с абсолютно черным телом пользуются именно описанным устройством, значительно превосходящим по своим характеристикам поверхность, покрытую платиновой чернью или сажей. Следует, впрочем, отметить, что высокие поглощающие свойства этих материалов отчасти объясняются их пористостью, особенно для сажи, благодаря чему свет, попавший на них, испытывает несколько отражений, прежде чем получает возможность выйти из толщи материала. Таким образом, чернота сажи особенно повышается благодаря ее пористости. Этим же объясняется насыщенный цвет бархата или вообще тканей с длинным ворсом, в противоположность белесоватому тону гладких тканей, отражающих разные длины волн; насыщенный цвет реющих знамен, драпировок, ниспадающих глубокими складками, и т.д.

§ 198. Излучение нечерных тел

Нечерными телами в противоположность черным называют тела с поглощательной способностью $A_{\nu,T}$, меньшей единицы. К этой категории принадлежат практически все тела, начиная от сажи, коэффициент поглощения которой близок к 0,99, и кончая хорошо полированными металлами, для которых коэффициент поглощения не превосходит нескольких процентов.

Согласно основному соотношению Кирхгофа, $E_{\nu,T} = \varepsilon_{\nu,T} A_{\nu,T}$. Следовательно, для нечерных тел $E_{\nu,T} < \varepsilon_{\nu,T}$, ибо $A_{\nu,T} < 1$. Это значит, что для *любой* длины волны испускательная способность нечерного тела не может быть больше испускательной способности черного тела при одинаковой температуре. Сам вид функции $E_{\nu,T}$ может отличаться от функции $\varepsilon_{\nu,T}$ вследствие того, что поглощательная способность $A_{\nu,T}$ зависит от ν, т.е. обладает избирательным (селективным) ходом.

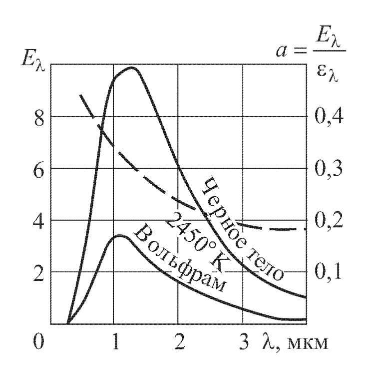


Рис. 36.7. Испускательная способность черного тела и вольфрама при температуре 2450 К

В соответствии с этим и излучение нечерного тела может иметь селективный характер.

Примером такого практически важного селективно излучающего вещества является вольфрам. Рисунок 36.7 показывает зависимость испускательной способности вольфрама E_λ при $T = 2450$ К от длины волны. Для сравнения там же приведена кривая зависимости ε_λ от λ при той же темпера-

туре для черного тела. Штриховая кривая показывает отношение ординат обеих кривых $E_\lambda/\varepsilon_\lambda$. Из хода штриховой кривой видно, во-первых, что испускание вольфрама для всех длин волн меньше, чем испускание черного тела ($E_\lambda < \varepsilon_\lambda$) и, во-вторых, что вольфрам обладает заметным селективным излучением в видимой части спектра (отношение $a = E_\lambda/\varepsilon_\lambda$ быстро растет с уменьшением λ). Последнее обстоятельство делает вольфрам выгодным материалом для осветительных ламп накаливания (см. гл. XXXVII).

Напомним еще раз, что закон Кирхгофа относится только к температурному излучению, и в случае, когда свечение обусловлено другими причинами, он не имеет силы. Так, например, при фото- или хемилюминесценции интенсивность свечения в целом ряде спектральных областей гораздо выше, чем у температурного излучения черного тела при температуре люминесцирующего тела. Закон Кирхгофа настолько характерен для температурного излучения, что может служить самым надежным критерием для распознавания природы свечения: свечение, не подчиняющееся закону Кирхгофа, заведомо не является температурным.

§ 199. Закон Стефана–Больцмана

Закон Кирхгофа $E_{\nu,T}/A_{\nu,T} = \varepsilon_{\nu,T}$ [1]) ставит в центр внимания теории теплового излучения функцию $\varepsilon_{\nu,T} = f(\nu, T)$, представляющую собой испускательную способность черного тела. Определение вида этой функции явилось основной задачей учения о температурном излучении. Решение задачи было получено не сразу. Сначала был установлен теоретически и экспериментально закон, определяющий суммарное излучение черного тела (закон Стефана–Больцмана); затем были определены некоторые основные черты искомой функции (закон Вина), найден весьма точный экспериментальный ход ее в зависимости от ν для разных T и, наконец, после ряда неудачных попыток, имевших, однако, огромное значение для понимания вопроса (В.А. Михельсон, Рэлей–Джинс, Вин, Лорентц), удалось найти окончательное теоретическое решение задачи (Планк, 1900 г.) Необходимо упомянуть, что оно было найдено только путем решительного принципиального изменения основных положений физики, путем создания *теории квантов*, заложившей принципиально новую базу физической науки. Эта новая теория оказалась столь важной и плодотворной, что дальнейшее развитие ее составило главное содержание теоретической физики за все последующие годы и охватило почти все области нашей науки.

Первым этапом, как сказано, явилось нахождение закона, устанавливающего зависимость *суммарного* или *интегрального* излучения (т.е. общего излучения всех длин волн) от температуры. Стефан

---

[1]) Мы пишем все формулы теории излучения для испускательной способности $E_{\nu,T}$. Нередко их пишут для плотности излучения $u_{\nu,T}$. Нетрудно найти соотношение $u = 4E/c$, где c — скорость света (см. упражнения 222 и 224).

(1879 г.) на основании собственных измерений, а также анализируя данные измерений других исследователей, пришел к заключению, что суммарная энергия, испускаемая с 1 см^2 в течение 1 с, пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры излучателя. Стефан формулировал свой закон для излучения *любого* тела, однако последующие измерения показали неправильность его выводов. В 1884 г. Больцман, основываясь на термодинамических соображениях и исходя из мысли о существовании давления лучистой энергии, пропорционального ее плотности, теоретически показал, что суммарное излучение *абсолютно черного тела* должно быть пропорционально четвертой степени температуры, т.е.

$$\varepsilon_T = \int\limits_0^\infty \varepsilon_{\nu,T}\,d\nu = \sigma T^4, \qquad (199.1)$$

где σ — постоянная. Таким образом, вывод Стефана справедлив, но лишь для абсолютно черных тел, с которыми Стефан не экспериментировал. Лишь позже, когда было построено абсолютно черное тело по принципу, описанному в § 197, оказалось возможным исследовать экспериментально выводы Больцмана. Тщательные измерения позволили подтвердить закон Больцмана и определить постоянную σ этого закона. По современным измерениям

$$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-12}\ \text{Вт/см}^2 \cdot \text{град}^4.$$

По отношению к нечерным телам закон Стефана сохранить нельзя. Были попытки придать ему более общую форму $E = BT^n$, где коэффициент B и показатель n должны быть определены экспериментально для каждого тела. Так, вблизи $T = 1000\ K$ для платины удовлетворительные результаты получаются из формулы

$$E_{\text{Pt}} = 3{,}56 \cdot 10^{-15} T^{4{,}77},$$

а для вольфрама

$$E_{\text{W}} = 5{,}9 \cdot 10^{-17} T^{5{,}35}.$$

Однако наблюдения при разных температурах показывают, что ни коэффициент B, ни показатель n не остаются постоянными. Так, для вольфрама около $T = 2000$ К имеем уже новые значения: $B = 2{,}4 \cdot 10^{-15}$ и $n = 4{,}85$.

Таким образом, закон Стефана–Больцмана имеет силу только для абсолютно черного тела.

§ 200. Закон смещения Вина

Закон Стефана–Больцмана касается лишь интенсивности интегрального излучения черного тела и ничего не говорит относительно спектрального распределения энергии. Первым исследователем, пытавшимся теоретически определить вид функции $\varepsilon_{\nu,T}$, был В.А. Михельсон (Москва, 1887 г.). Хотя формула Михельсона не вполне удовлетворяла опытным данным, тем не менее установление ее сыграло известную роль в истории этого вопроса.

В 1893 г. Вин теоретически обосновал второй закон черного излучения, дающий указание на характер функции $\varepsilon = f(\nu, T)$, хотя и не позволивший полностью определить ее. Вин рассматривал термодинамически процесс сжатия излучения, заключенного внутри идеально зеркального сосуда, при уменьшении объема последнего и, принимая во внимание изменение частоты излучения, отражающегося от движущегося зеркала (принцип Доплера), пришел к выводу, что испускательная способность черного тела имеет вид

$$\varepsilon_{\nu,T} = c\nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right), \tag{200.1}$$

где c — скорость света в окружающей среде (в вакууме), а f — функция, для определения вида которой развитые Вином соображения оказались недостаточными.

Важный результат, достигнутый Вином, состоит в том, что температура входит в выражение для испускательной способности лишь в виде отношения ν/T. Уже это обстоятельство позволяет предвидеть некоторые особенности интересующей нас функции. Тщательные измерения ряда исследователей привели к установлению эмпирического хода функции $\varepsilon_{\nu,T}$ и позволили проверить теоретические выводы Вина.

Метод исследования состоял в изучении распределения энергии по спектру излучения, посылаемого абсолютно черным телом различной температуры. Схема опытов приведена на рис. 36.8. Здесь S — абсолютно черное тело заданной температуры, L — линза, концентрирующая излучение на щели монохроматора, снабженного дифракционной

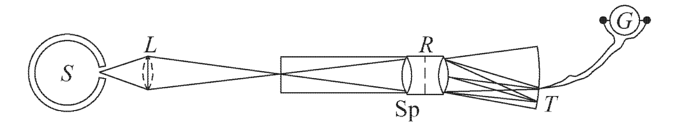


Рис. 36.8. Схема опытов по исследованию распределения энергии в спектре черного тела: S — черное тело; Sp — монохроматор; T — термоэлемент с гальванометром G

решеткой R. Приемником энергии служит чувствительный термоэлемент или болометр T.

Кривые, полученные в результате этих исследований, приведены на рис. 36.9. Они выражают $\varepsilon_{\lambda,T}$ в функции λ. Из рисунка видно, что $\varepsilon_{\lambda,T}$ для каждой температуры обладает максимумом. Для определения положения этого максимума в шкале λ перейдем в выражении закона Вина (200.1) от ν к λ, пользуясь соотношением $\varepsilon_\nu = \varepsilon_\lambda \lambda^2/c$ (см. § 196):

$$\varepsilon_{\lambda,T} = \frac{c^5}{\lambda^5} f\left(\frac{c}{\lambda T}\right).$$

Приравняв нулю производную $\dfrac{\partial \varepsilon_{\lambda,T}}{\partial \lambda}$, нетрудно видеть, что положение максимума $\lambda_{\max}$ удовлетворяет условию

$$T\lambda_{\max} = b, \tag{200.2}$$

где b не зависит от температуры. Приведенные на рис. 36.9 экспериментальные кривые подтверждают это заключение и дают возможность определить b. Современное значение $b = 0{,}2898$ см $\cdot$ град $= 2{,}898 \cdot 10^7$ Å$\cdot$град.

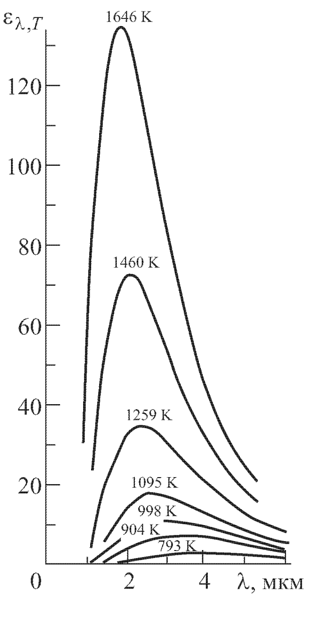


Рис. 36.9. Кривые распределения энергии в спектре черного тела для разных температур

В указанной форме закон Вина носит название *закона смещения*, ибо он показывает, что положение максимума функции $\varepsilon_{\lambda,T}$ по мере возрастания температуры смещается в область коротких волн.

В соответствии со сказанным выше можно решить задачу о положении максимума на кривой спектрального распределения в координатах ν/T, т.е. соответствующего формуле (200.1) Определяя положение максимума этой функции из условия $\dfrac{\partial \varepsilon_{\nu,T}}{\partial \nu} = 0$, найдем, что оно соответствует соотношению

$$\frac{Tc}{\nu_{\max}} = T\lambda^*_{\max} = a,$$

где a не зависит от T и согласно измерениям $a = 0{,}5100$ см$\cdot$град.

Найденное положение максимума на кривой $\varepsilon_{\lambda,T}$ соответствует длине волны, отличающейся от положения максимума на кривой $\varepsilon_{\nu,T}$ в 1,76 раза (см. упражнение 232).

То обстоятельство, что положение максимума на кривой распределения энергии зависит от выбора координат этой кривой, разъяснено в § 198. Оно связано с тем, что в одном выражении мы делим кривую на полосы равной ширины по λ (ширина полосы $\Delta\lambda$), а в другом — на полосы равной ширины по ν (ширина полосы $\Delta\nu$).

§ 201. Формула излучения Планка

Многочисленные попытки теоретически установить закон черного излучения, приведшие, как мы видели, к установлению важных частных законов (Больцман, Вин), не могли дать общего решения задачи и приводили к заключениям, согласующимся с опытом, только в ограниченном интервале T и ν. Причина неудач оказалась лежащей чрезвычайно глубоко. Законы классической электродинамики, при помощи которых делались все эти исследования, оказались лишь приближенно правильными и давали неверный результат при рассмотрении элементарных процессов, обусловливающих тепловое излучение.

Если осуществить теоретическое черное тело при помощи бесконечной совокупности гармонических осцилляторов, каждый из которых дает отдельную монохроматическую линию, а все вместе —

сплошное черное излучение, то, пользуясь законами, управляющими поведением этих осцилляторов, можно прийти к закону черного излучения такой системы. Общие же соображения, лежащие в основе закона Кирхгофа, показывают, что закон излучения, найденный для одного черного тела, справедлив и для любого другого черного тела, т.е. все они дают один и тот же тип излучения — черное излучение.

Идя по этому пути, Планк не получил, однако, закона, согласного с опытом, и, анализируя положение, пришел к выводу, что причина неудачи лежит в неприменимости законов классической физики к таким атомным осцилляторам.

По классическим законам осциллятор частоты ν может заключать в себе любое количество энергии, ибо энергия осциллятора пропорциональна квадрату амплитуды; в соответствии с этим и излучающий осциллятор может испустить за единицу времени любое количество энергии. Эти простые законы согласно заключению Планка не имеют места. Гармонический осциллятор частоты ν может обладать только таким количеством энергии, в котором содержится целое число элементарных порций величиной $h\nu$ каждая, где h — универсальная постоянная, равная $6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с. Поэтому и излучение осциллятора идет порциями $h\nu$ (или целыми кратными $h\nu$).

Эти новые квантовые законы не стоят в противоречии с классическими в той области низких частот (например, радиочастот), для которой, собственно говоря, и были установлены классические законы на основе электромагнитной теории Максвелла.

Действительно, если ν не очень велико, то порция $h\nu$ настолько мала, что в наших опытах мы не можем установить, содержит ли осциллятор целое или дробное число этих порций. Так, например, для $\lambda = 3$ мм величина $h\nu$ составляет $6{,}626 \cdot 10^{-23}$ Дж, и ни в одном опыте со сравнительно грубыми осцилляторами, настроенными на эту длину, мы не в состоянии оценить, является ли энергия осциллятора кратной этой малой величине [1]). Наоборот, для атомных осцилляторов частота, а значит, и элементарные порции энергии соответственно больше, а точность измерений атомных процессов такова, что расхождение между классическими и квантовыми представлениями становится весьма ощутительным: выводы приближенных классических представлений оказываются в резком противоречии с опытом, тогда как рассуждения, учитывающие квантовую теорию, приводят к превосходному согласию с ним.

Так, при расчете совокупности гармонических осцилляторов, подчиняющихся классическим законам, Планк нашел для функции Кирхгофа выражение

$$\varepsilon_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2}\, kT, \tag{201.1}$$

известное и ранее (формула Рэлея–Джинса). Учитывая же новые

[1]) В современном развитии квантовой теории выяснилось, что осциллятор частоты ν обладает энергией $h\nu/2 + nh\nu$, где n — целое число, но это не меняет дела.

квантовые законы, управляющие осциллятором, он получил

$$\varepsilon_{\nu,T} = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2}\,\frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1}\,. \qquad (201.2)$$

Объемная спектральная плотность $u_{\nu,T}$ энергии излучения с частотой ν связана с испускательной способностью $\varepsilon_{\nu,T}$ соотношением

$$\varepsilon_{\nu,T} = \frac{u_{\nu,T}\,c}{4}$$

(см. упражнение 222). Поэтому согласно Планку

$$u_{\nu,T} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\,\frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1}\,. \qquad (201.3)$$

В этих формулах $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с означает скорость света, $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/град — постоянная Больцмана (определяющая в классической теории среднюю энергию осциллятора kT при абсолютной температуре T) и $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка. Если ν мало́ (или T велико), так что $h\nu/kT$ мало́ сравнительно с единицей, то формулу (201.2) можно упростить. Действительно, разлагая $\exp(h\nu/kT)$ по степеням $h\nu/kT$ и пренебрегая высшими степенями, найдем формулу, совпадающую с (201.1).

Это совпадение показывает в согласии с основными допущениями теории квантов, что в области низких частот ее выводы не отличаются от выводов классической теории. Классическая теория оказывается лишь приближением к действительности, приближением, вполне удовлетворительным для того круга явлений, с которыми имеет дело макроскопическая электродинамика, т.е. электродинамика систем, состоящая из многих атомов или молекул. По-видимому, даже движения ионов, т.е. элементарных зарядов с большой массой (по сравнению с электроном), еще довольно удовлетворительно описываются классическими электродинамикой и механикой, хотя точность современных измерений и здесь позволяет установить отступления (опыты по дифракции молекулярных пучков). Но поведение электронов внутри атомов и молекул должно описываться при помощи квантовых законов механики и электродинамики; применение же к ним законов, имеющих силу для макромира, приводит к резким противоречиям с опытом.

Формула (201.2), полученная Планком, дает превосходное согласие с результатами самых тщательных экспериментальных исследований зависимости излучательной способности черного тела от ν и T и является, таким образом, полным решением основной задачи, поставленной Кирхгофом.

Нетрудно убедиться в том, что формула Планка заключает в себе упоминавшиеся выше законы черного излучения, и именно закон Стефана–Больцмана и закон Вина. При этом из формулы Планка не только получается внешняя форма этих законов, но и входящие в них постоянные σ и b могут быть вычислены из универсальных постоянных h, k, c (см. упражнения 230 и 232). Обратно, пользуясь экспериментально найденными значениями σ и b, можно вычислить значения

h и k. Именно таким путем и было получено первое числовое значение постоянной Планка. Впоследствии был указан целый ряд путей определения h, покоящихся на совершенно иных физических явлениях (ср. гл. XXXII). Все они приводят к одинаковым значениям.

Изложенный путь вывода формулы Планка был исторически первым. Впоследствии задача неоднократно решалась разными способами как самим Планком, так и другими исследователями. При этом основные предположения были сформулированы не в таком резком противоречии с классическими законами, как это было сделано выше, хотя, конечно, принципиально новое допущение о квантовом характере процессов сохранялось. Простой и поучительный вывод формулы Планка, покоящийся на представлении о поглощении и испускании энергии атомом типа атома Бора, был дан Эйнштейном (см. § 211).

Глава XXXVII

ПРИМЕНЕНИЯ ЗАКОНОВ ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

§ 202. Оптическая пирометрия

Основываясь на законах температурного излучения, мы можем определять температуру раскаленных тел. Если испускающее тело является черным (или достаточно к нему приближается), то для определения его температуры можно воспользоваться законами черного излучения. По существу дела для сильно нагретых тел (выше 2000 °C) измерения температуры при помощи термоэлементов, болометров и т.п. не особенно достоверны. Таким образом, в этой области температур и выше единственным надежным способом измерения температуры являются способы, основанные на законах черного излучения. Эти способы проверены не только сопоставлением с данными других термометрических методов в той области, где последние надежны, но и путем изучения относительного распределения энергии по спектру, что позволяет найти температуру излучателя путем сопоставления экспериментальных данных с теоретическими формулами.

а. Радиационные пирометры и радиационная температура. Считая постоянные законов Больцмана (σ) и Вина (b) надежно установленными, мы можем, пользуясь ими, измерять и более высокие температуры, чем те, для которых они были непосредственно измерены (экстраполяция к более высоким температурам). При использовании закона Больцмана надо со всеми предосторожностями измерить суммарное излучение, посылаемое к приемному аппарату, учитывая величину телесного угла действующего излучения, потери на отражение и поглощение в приборе и т.д. В настоящее время существуют и сравнительно простые переносные приборы, позволяющие выполнять подобные измерения с достаточной точностью. Устройство этих так называемых *радиационных пирометров* (рис. 37.1) сводится к возможности проецировать изображение ис-

точника на приемник аппарата так, чтобы приемник s всегда был полностью покрыт изображением источника и излучение входило в прибор под постоянным телесным углом, определяемым размерами прибора.

При измерениях наводят прибор на более или менее отдаленный источник S достаточного размера при помощи объектива L, позволяющего получить резкое изображение источника на приемнике. Резкость изображения контролируется при помощи окуляра, не показанного на

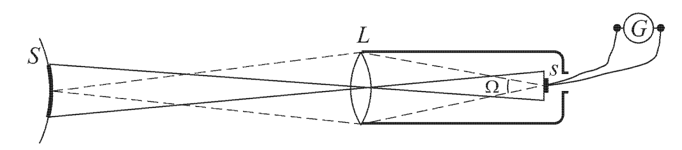


Рис. 37.1. Схема радиационного пирометра для измерения радиационной температуры

чертеже. При таких условиях энергия, получаемая пирометром, будет пропорциональна яркости источника независимо от расстояния между ними, подобно тому как это имеет место при рассматривании глазом удаленных светящихся источников (см. упражнение 234). Таким образом, показания пирометра будут зависеть от яркости, а следовательно, и от температуры наблюдаемого черного тела. Проградуировав предварительно пирометр по черному телу с известной температурой, можно использовать его показания для измерения исследуемой температуры.

В качестве приемника в радиационных пирометрах чаще всего применяют термопару или болометр, но существуют также пирометры с биметаллической спиралью, изгибающейся при нагревании, с газовым термометром и т.д. Если исследуется не черное тело, то показания радиационного пирометра дают не истинную температуру его, а так называемую *радиационную* температуру T_r, под которой понимают температуру такого черного тела, суммарная радиация которого равна радиации изучаемого тела. Между истинной температурой тела T и его радиационной температурой T_r нетрудно установить связь, если известно отношение суммарной испускательной способности измеряемого тела к испускательной способности черного тела при той же температуре, т.е. отношение $Q_T = E_T/\varepsilon_T$. По самому определению величина Q_T меньше единицы. Она обычно несколько увеличивается с повышением температуры.

Значения Q_T хорошо известны для многих технически важных материалов. Для металлов они невелики (от 0,1 до 0,3), для окислов металлов и для угля Q_T значительны (доходя до 0,9). Некоторые из этих значений приведены в табл. 37.1.

Зная Q_T и радиационную температуру нагретого материала, мы можем найти его истинную температуру при помощи очевидного соотношения $T = T_r/\sqrt[4]{Q_T}$ (см. упражнение 235). Так как Q_T всегда меньше единицы, то радиационная температура тела всегда меньше его истинной температуры.

Таблица 37.1

Значения Q_T для ряда веществ

Вещество	Температура	Q_T	Вещество	Температура	Q_T
Вольфрам	1300	0,15	Железо	1500	0,11
	2300	0,29	Окись железа	1500	0,89
	3300	0,34	Никель	1500	0,06
Молибден	1300	0,12	Окись никеля	1500	0,85
	2300	0,23	Платина	1500	0,15
Тантал	2300	0,25	Медь расплавленная	1400	0,15
Уголь	1300	0,52			
Серебро	1300	0,04	Окись меди	1400	0,54

б. Цветовая температура и распределение энергии в спектре излучающего тела. Если найдено распределение энергии в спектре черного тела, то известно положение максимума на кривой энергии $\varepsilon_{\lambda,T}$ и температуру можно определить на основании закона смещения Вина при помощи соотношения $\lambda_{\max}T = b$.

Так, для Солнца с учетом поправок на поглощение в земной атмосфере найдено $\lambda_{\max} = 470$ нм, что соответствует температуре 6150 К, если считать Солнце черным телом. Полученные величины имеют характер средних, ибо для центра солнечного диска получается $\lambda_{\max}$ несколько меньшее, чем для краев.

Если излучающее тело не является черным, применение формулы Вина не имеет смысла. Иногда, однако, распределение энергии в спектре таких тел можно практически отождествить с распределением энергии некоторого черного тела температуры T_c. В этом случае излучающее тело имеет такой же цвет, как черное тело температуры T_c. Нередко называют определенную таким образом T_c *цветовой* температурой тела.

Отсюда ясно, что для тел, характер излучения которых сильно отличается от излучения черного тела (например, для тела с ясно выраженными областями селективного излучения), понятие цветовой температуры не имеет смысла, ибо цвет таких тел можно только очень грубо воспроизвести при помощи черного тела. В тех случаях, когда определение цветовой температуры возможно (так называемые «серые тела», например, уголь, окислы, некоторые металлы), для ее отыскания необходимо произвести исследование распределения энергии в спектре при помощи соответствующих спектральных приборов. Рисунок 37.2 воспроизводит результаты такого исследования для Солнца; одновременно на нем нанесены кривые распределения для черного тела при температурах 6000 и 6500 К. Рисунок показывает, что отождествление Солнца с черным телом может быть сделано только довольно приблизительно. С этим приближением в качестве оценки цветовой температуры Солнца получаем примерно 6500 К.

Для нахождения истинной температуры по цветовой температуре нечерного тела надо знать монохроматическую испускательную способность его для разных длин волн, т.е. отношение испускательной способности изучаемого тела и черного тела для данной длины волны λ и температуры T. Обычно ограничиваются установлением ее для двух длин волн: $\lambda = 660$ нм и $\lambda = 470$ нм и пользуются упрощенным методом сравнения найденных отношений в обеих указанных областях спектра (см. упражнение 237).

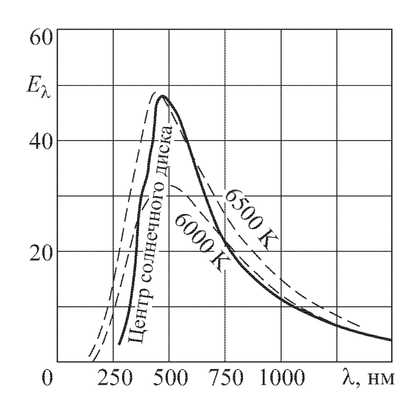


Рис. 37.2. Распределение энергии в спектре Солнца и в спектрах черного тела при температурах 6000 и 6500 K

в. Яркостная температура и пирометр с исчезающей нитью. Наиболее распространенный способ оптического определения температуры основывается на сравнении излучения нагретого тела в одном определенном спектральном участке λ с излучением черного тела с той же длиной волны. Сравнение это с наибольшим удобством осуществляется при помощи пирометра с исчезающей нитью, устроенного следующим образом. В фокусе объектива O (рис. 37.3) помещается электрическая лампа L с баллоном из хорошего стекла (лучше всего в виде бочонка с

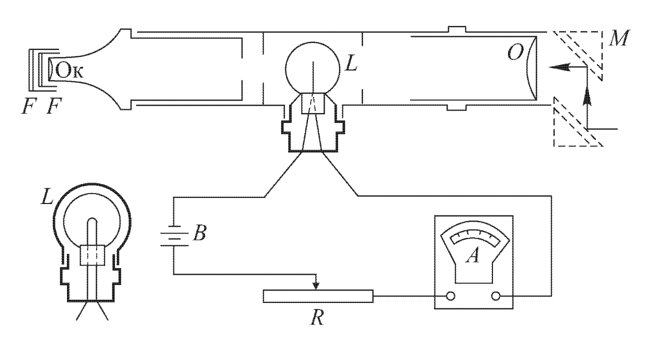


Рис. 37.3. Схема пирометра с исчезающей нитью для определения яркостной температуры. Слева показано устройство лампы L

плоскими донышками) и с нитью, изогнутой в форме полукруга. Окуляр Ок позволяет наблюдать одновременно среднюю часть нити и изображение поверхности исследуемого источника, проецируемого при помощи O и зеркал M в плоскость нити. Красные стекла FF, помещенные между окуляром и глазом, пропускают более или менее монохроматическую часть света, испускаемого источником и

нитью. Обычно пропускаемая область соответствует $\lambda = 660{,}0$ нм. Лампа питается током от батареи B, регулируемым реостатом R; ток отсчитывается по прецизионному амперметру A. При измерении температуры регулируют ток в нити до тех пор, пока последняя не исчезает на фоне изображения. При этой силе тока I яркости излучения нити и источника для $\lambda = 660{,}0$ нм совпадают и, следовательно, для данного λ совпадают и их испускательные способности.

Если предварительной градуировкой при помощи наблюдения черного тела различной температуры установлено, каким температурам черного тела соответствует исчезновение нити при разных силах тока I, то по показаниям амперметра мы получаем возможность судить, какой температуре черного тела S_λ соответствует излучение наблюдаемого источника. Если бы источник был также черным телом, то найденная температура S_λ была бы его истинной температурой. В противном случае найденная температура характеризует температуру S_λ черного тела, имеющего для $\lambda = 660{,}0$ нм ту же яркость, что и излучаемое тело при условиях наблюдения. Поэтому S_λ носит название *яркостной температуры* источника.

Если известно отношение Q_{660} яркости излучаемого тела для $\lambda = 660$ нм к яркости черного тела при той же температуре, то мы можем по яркостной температуре найти и истинную температуру.

Отношение Q_{660} определено для многих технически важных материалов; оно несколько зависит от T; некоторые из этих значений собраны в табл. 37.2.

Таблица 37.2

Значения Q_{660} для ряда веществ

Вещество	Температура в K	Q_{660}
Молибден	1300	0,40
	2300	0,36
Тантал	1300	0,44
	3200	0,38
Уголь	1500	0,89
	2500	0,84
Серебро	при температуре плавления	0,05
	расплавленное	0,07
Железо	при температуре плавления	0,36
Окись железа	1500	0,92
Никель	при температуре плавления	0,37
Окись никеля	1500	0,85
Платина	твердая	0,31
	жидкая	0,35
Медь расплавленная	1500	0,15
Окись меди	1300	0,80
	1500	0,60

Так как яркость нечерного тела может зависеть от направления, то значения Q_{660} приведены для направления, нормального к излу-

чающей поверхности. Так же должна делаться и наводка пирометра. Связь между яркостной и истинной температурами дается при помощи соотношения (см. упражнение 238)

$$\ln Q_{\lambda,T} = \frac{c_2}{\lambda}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{S_\lambda}\right), \tag{202.1}$$

где постоянная $c_2 = hc/k = 1{,}4387$ см·град.

Кроме пирометров с исчезающей нитью, существует ряд других приборов для определения яркостной температуры, а через ее посредство — и истинной температуры раскаленных тел.

Таким образом, в зависимости от метода наблюдения мы определяем оптически одну из трех условных температур: радиационную (T_r), цветовую (T_c) или яркостную S_λ. Переход к истинной температуре возможен лишь при знании некоторых дополнительных параметров излучающего тела. T_r и S_λ всегда меньше истинной температуры, T_c обычно несколько больше истинной и, как правило, меньше отличается от нее, чем T_r и S_λ.

§ 203. Источники света

Из изложенного в предыдущих параграфах ясно, что использование раскаленного тела в качестве источника света тем более выгодно, чем выше температура этого тела. Действительно, с повышением температуры не только быстро увеличивается общая излучаемая мощность, но растет также относительная доля лучистой энергии, приходящейся на видимую часть спектра. По закону Стефана–Больцмана суммарная интенсивность возрастает для черного тела пропорционально четвертой степени температуры. Но интенсивность более коротковолновых участков спектра растет гораздо быстрее, особенно при не очень высоких температурах. Так, вблизи температуры красного каления общая энергия *видимого* спектра платины растет пропорционально тридцатой степени температуры и даже вблизи белого каления — все еще пропорционально четырнадцатой степени температуры. Интенсивность *желтых* лучей возрастает вдвое, когда температура черного тела изменяется от 1800 до 1875 K, т.е. всего на 4 %.

Если бы излучателем служило черное тело, то, пользуясь формулой Планка, мы могли бы рассчитать для каждой температуры эту часть полезной для освещения энергии и вычислить световую отдачу нашего светового источника. Если принять во внимание, что максимум чувствительности человеческого глаза лежит около 550 нм в желто-зеленой части спектра, то черное тело окажется наивыгоднейшим источником при температуре около 5200 K. Принято называть условно «белым светом» (в светотехнике) излучение черного тела при этой температуре. Солнечное излучение вблизи поверхности Земли, т.е. несколько измененное вследствие поглощения в земной атмосфере, имеет цветовую температуру, близкую к этому числу, что и послужило основанием для такого условного обозначения.

При дальнейшем повышении температуры черного тела излучение, приходящееся на полезную для освещения часть спектра, конечно, растет, но доля его в общей излучаемой энергии падает, так что

дальнейшее повышение температуры неэкономно с точки зрения светотехники.

Излучение нечерных тел, например раскаленных металлов, всегда меньше излучения черных тел. Но *световая отдача*, т.е. отношение между энергией, полезной для освещения, и ее невидимой частью, для накаленного металла при данной температуре T может быть выше, чем для черного тела при той же температуре, как видно из кривых, приведенных на рис. 36.7.

Эти кривые дают распределение энергии по спектру для вольфрама и черного тела с одной и той же температурой, там же приведено отношение ординат обеих кривых (штриховая линия), которое показывает отношение излучательной способности вольфрама для разных длин волн к излучательной способности черного тела. Из штриховой кривой видно, что в области видимого света испускание вольфрама составляет около 40 % испускания черного тела той же температуры, а в области инфракрасных лучей (около 3 мкм) всего лишь 20 %. Такая «селективность» излучения выгодно отличает вольфрам и в связи с высокой температурой плавления вольфрама делает его наилучшим материалом для изготовления нитей ламп накаливания.

Из того же рис. 36.7 видно, что хотя вследствие селективности максимум излучения вольфрама смещен несколько в область коротких волн по сравнению с максимумом для черного тела, однако при температуре 2450 К, для которой составлен график, максимум этот лежит еще около 1100 нм, т.е. очень далек от максимума чувствительности глаза (550,0 нм). Поэтому дальнейшее повышение температуры могло бы значительно повысить световую отдачу накаленного вольфрама.

Указанная температура соответствует нормальной температуре пустотной лампы накаливания с вольфрамовой нитью (на 50–60 Вт). Температура плавления вольфрама лежит выше (3655 К); однако дальнейший накал опасен, ибо нагретая нить испаряется (распыляется в пустоте настолько быстро, что повышение температуры нити сверх 2500 К быстро ведет к ее разрушению).

Большим шагом вперед в деле улучшения осветительной техники явилось предложение Лэнгмюра (1913 г.) наполнять баллоны ламп нейтральным газом, например азотом или, еще лучше, аргоном; давление газа достигает примерно 1/2 ат, и присутствие его сильно замедляет распыление волоска, что позволяет увеличить температуру нити до 3000 К и больше без заметного сокращения срока службы лампы (около 1000 час). При этом сильно повышается световая отдача. Однако общий коэффициент полезного действия лампы равен отношению энергии полезной части спектра к общей энергии, питающей лампу, т.е. приходится учитывать не только потери на невидимое излучение, но также на теплопроводность и конвекцию. Последние виды потерь сильно увеличиваются при заполнении колбы лампы газом, так что газонаполненные лампы в смысле увеличения КПД не имели бы преимущества перед пустотными, хотя свет их был бы приятен для глаз, ибо он ближе подходит к составу дневного («белого») света. Уменьшения потерь на охлаждение можно достигнуть, заменив прямой волосок тонкой спиральной нитью, отдельные витки которой

обогревают друг друга. Именно так и осуществляются современные экономические лампы накаливания, КПД которых значительно выше, чем у пустотных ламп.

Таблица 37.3 дает представление о световой отдаче ламп накаливания разного типа при нормальном режиме горения. За меру световой отдачи принимают отношение полного светового потока, посылаемого лампой (в люменах), к полной мощности, затрачиваемой на питание лампы (в ваттах). Срок службы ламп — 1000 час.

Таблица 37.3

Данные о световой отдаче ламп разного типа

Тип лампы	Световая отдача, лм/Вт	КПД	Температура истинная, К	Температура цветовая, К	Яркость, 10^4 кд/м^2
50 Вт, пустотная угольная	2,5		2095	2130	около 50
50 Вт, пустотная вольфрамовая	10	1,6 %	2400	2505	150–200
50 Вт, газонаполненная вольфрамовая	10		2685	2670	около 500
500 Вт, то же	17,5	2 %	2900	2880	около 1000
2000 Вт, » »	21,2	3,5 %	3020	3000	1300–1500

Из таблицы видно, что световая отдача возрастает с увеличением температуры волоска (цветовой и истинной, с ней связанной). Это повышение температуры достигается изменением типа лампы (газонаполнение), материала волоска и размеров лампы, ибо с ростом мощности лампы потери на охлаждение относительно сокращаются. Вместе с температурой растет, конечно, и яркость волоска лампы.

Значительно больше световая отдача электрических дуг, положительный кратер которых имеет температуру около 4000 К. В дугах интенсивного горения (сила тока до 300 А) температура кратера достигает 5000 К, а в дугах под давлением около 20 ат Люммеру удалось довести температуру кратера до 5900 К, т.е. получить источник, близкий по своим световым свойствам к Солнцу. В обычных дугах главная часть излучения (от 85 до 95 %) излучается положительным кратером, около 10 % — катодом и лишь 5 % приходится на свечение облака газов между электродами. В дугах интенсивного горения, в которые вводятся тугоплавкие соли некоторых элементов с большой испускательной способностью (редкие земли), роль облака повышается и на долю кратера приходится всего 40–50 % общего излучения. Хотя, по-видимому, в таких дугах излучение носит почти исключительно тепловой характер, все же в силу большой селективности излучения элементов, вводимых в состав облака, световая отдача подобных источников оказывается выше, чем для раскаленного угля и металлов.

Еще большей селективностью излучения отличаются, например, пары натрия, значительная часть излучения которого (около 1/3)

сконцентрирована в видимой области (две интенсивные желтые линии 589,0 и 589,6 нм). В соответствии с этим световая отдача излучения натрия может достигать 200 лм/Вт в лампах соответствующего устройства. Вообще свечение газов в силу их селективности отличается наибольшей экономичностью, но эта селективность является в то же время практическим недостатком, ибо благодаря ей спектр газовых источников состоит из отдельных линий или полос и сильно отличается от привычного для человеческого глаза белого света.

В тех случаях, когда этот недостаток играет второстепенную роль, газосветные источники могут с успехом заменять менее экономичные лампы накаливания и электрические дуги. Так, для освещения дорог применяются иногда натриевые лампы, которые даже в эксплуатационных условиях с потерями на вспомогательных устройствах дают световую отдачу около 50 лм/Вт.

Применение газосветных ламп достигло большого развития благодаря важному техническому нововведению. Внутренняя поверхность баллона в таких лампах, обычно ртутных, покрывается слоем вещества, способного флуоресцировать под действием коротковолнового излучения разряда. Предложение использовать ультрафиолетовое свечение в газосветных лампах с помощью люминесцентной трансформации было высказано С.И. Вавиловым еще в двадцатых годах. В настоящее время лампы подобного типа нашли широкое техническое применение. Люминофор подбирают таким образом, чтобы его свечение восполняло недостаток спектрального состава газового свечения. В результате получается источник, цвет излучения которого приближается к солнечному («лампы дневного света»). Так как в таких лампах часть ультрафиолетового излучения трансформируется в видимое, то этим достигается дополнительное повышение их светотехнической экономичности.

Хорошие лампы подобного типа имеют световую отдачу до 40–50 лм/Вт при спектральном составе излучения, близком к солнечному свету. Лампы этого типа еще обладают некоторыми техническими недостатками, однако они уже успешно конкурируют с лампами накаливания и, несомненно, вытеснят их в дальнейшем.

ЛЮМИНЕСЦЕНЦИЯ

Глава XXXVIII

ИЗЛУЧЕНИЕ АТОМОВ И МОЛЕКУЛ. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ

§ 204. Линейчатые спектры

Излучение изолированных атомов, например атомов разреженного одноатомного газа или пара металла (Na, Hg), отличается наибольшей простотой. Электроны, входящие в состав таких атомов, находятся под действием внутриатомных сил и не испытывают возмущающего действия со стороны окружающих удаленных атомов. Спектры подобных газов состоят из ряда дискретных спектральных линий разной интенсивности, соответствующих различным длинам волн. При исследовании газов, состоящих из многоатомных молекул, спектр получается более сложным. Так, например, в спектре водорода (H_2) наряду с отдельными, довольно удаленными друг от друга линиями наблюдается большое число тесно расположенных линий (так называемый *многолинейчатый* или *полосатый* спектр водорода).

Исследование показывает, что последний характеризует молекулы водорода, тогда как первый, состоящий из дискретных линий, относится к *атомам* водорода, образовавшимся в разрядной трубке вследствие диссоциации молекулы под действием разряда. Спектры различных атомов отличаются чрезвычайным разнообразием, причем в некоторых из них, например в спектре железа, насчитывается несколько тысяч линий. Тем не менее, мы без особого труда отличаем эти богатые линиями спектры атомов от полосатых спектров молекул с определенной группировкой многочисленных линий.

Правда, и линии атомного линейчатого спектра не представляют собой беспорядочного скопления. Внимательное изучение линейчатых спектров уже давно привело к установлению определенных закономерностей в их расположении. Лишь в начале XX века удалось установить физический смысл, заложенный в этих закономерностях, и вслед затем найти им объяснение в особенностях строения атома (Бор, 1913 г.). Таким образом, создание теории атома шло рука об руку с объяснением спектральных закономерностей. Многообразные и точные сведения, получаемые в результате спектроскопических исследований, явились важнейшими данными, направлявшими теоретические исследования и позволившими проверить выводы теории. Вместе с тем теоретические заключения дали возможность предусмотреть многие новые стороны явлений и соответствующим образом ориентировать экспериментальные исследования.

Линейчатый спектр газов можно возбудить весьма различными способами. Он появляется при различных видах электрического разряда через газ (гейслерова трубка, искра, дуговой разряд), при бомбардировке атомов газа электронами, испускаемыми накаленным катодом (что также можно рассматривать как одну из форм электрического разряда), при нагревании паров и газов (в пламени горелки, например), при освещении паров светом подходящей длины волны и т.д. Во всех этих случаях получаются спектральные линии, длины волн которых характерны для изучаемого газа. Однако в зависимости от условий возбуждения относительная интенсивность различных линий может сильно различаться, так что некоторые линии могут отсутствовать при тех или иных способах возбуждения. Можно даже иногда возбудить одну-единственную линию из всего линейчатого спектра. Таким образом, внешний вид спектра данного газа сильно зависит от условий возбуждения; однако следует помнить, что, меняя условия возбуждения, мы можем заставить исчезнуть или появиться только *определенные для каждого данного вещества линии*, совокупность которых и составляет характерный для него линейчатый спектр.

Каждая такая спектральная линия не представляет собой, однако, излучения строго определенной длины волны, а является, как уже не раз упоминалось, излучением в очень узком спектральном участке, в котором энергия распределена так, что интенсивность быстро падает от центра к краям. Измерение ширины спектральной линии (см. § 158) показывает, что в излучении разреженного газа величина этого участка нередко ограничена сотыми и даже тысячными долями ангстрема. Однако условия возбуждения могут заметно влиять и на эту величину, равно как и на положение центра (максимума) спектральной линии. Внешнее электрическое (или магнитное) поле вызывает расширение (или даже расщепление) спектральной линии, а такие внешние поля (особенно электрические) могут в условиях газового разряда обусловливаться высокой концентрацией ионов в разряде и достигать заметной величины; столкновение светящегося атома с соседними во время процесса излучения также ведет к уширению линии; к тому же ведет и самый факт теплового движения атома вследствие эффекта Доплера. В специальных условиях, например при мощных разрядах, сопровождающихся сильной ионизацией, или при большой плотности газа эти искажения могут достигать значительной величины. Однако обычно действие всех перечисленных причин не особенно велико, и излучение газа обладает спектром, характерным для атомов, составляющих данный газ.

§ 205. Спектральные закономерности

Линейчатые спектры, как уже упоминалось, представляют собой совокупность спектральных линий, составляющих известные системы, а не разбросанных в беспорядке по длинам волн. Установление связи между частотами отдельных линий впервые было сделано Бальмером (1885 г.).

Открытая им закономерность относится к четырем водородным линиям. Именно, оказалось, что длины волн, соответствующих этим

линиям, можно выразить общей формулой

$$\lambda = b\,\frac{m^2}{m^2-4}\,,$$

где $b = 364{,}57$ нм и m — ряд последовательных целых чисел 3, 4, 5, 6.

Вводя вместо λ частоту $\nu = c/\lambda$, можно переписать формулу Бальмера в виде

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \widetilde{R}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{m^2}\right),$$

где $\widetilde{R}$ — постоянная. В практической спектроскопии ν заменяют величиной $N = \nu/c = 1/\lambda$. Это так называемое *волновое число* показывает, сколько волн данной длины укладывается на протяжении 1 см. Таким образом, формула Бальмера приобретает вид

$$N = \frac{1}{\lambda} = \frac{\widetilde{R}}{c}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{m^2}\right) = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{m^2}\right), \qquad (205.1)$$

где $m = 3, 4, 5, 6$. Величина R связана с введенной выше постоянной b простым соотношением $R = 4/b$.

Во времена Бальмера были известны лишь 4 линии водорода, удовлетворяющие его формуле. В настоящее время известно около 30 линий H в видимой части спектра, и частоты всех этих линий с поразительной точностью могут быть вычислены по формуле Бальмера, если придавать m целые значения 3, 4, 5... Постоянная R, получившая название постоянной Ридберга, согласно современным данным равняется $1{,}097677587 \cdot 10^5$ см$^{-1}$. Число знаков, с которыми определена *постоянная Ридберга*, с одной стороны, показывает, какой степени точности достигла современная спектроскопия, а с другой — иллюстрирует, насколько формула Бальмера удачно передает результаты наблюдений. Еще убедительнее демонстрирует точность формулы Бальмера табл. 38.1, сопоставляющая измеренные значения длин волн

Таблица 38.1

Измеренные и вычисленные значения длин волн в спектре водорода

m	λ (выч.), нм	λ (набл.), нм	m	λ (выч.), нм	λ (набл.), нм
3	656,280	656,280	18	369,159	369,156
4	486,138	486,133	19	368,686	368,683
5	434,051	434,047	20	368,284	368,281
6	410,178	410,174	21	367,938	367,936
7	397,011	397,007	22	367,639	367,636
8	388,909	388,905	23	367,380	367,376
9	383,543	383,539	24	367,151	367,148
10	379,793	379,790	25	366,950	366,947
11	377,067	377,063	26	366,772	366,768
12	375,018	375,015	27	366,613	366,610
13	373,440	373,437	28	366,441	366,468
14	372,197	372,194	29	366,344	366,341
15	371,201	371,197	30	366,229	366,226
16	370,389	370,386	31	366,125	366,122
17	369,719	369,715			

бальмеровской серии в спектре водорода и значения, вычисленные по формуле Бальмера.

Эта таблица ясно показывает, что мы имеем дело не просто с удачно подобранной эмпирической формулой, а с выражением какой-то внутриатомной закономерности. Это убеждение еще более укрепилось,

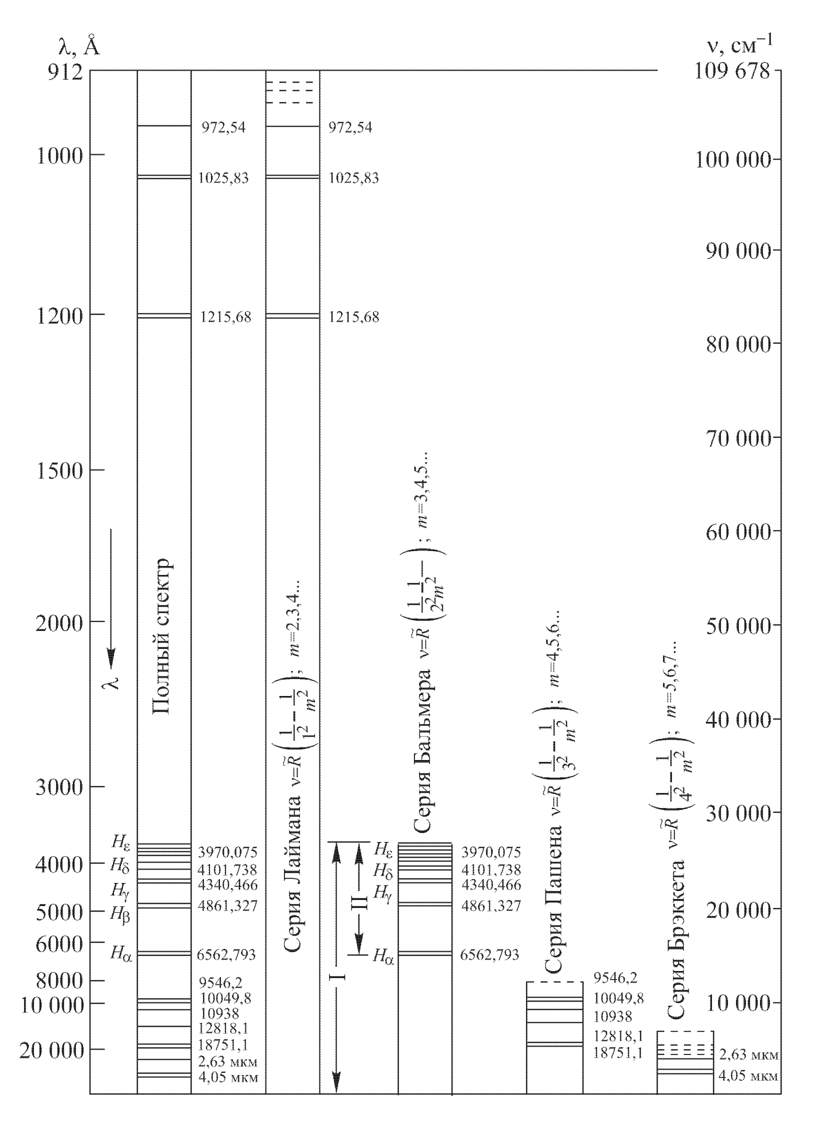


Рис. 38.1. Схематическое изображение спектра атома водорода: полный спектр и отдельные спектральные серии

когда обнаружилось, что открытые позже линии водорода, лежащие в ультрафиолетовой и инфракрасной частях спектра, также укладываются в аналогичные формулы, а именно: серия Лаймана (в далекой ультрафиолетовой области) — в формулу

$$N = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{m^2}\right) \quad (m = 2, 3, 4); \tag{205.2}$$

серия Пашена (в близкой инфракрасной области) — в формулу

$$N = R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{m^2}\right) \quad (m = 4, 5, 6, 7, 8); \tag{205.3}$$

серия Брэккета (в более отдаленной инфракрасной области) — в формулу

$$N = R\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{m^2}\right) \quad (m = 5, 6); \tag{205.4}$$

серия Пфунда (еще дальше в инфракрасной области) — в формулу

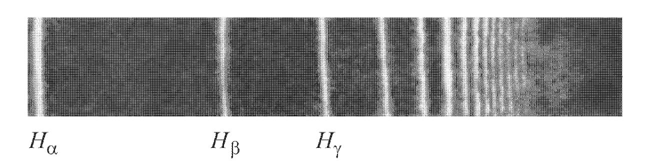
$$N = R\left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{m^2}\right) \quad (m = 6, 7).$$

Все линии водородного спектра можно, следовательно, разделить на ряд серий, объединяемых общей формулой:

$$N = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right), \tag{205.5}$$

где $n = 1, 2, 3, 4, 5$, m — целые числа, причем $m > n$, а R — одна и та же постоянная, упоминавшаяся выше. Число n определяет серию, m — отдельную линию этой серии; при $n = 1$ получаем серию Лаймана, при $n = 2$ — серию Бальмера, при $n = 3$ — серию Пашена, при $n = 4$ — серию Брэккета, при $n = 5$ — серию Пфунда. На рис. 38.1 схематически изображен полный спектр водорода и отдельные серии, на которые его можно разложить. Каждая серия состоит из ряда линий, расстояния между которыми, как и следует из формулы, уменьшаются в сторону коротких длин волн.

Постепенно увеличиваясь, частоты линий стремятся к определенному пределу, величину которого легко найти из сериальной формулы. Иногда наблюдается слабый *сплошной* спектр, примыкающий к границе серии со стороны больших частот. На рис. 38.2 приведена фотография линий серии Бальмера.



H_α H_β H_γ

Рис. 38.2. Фотография линий серии Бальмера

Успех Бальмера направил внимание исследователей на поиски сериальных зависимостей в спектрах других веществ. В первую очередь были исследованы спектры щелочных металлов, затем щелочноземельных и некоторых других элементов. Несмотря на трудность

расшифровки, и здесь были найдены серии, и, что очень важно, полученные формулы очень напоминали сериальную формулу для водорода. Отличие сводится к поправочным членам α и β, имеющим для водорода значения, равные нулю:

$$N = R\left[\frac{1}{(n+\alpha)^2} - \frac{1}{(m+\beta)^2}\right]. \qquad (205.6)$$

Каждому элементу соответствует несколько таких поправочных членов, с помощью которых можно выразить все характерные для данного элемента серии. Так, например, для натрия эти поправки имеют значения −1,35, −0,87, −0,01 и 0, так что все четыре известные серии натрия выражаются в виде

$$N = R\left\{\frac{1}{(3-0{,}87)^2} - \frac{1}{(m-1{,}35)^2}\right\},\quad m = 4, 5, 6, \ldots \text{ (резкая серия);}$$

$$N = R\left\{\frac{1}{(3-1{,}35)^2} - \frac{1}{(m-0{,}87)^2}\right\},\quad m = 3, 4, 5, \ldots \text{ (главная серия);}$$

$$N = R\left\{\frac{1}{(3-0{,}87)^2} - \frac{1}{(m-0{,}01)^2}\right\},\quad m = 3, 4, 5, \ldots \text{ (диффузная серия);}$$

$$N = R\left\{\frac{1}{(3-0{,}01)^2} - \frac{1}{m^2}\right\},\quad m = 4, 5, 6, \ldots \text{ (фундаментальная серия).}$$

Как мы видим, n во всех сериях равно 3, а m принимает целые значения $\geqslant 3$. Поправочные члены входят в различных, хотя и не во всех мыслимых комбинациях (правила отбора). R имеет почти то же значение, что и в серии Бальмера.

Более тщательные измерения показывают, что R слегка увеличивается по мере возрастания атомного веса, имея для водорода значение 109 678 см$^{-1}$, а для наиболее тяжелых атомов — 109 737 см$^{-1}$, причем, начиная примерно с хлора, нарастание R практически уже незаметно. В частности, для натрия $R_{\text{Na}} = 109\,735$ см$^{-1}$.

Спектры щелочных и щелочноземельных металлов и других элементов гораздо сложнее спектра водорода. Одним из отличий, имеющих место и в других сложных элементах, является *мультиплетный* характер линий: линии состоят из нескольких (две, три и более) компонент с близкими значениями частот. Частоты отдельных компонент также подчинены определенным закономерностям. Разыскивать закономерности в таких сложных спектрах нелегко, и это явилось в значительной степени делом догадки и остроумия. Благодаря работам Ридберга и других выяснились некоторые правила, помогающие обнаруживать и выделять отдельные серии. В настоящее время теория атома позволила обосновать многие такие правила. В частности, принадлежность линии к той или другой серии можно установить по характеру аномального расщепления в магнитном поле (см. § 172).

Исследования Ридберга (1890 г.) выяснили универсальность постоянной R и возможность представления отдельных частот двучленными формулами приведенного выше типа, т.е. в виде разности двух

членов (*термов*). Кроме того, оказалось, что различные термы (зависящие от α и β) могут комбинироваться попарно, давая начало новым сериям (*комбинационный принцип Ритца*, 1908 г.). Таким образом выясняется, что *физический смысл имеет именно терм.* Особенности атома проявляются в поправочных членах сериальных формул и в мультиплетности линий (точнее, термов).

Установление сериальных закономерностей, связь между сериями (принцип Ритца), универсальность постоянной Ридберга — все свидетельствовало о глубоком физическом смысле открытых законов. Тем не менее, попытки установить на основании этих законов внутренний атомный механизм, обусловливающий найденные закономерности, потерпели решительную неудачу. Было ясно, что каждая серия полностью вызвана одним и тем же механизмом. Между тем трудно представить себе возможность излучения целого ряда частот таким простым атомом, как, например, атом водорода. Известны, конечно, типы механических излучателей, дающих ряд колебаний, например струна. Однако спектр такого излучателя состоит из основной частоты и ее обертонов, представляющих целые кратные от основной, даже отдаленно не напоминая закономерностей, наблюдаемых в спектральных сериях. Были попытки придумать такие типы излучателей, которые давали бы частоты, связанные формулами, аналогичными формулам спектральных серий (Ритц, закрепленные мембраны). Но попытки эти кончились неудачей. Ритц показал, что классическими законами колебательных систем нельзя объяснить законы спектральных серий.

И действительно, решение задачи было найдено в 1913 г. Бором путем привлечения для объяснения атомных закономерностей *теории квантов*; таким образом, оказалось, что классические законы, установленные в макроскопических явлениях, недостаточны для объяснения строения атомов.

§ 206. Модели атома Дж. Дж. Томсона и Резерфорда

Вся совокупность наших сведений об оптических явлениях, и в первую очередь эффект Зеемана, свидетельствует, что излучение света обусловлено процессами, в которых принимают участие электроны, входящие в состав атома.

Для объяснения линейчатого спектра, испускаемого изолированным атомом, следовало предположить, что электрон в излучающем атоме совершает (почти) гармонические колебания, которые согласно классическим законам и обусловливают почти монохроматическое излучение. Поэтому на основании вида атомных спектров следовало предположить такое устройство атома, при котором электроны, входящие в его состав, способны совершать гармонические колебания, т.е. удерживаются около положения равновесия квазиупругой силой вида $f = -\kappa x$, где κ — постоянная, а x — отклонение электрона от положения равновесия.

Исходя из закона взаимодействия точечных электрических зарядов (закон Кулона), можно было бы представить себе модель атома, удовлетворяющую такому требованию. Согласно этой модели, пред-

ложенной Дж. Дж. Томсоном (1903 г.), атом представляет собой равномерно заполненную положительным электричеством сферу, внутри которой находится электрон. Если заряд электрона равен положительному заряду сферы, то такой атом будет нейтральным, а сила, действующая на электрон при его смещении, подчиняется закону квазиупругой силы.

Попытки интерпретации сериальных закономерностей в спектрах испускания и поглощения атомов, а также анализ результатов исследования теплового излучения, фотоэффекта и ряда других явлений (см. главы XXXII–XXXVI) привели к радикальному пересмотру представлений о законах, управляющих поведением микросистем — атомов, молекул и т.п., и имели чрезвычайно важное значение для физики в целом. В этой связи большой интерес представляет процесс становления квантовой теории, и в последующих параграфах (см. § 207–209) рассматриваются основные этапы развития квантовых идей в спектроскопии. Однако для объяснения спектральных закономерностей модель Томсона оказалась совершенно непригодной. Более того, исходные соображения Томсона относительно характера распределения положительных и отрицательных зарядов в атоме не покоятся на базе какого-либо прямого опыта. Поэтому следует признать важнейшим шагом вперед попытку непосредственного опытного зондирования внутренних областей атома с целью установления пространственного распределения зарядов в атоме.

Попытка подобного рода была предпринята еще Ленардом (1903 г.), который изучал прохождение быстрых электронов через материальные тела и пришел к выводу, что атом нельзя представлять себе состоящим из заряженного вещества, равномерно распределенного по всему его объему, а скорее следует приписать ему ажурное строение. К тем же заключениям, но гораздо более обоснованным и количественно уточненным, пришел позже (1913 г.) и Резерфорд, предпринявший исследование «внутренности» атома более мощными средствами.

В качестве зонда для прощупывания атома Резерфорд выбрал α-частицы, т.е. быстро летящие ионы гелия с атомным весом 4 и двойным элементарным зарядом, выделяющиеся при радиоактивном распаде сложных атомов. Так как α-частицы представляют собой сравнительно тяжелые частицы (атомный вес их равен 4, т.е. масса $6{,}65 \cdot 10^{-24}$ г), летящие с большой скоростью (до $1/15$ скорости света), то кинетическая энергия отдельных α-частиц весьма значительна. Это делает возможным непосредственное наблюдение на опыте отдельных α-частиц. Действительно, существует несколько методов таких наблюдений. Простейшим из них является *метод сцинтилляций*, основанный на способности α-частицы при ударе о фосфоресцирующий экран вызывать вспышку, достаточно яркую для наблюдения при помощи лупы. Можно также непосредственно наблюдать путь α-частицы в виде узкого пучка тумана в камере Вильсона.

Пользуясь возможностью наблюдения отдельных α-частиц, Резерфорд исследовал (по методу сцинтилляций), каким образом меняется направление полета α-частиц при прохождении их сквозь слой какого-либо вещества (рассеяние α-частиц).

При прохождении α-частицы через вещество происходит изменение направления ее полета в результате взаимодействия с зарядами, входящими в состав атома. При этом столкновение с электроном не должно сильно сказываться на траектории α-частицы, так как масса ее приблизительно в 7000 раз превосходит массу электрона; при встрече с α-частицей электрон значительно сместится без заметного изменения пути α-частицы. Напротив, столкновение с положительно заряженной частью атома может вызвать более или менее резкое изменение направления движения α-частицы.

Опыты Резерфорда показали, что наряду со случаями отклонения α-частиц на малые углы довольно часто происходят столкновения, вызывающие крутой поворот траектории α-частицы, в частности, даже ее отбрасывание назад. Точные и тщательные исследования законов рассеяния α-частиц, выполненные Резерфордом и его сотрудниками, в первую очередь Чэдвиком, позволили прийти к выводу, что положительный заряд атома сконцентрирован в очень малой центральной его части, называемой ядром и имеющей размеры, не превышающие 10^{-12} см.

Таким образом, доказано, что нельзя пользоваться моделью Томсона (положительная сфера имеет размеры атома) и надо представлять себе атом, содержащий Z электронов, как систему зарядов, в центре которой находится положительно заряженное ядро с зарядом Ze, а вокруг ядра расположены электроны, распределенные по всему объему, занимаемому атомом. Лучше сказать, что размерами *атома* мы считаем размеры области, где расположены принадлежащие атому электроны. Такая система зарядов не может находиться в устойчивом равновесии, если заряды неподвижны (общее положение электростатики). Поэтому необходимо предположить, что электроны движутся вокруг центрального ядра наподобие планет Солнечной системы, описывая около него замкнутые траектории. Так возникла *ядерная модель атома* Резерфорда, сохранившая свое значение и до настоящего времени, хотя в рамках современных представлений мы не можем говорить столь определенно ни о локализации зарядов, ни об их траекториях.

§ 207. Постулаты Бора

Модель, предложенная Резерфордом, покоится на твердых экспериментальных данных, полученных из опытов с рассеянием α-частиц, и, по-видимому, необходима для объяснения этих опытов. Но, вместе с тем, она не только не объясняет спектральных закономерностей, но даже не в состоянии объяснить самого факта испускания атомом монохроматического излучения, если описывать процессы в такой системе, опираясь на классические законы механики и электродинамики.

Действительно, движение электронов по окружностям или вообще по криволинейным орбитам есть движение ускоренное и, согласно законам электродинамики, должно сопровождаться излучением света соответствующей частоты. В частности, при равномерном обращении по окружности частота излучения равна частоте обращения; при

более сложных периодических движениях излучение можно представить как ряд монохроматических компонент, в соответствии с теоремой Фурье. Однако при таком движении, например круговом, в результате излучения будет уменьшаться энергия атомной системы и вместе с ней будет уменьшаться расстояние от электрона до центра ядра, а следовательно, будет уменьшаться и период обращения. Таким образом, частота обращения и, следовательно, частота излучения непрерывно повышаются: атом будет излучать непрерывный спектр; в то же время электрон будет непрерывно приближаться к ядру и через короткую долю секунды должен упасть на него, после чего атом как таковой прекратит свое существование.

Итак, по законам классической электродинамики атом Резерфорда должен быть неустойчив и в течение всего времени своего существования должен излучать непрерывный спектр. Оба эти вывода стоят в резком противоречии с опытом.

Как уже упоминалось, выход из затруднения был предложен Бором, отказавшимся от применения к атому законов классической электродинамики. Опираясь на идеи квантовой теории Планка, Бор подошел к трактовке модели Резерфорда с точки зрения этих новых представлений. Нужно отметить, однако, что теория Планка, признав неприменимость классической электродинамики к элементарному осциллятору, еще не выдвинула на ее место разработанной квантовой теории. Поэтому и Бор не мог дать решения сложной задачи об атоме Резерфорда, которое представляло бы последовательное применение законов новой физики. Он вынужден был сформулировать в виде постулатов определенные утверждения в духе новой теории, не дав сколько-нибудь рационального обоснования рецепту применения этих постулатов. Однако на таком заведомо несовершенном пути были получены столь поразительные результаты, что правильность замысла Бора стала очевидной. Последующее развитие квантовой теории повело к разработке квантовой механики и квантовой электродинамики, при помощи которых удалось получить постулаты Бора как их следствия.

Бор обобщил идеи Планка, предположив, что и в случае атома Резерфорда непрерывное излучение, требуемое классической электродинамикой, не имеет места. Для истолкования линейчатых спектров подобного атома нужно предположить, что лучеиспускание атомной системой происходит не так, как по обычным макроскопическим представлениям, вследствие чего при помощи этих представлений нельзя определить частоту излучения. Бор предположил, что излучение обладает частотой ν, определяемой следующим *условием для частоты*:

$$h\nu = E_m - E_n, \tag{207.1}$$

где E_m и E_n — энергии системы до и после излучения. Таким образом, частота излучения ν не связана, вообще говоря, ни с какими частотами движений атомной системы.

Исходя из этого закона, можно заключить, что спектры не дают нам картины движения частиц в атоме, как принимается в классической теории излучения, и позволяют судить лишь об изменениях

энергии при различных возможных процессах в атоме. Согласно такому воззрению дискретный характер спектральных линий свидетельствует о существовании определенных, дискретных значений энергии, соответствующих особым состояниям атома. Эти состояния уместно назвать *стационарными*, ибо предполагается, что атом может пребывать в каждом из них известное время и, покидая его, снова попадает в другое стационарное состояние, изменяя свою энергию на конечную величину.

Изложенные соображения были сформулированы Бором в виде двух постулатов.

1. Атом характеризуется известными состояниями, в которых излучение энергии не имеет места, даже если заряженные части атома находятся во взаимном движении, так что по законам обычной электродинамики следовало бы ожидать излучения. Эти состояния можно назвать *стационарными состояниями* рассматриваемой системы.

2. Всякое испускание или поглощение излучения должно соответствовать переходу из одного стационарного состояния в другое. При таких переходах испускается (или поглощается) *монохроматическое* излучение, частота которого ν определяется соотношением

$$h\nu = E_m - E_n,$$

где E_m и E_n — энергия системы в первом и втором стационарном состояниях.

Постулаты Бора имели чрезвычайно большое значение, поскольку на их основе удалось систематизировать обширный спектроскопический материал, обсуждавшийся выше, и прежде всего спектр атома водорода.

§ 208. Атом водорода

Согласно Резерфорду, атом водорода представляет собой ядро с атомным весом 1 и с зарядом $+e$ (протон), около которого обращается один электрон, удерживаемый вблизи ядра кулоновской силой электростатического притяжения. Пользуясь законами механики, нетрудно вычислить, что электрон должен описывать эллиптическую орбиту, в фокусе которой находится протон. Энергия такой системы $E = -e^2/2a$ (см. упражнение 243), где a — большая полуось эллипса; частота обращения электрона по орбите ω [1]) определится из соотношения

$$\omega^2 = \frac{2|E|^3}{\pi^2 \mu e^4}, \tag{208.1}$$

где μ — масса электрона.

Так как энергия данной системы не зависит от эксцентриситета эллипса, то те же формулы справедливы и для круговой орбиты диаметра $2a$. При расчетах предполагается, что массу протона можно

[1]) Здесь ω обозначает обычную, а не угловую частоту. Мы ввели это обозначение вместо привычного ν с тем, чтобы отличить ее от частоты, вычисленной в рамках теории квантов.

считать бесконечно большой по сравнению с массой электрона, так что протон следует считать неподвижным. Кроме того, не принимается во внимание зависимость массы электрона от скорости. Спектр водородного атома по Бальмеру–Ридбергу описывается формулой:

$$\nu = cR\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) = \frac{cR}{n^2} - \frac{cR}{m^2}$$

[ср. (205.5)], где c — скорость света. Сопоставляя это выражение с условием частот Бора (207.1)

$$\nu = \frac{E_m}{h} - \frac{E_n}{h},$$

найдем, что энергии E_n и E_m стационарных состояний выражаются соотношениями

$$-E_n = \frac{hRc}{n^2}, \quad -E_m = \frac{hRc}{m^2}.$$

Таким образом, термы сериальных формул приобретают определенный физический смысл, оказываясь связанными с энергией стационарных состояний атома, а комбинационный принцип Ритца становится естественным следствием второго постулата Бора.

Подчеркнем еще раз, что *частота ν света*, испускаемого при переходе из m-го стационарного состояния в n-е, не равна *частоте обращения* электрона ни в том, ни в другом состоянии. Действительно,

$$\omega_n^2 = \frac{2h^3R^3c^3}{\pi^2\mu e^4 n^6}, \quad \omega_m^2 = \frac{2h^3R^3c^3}{\pi^2\mu e^4 m^6},$$

вообще говоря, сильно отличаются от $\nu_{m,n}$ — частоты перехода из m-го состояния в n-е.

Согласно постулату стационарных состояний энергия E должна иметь дискретные значения, и задача состоит в их определении. Не зная, однако, законов, управляющих атомными процессами, нельзя установить эти стационарные состояния, ибо обычная механика приводит к любому значению энергии, согласно формуле $E = -e^2/2a$, так как диаметр электронной орбиты может принимать любое значение. Можно было бы ввести некоторые специальные дополнительные квантовые условия, ограничивающие значения поперечника орбиты, как сделано в одной из первых работ Бора; можно, однако, пойти несколько более общим путем, также указанным Бором.

Обсуждая следствия теории Планка, мы упоминали, что в предельном случае для области длинных волн (малых частот) теория Планка приводит к выводам, соответствующим классической теории. Естественно установить подобное соответствие и в случае атомной системы. Переход из $(n+1)$-го стационарного состояния в n-е для больших значений n должен соответствовать испусканию длинных волн (малых частот), как видно из формулы

$$\nu_{n+1,n} = Rc\left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right].$$

Если n значительно больше единицы, то можно положить приблизительно

$$\nu_{n+1,n} = \frac{2Rc}{n^3}\,.$$

В области этих длинных волн следует ожидать совпадения частоты испускаемого света, вычисленной по квантовой теории, с частотой, определяемой классическими методами, т.е. с частотой обращения электрона. Эта последняя имеет для обоих стационарных состояний практически совпадающие значения (ибо $n \gg 1$), а именно:

$$\omega_n^2 \approx \omega_{n+1}^2 = \frac{2h^3R^3c^3}{\pi^2\mu e^4 n^6}\,. \tag{208.2}$$

Приравнивая, согласно сказанному, квантовое и классическое выражения для частоты, найдем

$$\frac{4R^2c^2}{n^6} = \frac{2h^3R^3c^3}{\pi^2\mu e^4 n^6}\,, \tag{208.3}$$

откуда

$$R = \frac{2\pi^2\mu e^4}{ch^3}\,. \tag{208.4}$$

Таким образом, допущение о совпадении для области низких частот результатов расчетов, основанных на постулатах Бора и на классической теории, позволило выразить постоянную Ридберга через универсальные постоянные атома и, следовательно, установить спектральную формулу для водорода при помощи постулатов Бора в виде

$$N = \frac{E_m - E_n}{hc} = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) = \frac{2\pi^2\mu e^4}{ch^3}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right). \tag{208.5}$$

Подставив значения μ, e, c и h, найдем $R = 1{,}097 \cdot 10^5$ см$^{-1}$, что превосходно совпадает с опытным значением $R = 109\,678$ см$^{-1}$.

Итак, подобные соображения привели Бора к спектральной формуле, которая численно прекрасно передает результаты наблюдений.

Примененный Бором прием установления соответствия между квантовой и классической теориями лег в основу так называемого *принципа соответствия*, сыгравшего важную роль на первом этапе развития квантовой теории атома.

Итак, метод Бора позволил детальным образом интерпретировать огромный спектроскопический материал и, в частности, спектр атома водорода. Частоты спектральных линий были связаны с энергиями стационарных состояний атома. На прилагаемой схеме рис. 38.3 совокупность таких энергетических уровней вычерчена с соблюдением масштаба, так что вертикальное расстояние между соответствующими уровнями прямо дает частоту испускаемых линий. Числа, указанные на схеме переходов, означают значения длин волн, выраженные в Å $= 10^{-8}$ см.

На схеме легко также видеть, что серия Лаймана соответствует переходам с одного из высших уровней на основной уровень, т.е. уровень, соответствующий минимальному запасу энергии, серия Бальмера — переходам с верхних уровней на второй и т.д. Предельное

(максимальное) значение ν соответствует для каждой серии случаю, когда $m = \infty$ ($E_m = 0$), т.е. начальное состояние соответствует бесконечно большому удалению электрона от ядра или полному отрыву электрона от атома. Это состояние есть состояние ионизации. Таким образом, энергия ионизации должна равняться $h\nu_\infty$ и ее можно вычислить, если известна частота границы серии, т.е. ν_∞.

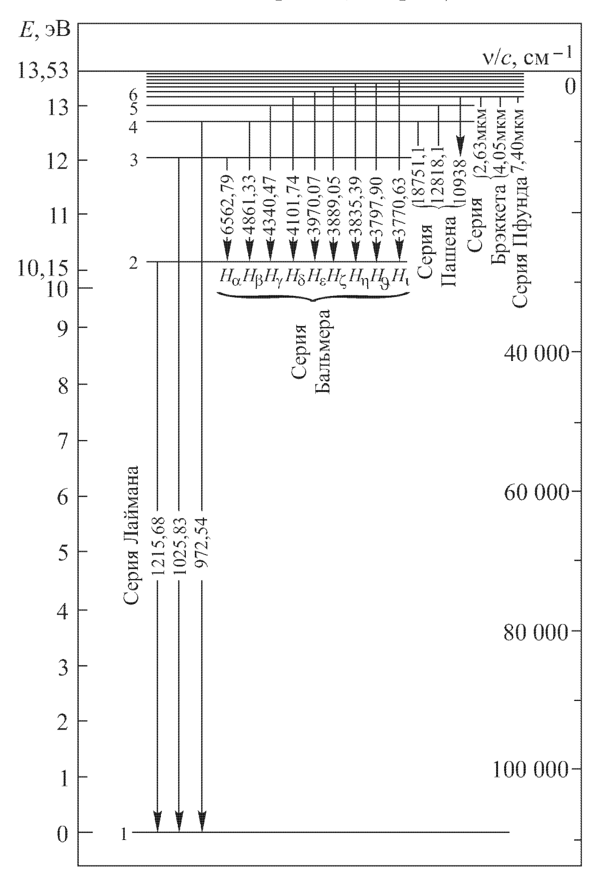


Рис. 38.3. Схема энергетических уровней атома водорода

Сравнение результатов таких вычислений с данными непосредственных измерений энергии ионизации приводит к весьма удовлетворительному совпадению. Так как электрон, отделенный от атома, может обладать произвольной кинетической энергией $\mathscr{E}_{\text{кин}}$, то при его захвате ионом должна освобождаться энергия $h\nu_\infty + \mathscr{E}_{\text{кин}}$. Следовательно, согласно второму постулату Бора, будет излучаться частота

$$\nu = \frac{h\nu_\infty + \mathscr{E}_{\text{кин}}}{h} = \nu_\infty + \frac{\mathscr{E}_{\text{кин}}}{h}\,. \qquad (208.6)$$

Другими словами, при этих условиях возможно излучение с частотой, большей, чем граница серии, на *любую* величину $\mathscr{E}_{\text{кин}}/h$. Таким образом, излучение должно образовать *сплошной спектр*, примыкающий к границе серии, как действительно и наблюдается на опыте.

§ 209. Резонансное излучение

Поглощение монохроматического света атомами пара или газа сообщает поглощающему атому определенный запас энергии. Исследуя, в каком состоянии оказывается атом в результате такого воздействия, Вуд (1904–1905 гг.) осуществил следующий опыт (рис. 38.4). В эвакуированный баллон G был помещен кусочек металлического натрия, и

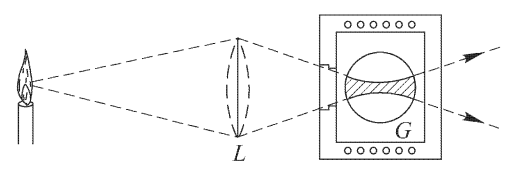


Рис. 38.4. Схема опытов по резонансному возбуждению паров натрия

баллон был нагрет так, что он заполнялся парами натрия. Свет от горелки с введенной поваренной солью, которая интенсивно испускает желтые линии D_1 и D_2 натрия, направлялся при помощи линзы L на сосуд G. На пути падающих лучей пары́ в сосуде начинали светиться желтым светом, спектроскопическое исследование которого показало, что он состоит также из желтых линий, характерных для спектра натрия ($\lambda_{D_1} = 589{,}6$ нм и $\lambda_{D_2} = 589{,}0$ нм). При повышении температуры сосуда, т.е. при увеличении плотности пара, свечение стягивается к месту входа лучей, превращаясь в свечение тонкого поверхностного слоя. Последнее явление обусловливается увеличением поглощения линий D_1 и D_2 по мере возрастания плотности пара натрия, в результате чего возбуждающий свет перестает проникать в глубь сосуда. При этом обе линии D_1 и D_2 сливаются.

Аналогичное явление Вуд наблюдал и в парах ртути, причем в данном случае возбуждающий свет представлял собой излучение ртути с $\lambda = 253{,}7$ нм. Конечно, сосуд с парами должен быть сделан из кварца, а источником возбуждения должна служить ртутная линия, испускаемая, например, ртутной кварцевой лампой, горящей в таких условиях, при которых возбуждающая линия $\lambda = 253{,}7$ нм достаточно резка и интенсивна (исключено поглощение возбуждающей линии более холодными слоями паров ртути, могущими скопляться в периферической части разряда). Удается наблюдать испускание и второй линии ртути $\lambda = 185{,}0$ нм, которая гораздо сильнее поглощается и наблюдение которой поэтому значительно труднее.

Впоследствии эти наблюдения были распространены и на другие элементы; несомненно, что опыт возможен с любым веществом, хотя практически из-за трудности подбора подходящего источника возбуждения и вследствие сильного поглощения соответствующих линий осуществление опыта может оказаться затруднительным.

Истолкование опыта, приведшее к тому, что явление было названо *резонансным излучением*, покоилось на классических представлениях о резонансе (совпадение периодов) возбуждающего света и возбуждаемого атома, в результате которого последний приходит в сильное колебание и становится самостоятельным источником соответствующего излучения. Возможны, конечно, случаи, когда поглощающий атом передаст свою энергию окружающим атомам ранее, чем амплитуда его колебания приобретет заметное значение, т.е. ранее, чем резонансное излучение его достигнет наблюдаемой величины. В таком случае оно ускользнет от наблюдения, и эффект поглощения света сведется к нагреванию всего газа. Очевидно, что такие явления будут происходить при наличии сильного взаимодействия между окружающими атомами, например, при большой плотности пара или при добавлении к нему постороннего газа достаточной плотности. Действительно, при этих условиях свечение значительно слабеет или даже совсем пропадает (*тушение* свечения). Так, если к парам ртути с давлением около 0,001 мм рт. ст., обнаруживающим хорошо выраженное резонансное свечение, добавить водород под давлением 0,2 мм рт. ст., то интенсивность свечения упадет вдвое; при большем давлении водорода свечение ослабевает соответственно сильнее. Аналогично действуют и добавки других газов, хотя количество, необходимое для ослабления свечения вдвое, зависит от природы добавляемого газа, что показывают приводимые ниже данные.

Газ	H_2	O_2	CO_2	H_2O	Ar	He
Давление примеси, необходимое для ослабления вдвое резонансного свечения ртути, мм рт. ст.	0,2	0,35	2	4	240	~ 760

В рамках теории Бора резонансное свечение имеет иное истолкование, чем по классическим представлениям. Поглощение света частоты ν соответствует сообщению атому энергии в количестве $h\nu$, благодаря чему атом переходит в возбужденное состояние с энергией $E_2 = E_1 + h\nu$, где E_1 — энергия его первоначального состояния. Будучи предоставленным самому себе, он вернется в первоначальное состояние с меньшей энергией и потому более устойчивое, отдав избыток энергии в виде излучения, которое, согласно второму постулату Бора, и будет иметь частоту ν, т.е. будет иметь характер резонансного. То обстоятельство, что резонансное излучение натрия состоит из двух линий, доказывает, что атом натрия может существовать в двух дискретных, близких по энергии возбужденных состояниях (рис. 38.5).

Атом, поглотивший свет, остается в возбужденном состоянии в течение некоторого времени. При помощи различных методов исследования удалось определить это время. Оно различно для каждого состояния данного атома и, конечно, различно для разных атомов. В общем, время это равно приблизительно 10^{-8} с (иногда несколько больше). Отдельные состояния характеризуются столь большой устойчивостью, что атомы могут оставаться в них гораздо дольше, пока какое-нибудь внешнее воздействие не заставит их выйти из этого состоя-

ния. Такие состояния носят название *метастабильных*; как правило, они не имеют значения для излучения света, ибо выход из них, сопровождающийся излучением, совершается сравнительно редко. Однако косвенно они играют важную роль, способствуя накоплению атомов в таких промежуточных состояниях и делая возможным поглощение тех длин волн, которые отвечают переводу атома в состояния с еще большей энергией. Таким образом, удается наблюдать поглощение линий, соответствующих переходу между различными состояниями атома, более высокими, чем основное. Разнообразнейшие опыты показали, например, возможность *ступенчатого* возбуждения атома, т.е. возможность постепенного накопления в нем энергии путем последовательного поглощения двух *различных* квантов. Был обнаружен также ряд других сходных явлений. Все эти опыты, проведенные различными исследователями, оказались в превосходном согласии с общей картиной процессов излучения, разработанной на основе постулатов Бора.

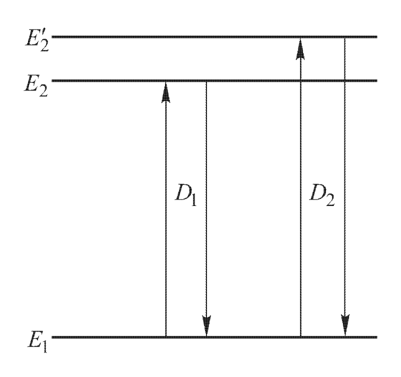


Рис. 38.5. Схема энергетических уровней атома натрия, поясняющая возникновение дублетов в испускании и поглощении

§ 210. Длительность возбужденного состояния

Выше в § 158 мы упоминали об опытах Вина, служивших для непосредственного измерения длительности τ свечения атомов, поставленных в такие условия, когда свечение их не нарушается никакими возмущающими действиями.

Полученные этим методом значения τ, показывающие, в течение какого времени интенсивность свечения падает в e раз, принимались за меру естественного затухания атома по экспоненциальному закону $I = I_0 \exp(-t/\tau)$. Кроме того, предполагалось, что все возбужденные атомы начинают свое излучение непосредственно после возбуждения и излучают непрерывно и, значит, наблюдаемое спадание общей интенсивности свечения есть результат постепенного спадания интенсивности излучения каждого атома.

В рамках представлений, лежащих в основе теории Бора, явление испускания света отдельным атомом происходит в результате перехода из одного стационарного состояния в другое, причем предполагается, что такой переход происходит практически мгновенно. С этой точки зрения постепенное ослабление свечения означает, что возбужденный атом может оставаться некоторое время в состоянии возбуждения, пока не произойдет акт перехода в другое стационарное состояние, сопровождающийся излучением. Сам переход происходит мгновенно, но время пребывания атома в возбужденном состоянии может быть более или менее длительным.

Явление испускания света имеет характер статистического процесса, подобно явлению радиоактивного распада. Каждый возбужденный атом характеризуется определенной вероятностью испускания α, не зависящей от того, сколько времени он пробыл в возбужденном состоянии. В этом случае изменение числа возбужденных атомов с течением времени должно происходить по закону

$$n = n_0 \exp(-\alpha t), \tag{210.1}$$

где n_0 — число возбужденных атомов в начальный момент, соответствующий $t = 0$. Продолжительность существования в возбужденном состоянии для различных атомов различна, но *средняя* длительность возбужденного состояния имеет определенное значение, а именно $1/\alpha$. Эта статистическая величина и принимается за характеристику *длительности* возбужденного состояния и обозначается через $\tau = 1/\alpha$ (см. упражнение 241). Так как интенсивность излучения системы пропорциональна числу имеющихся налицо возбужденных атомов, то, следовательно, и интенсивность излучения должна убывать по такому же экспоненциальному закону, т.е. по закону $I = I_0 \exp(-t/\tau)$. Таким образом, из представлений о скачкообразности испускания света мы приходим к такому же закону естественного затухания, как и из классических. Но если классический процесс затухания характеризовал каждый отдельный атом, то в квантовой теории он получает статистический смысл для целой совокупности атомов.

Итак, в зависимости от того, рассматриваем ли мы процесс излучения классически или в рамках квантовых представлений, одна и та же величина τ служит для оценки *длительности процесса излучения* (затягивания излучения) атома или для оценки *длительности его возбужденного состояния* (запаздывания излучения).

Кроме метода Вина, существуют и другие способы непосредственного определения величины τ.

§ 211. Радиационные процессы в квантовой теории атома. Вывод формулы Планка по Эйнштейну

До сих пор мы не обсуждали квантовую интерпретацию закономерностей, касающихся интенсивностей спектральных линий. Совпадение частот некоторых линий испускания и поглощения имеет в квантовой теории простое объяснение — такие линии приписываются переходам между одной и той же парой уровней. Однако вопрос о том, существует ли какая-либо связь между величиной коэффициента поглощения и интенсивностью линии испускания той же частоты, не находил ответа. Опыт показывает, далее, что интенсивности линий в спектре излучения одного и того же атома могут отличаться в десятки и сотни раз, причем в разных источниках по-разному. Например, в спектре свечения натриевой газоразрядной лампы, кроме желтых D-линий ($\lambda = 589{,}0$ и $589{,}6$ им), присутствует большое число других линий, тогда как в пламени газовой горелки возбуждаются почти исключительно D-линии. И наоборот, существуют такие линии, для которых отношение их интенсивностей практически одинаково во всех источниках света.

В 1916 г. в связи с анализом проблемы равновесного теплового излучения Эйнштейн дополнил квантовую теорию Бора количественным описанием процессов поглощения и испускания света. Новые понятия и представления, введенные Эйнштейном, полностью сохранили свое значение до наших дней и служат основой теоретического анализа большинства вопросов, касающихся интенсивности линий испускания и поглощения.

Будем рассматривать газ, состоящий из одинаковых атомов. Каждый из атомов, согласно постулатам Бора, может находиться в стационарных состояниях, которые перенумеруем $(1, 2, \ldots, i, \ldots)$ в порядке возрастания внутренней энергии $(E_1, E_2, \ldots, E_i, \ldots)$, отвечающей этим состояниям. Атомарный газ охарактеризуем средним числом атомов N_i, находящихся в состоянии i и обладающих энергией E_i. Это число атомов часто называют *заселенностью* уровня i.

Согласно изложенному выше, постулаты Бора позволяют вычислить частоты спектральных линий, если известны энергии стационарных состояний атома. Вместе с тем, постулаты Бора оставляют не выясненным вопрос о связи значений энергий стационарных состояний с особенностями внутреннего строения атомов — числом его электронов, их взаимодействием между собой и с ядром и т.д. Этот вопрос нашел свое решение только в квантовой механике, утвердившейся в 20-х годах при последующем развитии квантовых представлений.

Значения энергий E_i, как уже сказано, определяются внутренним строением атома и в дальнейшем будут считаться заданными. Что касается заселенностей, то они зависят от условий, внешних по отношению к атому. Если, например, газ находится в состоянии термодинамического равновесия при температуре T, то заселенности определяются принципом Больцмана

$$\frac{N_i}{N_j} = \frac{g_i}{g_j} \exp\left(-\frac{E_i - E_j}{kT}\right), \tag{211.1}$$

где g_i — *статистический вес*, или кратность состояния i [1]). В неравновесных, но неизменных во времени условиях заселенности можно вычислить, если известны длительность τ_i состояния i (см. § 210) и число актов возбуждения W_i атомов в состояние i за единицу времени (так называемая *вероятность возбуждения* в единицу времени), а именно

$$N_i = W_i \tau_i. \tag{211.2}$$

Соотношение (211.2) означает, очевидно, равенство числа актов возбуждения (W_i) и числа актов ухода из состояния i (N_i/τ_i) за единицу времени. Величина W_i зависит от особенностей того способа, которым осуществляется возбуждение атома. Это может быть столкновение атома с электроном в газовом разряде, сопровождающееся передачей энергии поступательного движения внутренним степеням свободы атома, либо приобретение энергии атомом при диссоциации молекулы, либо химическая реакция, продукты которой оказываются

[1]) См. Д. В. Сивухин. Общий курс физики. Т. II.– М.: Физматлит, 2003.

в возбужденном состоянии, и т.д. С некоторыми способами возбуждения мы познакомимся позже (см. § 212 и гл. XXXIX и XL). В данном же параграфе заселенности также предполагаются заданными известными величинами.

Пусть атом по тем или иным причинам оказался в возбужденном состоянии m. Если его полностью изолировать от каких бы то ни было дальнейших воздействий, он тем не менее будет испытывать переход в одно из состояний (n), обладающее меньшей энергией E_n, и при этом будет испущен фотон с частотой $\omega_{mn} = (E_m - E_n)/\hbar$. Такой процесс называется самопроизвольным или *спонтанным испусканием* света, а соответствующие переходы атома — *спонтанными переходами.*

Причины спонтанного испускания выясняются квантовой электродинамикой, а в теории Бора его наличие является фактом, принимаемым для объяснения и описания опытных данных.

Пусть процессы возбуждения обеспечивают неизменную во времени заселенность возбужденных состояний. Это означает, что на смену атомам, испытавшим спонтанные переходы, приходят новые, и газ в целом создает излучение с некоторой постоянной средней мощностью. Для перехода между какими-нибудь определенными уровнями m и n средняя мощность спонтанного испускания $Q_{mn}^{\text{спонт}}$ пропорциональна энергии соответствующего фотона $\hbar\omega_{mn}$ и заселенности N_m уровня m, верхнего для данного перехода, т.е. обладающего большей энергией:

$$Q_{mn}^{\text{спонт}} = A_{mn}\hbar\omega_{mn}N_m. \tag{211.3}$$

Коэффициент A_{mn}, имеющий размерность с^{-1}, является характеристикой рассматриваемого перехода $m \to n$ и называется *первым коэффициентом Эйнштейна* или *коэффициентом Эйнштейна для спонтанного испускания.* Величина

$$Z_{mn}^{\text{спонт}} = \frac{Q_{mn}^{\text{спонт}}}{\hbar\omega_{mn}} = A_{mn}N_m \tag{211.4}$$

есть, очевидно, число переходов $m \to n$, происходящих в единицу времени в результате спонтанного испускания фотонов $\hbar\omega_{mn}$. Можно сказать, следовательно, что A_{mn} представляет собой число переходов в единицу времени в расчете на один атом в верхнем для данного перехода уровне m. Поэтому A_{mn} часто называют *скоростью* или *вероятностью спонтанного перехода* $m \to n$.

Если из состояния m атом может переходить *только* в состояние n, мощность $Q_{mn}^{\text{спонт}}$ равна, очевидно, энергии $\hbar\omega_{mn}N_m$, деленной на длительность τ_m состояния m. В этом случае, следовательно, $A_{mn} = 1/\tau_m$. Если же из состояния m возможны переходы в несколько состояний i $(E_i < E_m)$, то $\sum\limits_i A_{mi} = 1/\tau_m$ и величина $A_{mi}\tau_m$ характеризует ту долю общего числа переходов из состояния m, которую составляют переходы $m \to i$.

Из соотношения (211.3) видно, что по отношению к мощности спонтанного испускания можно провести четкое разделение роли внешних условий, в которых находятся атомы, выражающихся в числе возбужденных атомов N_m, и роли внутренней структуры атома,

определяющей величину коэффициента A_{mn}. Можно сказать поэтому, что A_{mn} служит атомной характеристикой спонтанного испускания фотона при переходе $m \to n$, аналогично тому, как энергии E_i характеризуют стационарные состояния атома в теории Бора.

Вопрос о связи коэффициентов A_{mn} с внутренним строением атома выходит за рамки теории Эйнштейна. Этот вопрос полностью разъяснен квантовой механикой, и разработанные в ней методы позволяют рассчитывать значения A_{mn} практически для любого перехода, исходя из свойств уровней m, n. Ниже приводятся в качестве примера коэффициенты A_{mn} для некоторых линий атомарного водорода (серии Лаймана L и Бальмера H):

Символ линии	L_α	L_β	L_γ	H_α	H_β	H_γ	H_δ
Длина волны λ, нм	121,6	102,6	97,3	656,3	486,1	434,0	410,2
Коэффициент Эйнштейна A_{mn}, 10^8 с$^{-1}$	4,68	0,55	0,13	0,44	0,084	0,025	0,0097

В большинстве опытов, обсуждавшихся выше в связи с экспериментальным обоснованием теории Бора, мы имели дело именно со спонтанным испусканием света. Таково положение и во многих современных источниках — электрических дугах, пламенах, газоразрядных лампах и т.п. [1]). Направим свет от источника в спектральный аппарат и измерим интенсивность спектральной линии, отвечающей переходу $m \to n$. Из геометрических условий опыта легко рассчитать ту часть общей мощности $Q_{mn}^{\text{спонт}}$, которая попадает на приемник излучения, и по измеренному значению интенсивности линии определить $Q_{mn}^{\text{спонт}}$. Если из каких-либо соображений известна заселенность N_m, то с помощью (211.3) можно найти коэффициент Эйнштейна A_{mn}. Существует и ряд других методов измерения этого коэффициента.

Соотношение (211.3) позволяет объяснить результаты наблюдений, о которых шла речь выше. Составим отношение интенсивностей двух спектральных линий, соответствующих переходам $m \to n$ и $k \to j$:

$$\frac{Q_{mn}^{\text{спонт}}}{Q_{kj}^{\text{спонт}}} = \frac{\omega_{mn}}{\omega_{kj}} \, \frac{A_{mn}}{A_{kj}} \, \frac{N_m}{N_k} \, .$$

Отношение заселенностей N_m/N_k уровней m и k может изменяться в чрезвычайно широких пределах в зависимости от условий, реализующихся в источниках света. Можно сказать поэтому, что отличия в распределении интенсивности по спектральным линиям в различных источниках света определяются различием распределений возбужденных атомов по уровням. Наоборот, если сравниваемые спектральные линии отвечают переходам с одного и того же верхнего уровня, отношение их интенсивностей будет одинаковым для всех условий и всех источников света (впрочем, см. предыдущее примечание).

В гл. XXVIII подробно рассматривался другой радиационный процесс — поглощение (абсорбция) света. При квантовом описании по-

[1]) Иногда важно и то обстоятельство, что свет, испущенный глубинными слоями источника, частично поглощается внешними.

глощение связывается с переходом атома из энергетически низшего состояния в высшие, и частоты поглощаемых фотонов равны $\omega_{mn} = (E_m - E_n)/\hbar$.

Запишем мощность $Q_{mn}^{\text{погл}}$, поглощаемую в единице объема газа вследствие переходов $n \to m$, в виде, аналогичном (211.3): величина $Q_{mn}^{\text{погл}}$ пропорциональна $\hbar\omega_{mn}$, заселенности исходного состояния N_n и спектральной плотности излучения $u(\omega_{mn})$:

$$Q_{mn}^{\text{погл}} = B_{nm}\hbar\,\omega_{mn}N_n\,u(\omega_{mn}). \tag{211.5}$$

Коэффициент пропорциональности B_{nm} носит название *второго коэффициента Эйнштейна* или *коэффициента Эйнштейна для поглощения.* Поскольку $[N_n] = \text{см}^{-3}$, $[u(\omega)] = \text{Дж} \cdot \text{см}^{-3} \cdot \text{с}$, размерность коэффициента B_{nm} есть $[B_{nm}] = \text{Дж}^{-1}\text{см}^3\text{с}^{-2}$. Отношение

$$Z_{nm}^{\text{погл}} = \frac{Q_{nm}^{\text{погл}}}{\hbar\,\omega_{mn}} = B_{nm}u(\omega_{mn})N_n \tag{211.6}$$

представляет собой число переходов $n \to m$, совершающихся в единице объема за единицу времени и сопровождающихся поглощением фотонов $\hbar\omega_{mn}$. Произведение $B_{nm}u(\omega_{mn})$, имеющее размерность с^{-1}, играет роль, аналогичную A_{mn}, т.е. определяет число указанных переходов в единицу времени в расчете на один атом в состоянии n. Поэтому $B_{nm}u(\omega_{mn})$ часто называют *вероятностью поглощения* в единицу времени. Коэффициент B_{nm}, как и A_{mn}, является характеристикой данного перехода, зависящей только от свойств атома, но не от внешних условий. Более того, Эйнштейн показал, что A_{mn} и B_{nm} пропорциональны друг другу (см. ниже).

Кроме спонтанного испускания и поглощения, Эйнштейн ввел представление еще об одном радиационном процессе, — *индуцированном* (или *вынужденном*, или *стимулированном*) *испускании.* Индуцированное испускание, в отличие от спонтанного, состоит в испускании фотона под действием внешнего электромагнитного поля: атом, находящийся в энергетически более высоком состоянии (E_m), переходит в состояние с меньшей энергией (E_n), и излучается фотон с частотой $\omega_{mn} = (E_m - E_n)/\hbar$. Энергия, излучаемая в результате вынужденных переходов, и их число в единице объема за единицу времени записываются аналогично (211.5) и (211.6):

$$Q_{mn}^{\text{инд}} = B_{mn}\hbar\,\omega_{mn}N_m u(\omega_{mn}), \tag{211.7}$$

$$Z_{mn}^{\text{инд}} = \frac{Q_{mn}^{\text{инд}}}{\hbar\,\omega_{mn}} = B_{mn}\,u(\omega_{mn})N_m. \tag{211.8}$$

Величина B_{mn} называется *коэффициентом Эйнштейна* для *вынужденного* (*индуцированного*) *испускания.* Если поле отсутствует ($u(\omega_{mn}) = 0$), то вынужденные переходы не происходят. Таким образом, внешнее поле вызывает переходы, сопровождающиеся как поглощением, так и испусканием фотонов.

Существование вынужденных переходов и вынужденного испускания непосредственно следует из целого ряда опытных фактов и теоретических соображений. Эйнштейн показал, что постулаты Бора не

противоречат твердо установленным законам теплового излучения, только если принять в расчет вынужденные переходы. Приведем вывод формулы Планка по Эйнштейну.

Пусть атомарный газ находится в замкнутом объеме при изотермических условиях. В том же объеме присутствует, естественно, и электромагнитное поле, обусловленное тепловым испусканием. Как было выяснено в гл. XXXVI, рассматриваемая система, состоящая из газа и теплового излучения, будет находиться в термодинамическом равновесии, если газ и излучение обладают одной и той же температурой, атомы подчинены распределению Максвелла–Больцмана, а излучение — формуле Планка. Однако термодинамическое равновесие системы не означает, что энергия каждого атома газа сохраняется неизменной. Между атомами и полем осуществляется постоянный обмен энергией. Атомы излучают и поглощают фотоны, переходя из одних состояний в другие; происходит и обмен импульсами между атомом и полем — импульс изменяется в процессе испускания и поглощения фотона (см. § 184). Между атомами газа осуществляется также обмен импульсами и энергией при их столкновениях между собой. Однако ни один из этих процессов не нарушает термодинамического равновесия системы в целом и соответствующих ему законов распределения атомов по энергиям и скоростям, равно как и распределения энергии излучения по спектру.

Сказанное означает, что мощность излучения, поглощаемая газом при переходах $n \to m$, должна равняться мощности, излучаемой при обратных — вынужденных и спонтанных — переходах. Выполнение этого условия обеспечивает неизменность и спектральной плотности энергии излучения (для частоты ω_{mn}), и среднего числа атомов в состояниях m, n. Итак, в состоянии термодинамического равновесия должно выполняться равенство

$$Q_{nm}^{\text{погл}} = Q_{mn}^{\text{спонт}} + Q_{mn}^{\text{инд}} \quad \text{или} \quad Z_{nm}^{\text{погл}} = Z_{mn}^{\text{спонт}} + Z_{mn}^{\text{инд}}. \tag{211.9}$$

Обозначим через $u_{\omega_{mn},T}$ спектральную плотность теплового излучения. В силу соотношений (211.4), (211.6), (211.8) из (211.9) следует

$$B_{nm} N_n u_{\omega_{mn},T} = A_{mn} N_m + B_{mn} N_m u_{\omega_{mn},T}. \tag{211.10}$$

Наша задача состоит в том, чтобы в соответствии с теорией Эйнштейна вывести формулу Планка. Поэтому (211.10) нужно рассматривать как уравнение относительно $u_{\omega_{mn},T}$. Должно иметь место такое распределение энергии излучения по спектру, чтобы выполнялось условие равновесия между газом и излучением (211.10). Из этого условия находим

$$u_{\omega_{mn},T} = \frac{A_{mn}/B_{mn}}{B_{nm}N_n/B_{mn}N_m - 1}. \tag{211.11}$$

В состоянии термодинамического равновесия заселенности уровней определяются распределением Больцмана (211.1), вследствие чего выражению (211.11) можно придать вид

$$u_{\omega_{nm},T} = \frac{A_{mn}/B_{mn}}{(g_n B_{nm}/g_m B_{mn}) \exp(\hbar\omega_{mn}/kT) - 1}, \tag{211.12}$$

причем разность $E_m - E_n$ заменена, в соответствии с формулой Бора, энергией фотона $\hbar\omega_{mn}$. Полученное соотношение удовлетворяет второму закону Вина (200.1), согласно которому температура может фигурировать только в комбинации ω/T.

Вспомним, что спектральная плотность равновесного излучения, как это подчеркивалось в § 196, должна представлять собой универсальную функцию частоты и температуры, т.е. не может зависеть от свойств конкретной излучающей и поглощающей системы. Поэтому A_{mn}/B_{mn} и B_{nm}/B_{mn} должны иметь определенные универсальные значения. Для нахождения последних воспользуемся законом Рэлея–Джинса (201.1), который подтверждается измерениями, если длины волн λ и температура T достаточно велики (т.е. $\lambda \gg \lambda^*_{\max} = 0{,}51/T$, см. § 200, 201). Именно, для указанных условий $\exp(\hbar\,\omega_{mn}/kT) \approx 1 + \hbar\,\omega_{mn}/kT$, и сопоставление соотношений (211.12) и (201.1) приводит нас к формулам [1])

$$g_n B_{nm} = g_m B_{mn}, \quad A_{mn} = \frac{\hbar\omega^3_{mn}}{\pi^2 c^3}\, B_{mn}, \tag{211.13}$$

$$u_{\omega_{mn},T} = \frac{\hbar\omega^3_{mn}}{\pi^2 c^3}\left(\exp\frac{\hbar\,\omega_{mn}}{kT} - 1\right)^{-1}. \tag{211.14}$$

Поскольку, наконец, наши рассуждения применимы к любому переходу, то частоту ω_{mn} в (211.14) можно заменить на произвольное значение ω, после чего соотношение (211.14) оказывается совпадающим с формулой Планка.

Если в ходе выкладок не принять во внимание вынужденное испускание, то, как легко проверить, мы придем к формуле вида (211.14), но без единицы в знаменателе. Следовательно, теория Эйнштейна не противоречит законам теплового излучения, только если допустить существование вынужденного испускания. Если же принять постулат о вынужденном испускании, то можно посмотреть на (211.14) с иной точки зрения. Если $\hbar\omega \gg kT$, то можно пренебречь единицей в сравнении с $\exp(\hbar\omega/kT)$; физически это означает, что для сохранения термодинамического равновесия практически достаточно спонтанного испускания, вынужденное же испускание значительно меньше поглощения и не играет заметной роли, так как высоко возбужденных атомов мало при указанном соотношении между температурой и частотой. Наоборот, в длинноволновой области спектра, где применим приближенный закон Рэлея–Джинса ($\hbar\omega \ll kT$), числа переходов, происходящих с вынужденным излучением и поглощением фотонов, почти одинаковы.

Итак, опираясь на общие законы теплового излучения, надежно подтвержденные опытом, и на новые квантовые представления о процессах испускания и поглощения света, Эйнштейн вывел формулу Планка и тем самым показал, что зарождавшаяся в то время квантовая теория находится в соответствии с одним из фундаментальных законов физики.

---

[1]) Следует принять во внимание равенства $cu_{\nu,T} = 4\varepsilon_{\omega,T}$, $2\pi u_{\omega,T} = u_{\nu,T}$.

Установленные Эйнштейном соотношения (211.13) между коэффициентами A_{mn}, B_{nm} и B_{mn} имеют совершенно общий характер и применимы к любым квантовым системам (атомы, молекулы, ионы и т.п.). Хотя в ходе рассуждений мы говорили об атомах, но фактически подразумевалось только существование стационарных состояний с дискретными значениями энергий. Разумеется, представления о трех радиационных процессах применимы и к таким источникам, которые не находятся в состоянии термодинамического равновесия.

Из соотношений Эйнштейна (211.13) легко видеть, что при прочих равных условиях поглощение сильнее в тех спектральных линиях, для которых большее значение имеет коэффициент A_{mn}. В случае, например, серии Бальмера в спектре атомарного водорода (см. рисунки 38.1 и 38.3) поглощение должно быть слабее у старших членов серии, поскольку для них, согласно приведенным выше данным, коэффициенты A_{mn} меньше. Соотношения (211.13) подтверждаются измерениями без всяких исключений. Поэтому, измеряя коэффициенты поглощения и опираясь на (211.13), можно определять числовые значения первых коэффициентов Эйнштейна A_{mn}.

Ранее неоднократно отмечалось, что свет, излучаемый атомами, не является строго монохроматическим и состоит из спектральных составляющих, которые расположены в некотором интервале частот, имеющем определенную конечную ширину (см. § 158). Все изложенное в настоящем параграфе относилось к так называемой интегральной интенсивности спектральной линии, т.е. к сумме всех ее монохроматических составляющих. Если применяется спектральный аппарат достаточно высокой разрешающей силы, то можно измерить и спектральную плотность излучения внутри линии, или, как говорят, *контур спектральной линии.*

Для количественного описания контура линии спонтанного испускания следует составить выражение для мощности $q_{mn}^{\text{спонт}}(\omega)\,d\omega$, испускаемой единицей объема при спонтанных переходах $n \to m$ атомов и приходящейся на спектральный интервал $d\omega$:

$$q_{mn}^{\text{спонт}}(\omega)\,d\omega = \hbar\omega N_m a_{mn}(\omega)\,d\omega. \qquad (211.15)$$

Величина $a_{mn}(\omega)$, называемая *спектральной плотностью первого коэффициента Эйнштейна*, описывает контур линии и связана с A_{mn} соотношением

$$\int a_{mn}(\omega)\,d\omega = A_{mn}. \qquad (211.16)$$

Перейдем к вопросу о контуре линии поглощения. Для его измерения нужно осветить поглощающий газ монохроматическим светом, либо, что физически эквивалентно, провести спектральное разложение света, прошедшего через газ, и проследить за отдельными монохроматическими составляющими. Аналогичным образом исследуется и контур линии вынужденного испускания. В соответствии с этим рассматривают мощность, поглощаемую и индуцированно испускаемую в единице объема и в интервале частот $d\omega$ при переходах $n \to m$ и

$m \to n$ соответственно:

$$q_{nm}^{\text{погл}}(\omega)\,d\omega = \hbar\omega N_n b_{nm}(\omega) u(\omega)\,d\omega, \qquad \int b_{nm}(\omega)\,d\omega = B_{nm}, \quad (211.17)$$

$$q_{mn}^{\text{инд}}(\omega)\,d\omega = \hbar\omega N_m b_{mn}(\omega) u(\omega)\,d\omega, \qquad \int b_{mn}(\omega)\,d\omega = B_{mn}. \quad (211.18)$$

Здесь $u(\omega)\,d\omega$ — энергия монохроматического излучения, в котором находятся атомы.

Более детальный анализ показывает, что функции $a_{mn}(\omega)$, $b_{mn}(\omega)$ и $b_{nm}(\omega)$ связаны между собой соотношениями, аналогичными (211.13):

$$g_n b_{nm}(\omega) = g_m b_{mn}(\omega), \quad a_{mn}(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}\, b_{mn}(\omega). \quad (211.19)$$

Если средняя частота линии значительно превосходит ее ширину, то в пределах последней множитель ω^3 можно считать практически постоянным. В этом случае, следовательно, линии поглощения, вынужденного и спонтанного испускания имеют подобные контуры.

Этот вывод теории подтверждается опытом только для сравнительно малых интенсивностей света. Оказывается, что при достаточно мощных полях выполняется лишь пропорциональность $a_{mn}(\omega)$ и $b_{mn}(\omega)$, тогда как $a_{mn}(\omega)$, вообще говоря, не пропорционально $b_{nm}(\omega)$. Объяснения этого важного явления лежат вне курса общей физики, и мы отметим лишь, что степень нарушения равенства $g_n b_{nm}(\omega) = g_m b_{mn}(\omega)$ зависит от многих обстоятельств (спектрального состава излучения, его мощности, длительности состояний n и m и др.) и может оказаться значительной при сравнительно не очень больших мощностях, порядка 10^{-2} Вт/см^2.

Волны, испущенные в результате вынужденных переходов, обладают, как показал Эйнштейн, следующей важной особенностью: их *частота, фаза, направление распространения* и *состояние поляризации* такие же, как у излучения, вызвавшего переходы. Другими словами, индуцированно испущенные фотоны неотличимы от фотонов, падающих на атомы, и роль индуцированного испускания сводится только к увеличению амплитуды поля.

Указанное свойство вынужденного испускания существенно для понимания связи между коэффициентом поглощения и введенными выше вероятностями поглощения и испускания. Исследование абсорбции света в каком-либо веществе состоит в сравнении интенсивности света, прошедшего вещество, с интенсивностью падающего на него излучения. Если в веществе находятся возбужденные атомы, то, кроме переходов, связанных с поглощением фотонов, будут происходить и вынужденные переходы. Как было сказано, вынужденно испущенные фотоны неотличимы от фотонов падающего света, т.е. вынужденные переходы частично компенсируют убыль фотонов в прошедшем пучке, обусловленную поглощательными переходами.

Выразим высказанные соображения в виде количественного соотношения. Пусть на вещество падает поток фотонов с приблизительно одинаковыми направлениями распространения (параллельный пучок лучей). В этом случае спектральные плотности энергии и ее поток

связаны следующим образом:

$$I(\omega) = cu(\omega).$$

Выделим в среде слой толщиной dz, ориентированный перпендикулярно падающему потоку. В результате переходов $n \to m$, сопровождающихся поглощением света, поток уменьшится на протяжении слоя на величину

$$q_{nm}^{\text{погл}}(\omega)\,dz = \frac{1}{c}\,\hbar\omega N_n b_{nm}(\omega) I(\omega)\,dz.$$

В результате обратных переходов $m \to n$ вынужденное испускание увеличит поток на величину (в том же слое)

$$q_{mn}^{\text{инд}}(\omega)\,dz = \frac{1}{c}\,\hbar\omega N_m b_{mn}(\omega) I(\omega)\,dz.$$

Таким образом, суммарное изменение потока после прохождения слоя равно

$$dI(\omega) = -\frac{\hbar\omega}{c}\,[N_n b_{nm}(\omega) - N_m b_{mn}(\omega)] I(\omega)\,dz.$$

Вместе с тем, изменение потока можно выразить через коэффициент поглощения

$$dI(\omega) = -\alpha(\omega) I(\omega)\,dz.$$

Сравнивая два последних соотношения, находим

$$\alpha(\omega) = \frac{\hbar\omega}{c}\,[N_n b_{nm}(\omega) - N_m b_{mn}(\omega)] = \\ = \frac{1}{4}\,\lambda^2 a_{mn}(\omega) g_m \left(\frac{N_n}{g_n} - \frac{N_m}{g_m}\right). \quad (211.20)$$

Выражения (211.20) устанавливают связь между непосредственно измеряемым коэффициентом поглощения и коэффициентами Эйнштейна. В выполненном расчете приняты во внимание переходы только между двумя состояниями m и n. Полный коэффициент поглощения, обусловленный переходами между всеми состояниями атома, равен сумме выражений типа (211.20).

В соответствии с качественными соображениями о роли вынужденных переходов возбужденные атомы уменьшают величину коэффициента поглощения. С некоторыми экспериментальными проявлениями этого обстоятельства мы уже встречались ранее при обсуждении отрицательной дисперсии (см. § 156) и опытов Вавилова, посвященных зависимости коэффициента поглощения от интенсивности света (см. § 157).

Выше неоднократно обсуждались многообразные физические причины, обусловливающие немонохроматичность света, испускаемого атомами и молекулами (см. § 4, 14, 22, 158, 210). В результате нерегулярных, статистических возмущений, испытываемых излучающим атомом со стороны остальных частиц среды, излучение представляет собой последовательность волновых цугов, некогерентных между

собой и отличающихся по амплитуде, фазе и частоте. Анализ волновых цугов, основанный на теореме Фурье, позволяет вычислить контур линии (см. § 22), т.е. выяснить в каждом конкретном случае вид зависимости спектральной плотности коэффициентов Эйнштейна от частоты.

Обсудим интерпретацию амплитудной, частотной и фазовой модуляции излучения в рамках квантовых представлений. Отметим, прежде всего, общую причину уширения спектральных линий, связанную со спонтанными переходами. Благодаря этим переходам длительность возбужденных состояний, а следовательно, и волновых цугов ограничена. В результате спонтанные переходы сами по себе приводят к уширению линии, причем $a_{mn}(\omega)$ имеет вид (ср. (22.13))

$$a_{mn}(\omega) = A_{mn} \frac{\Gamma/\pi}{(\omega - \omega_{mn})^2 + \Gamma^2}\,. \tag{211.21}$$

Подробный анализ функции вида (211.21) проделан в § 22, и мы не будем его повторять. Укажем только, что полуширина Γ, согласно квантовой теории, связана с длительностью состояний m, n соотношением

$$\Gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau_m} + \frac{1}{\tau_n}\right), \tag{211.22}$$

т.е. определяется длительностью обоих состояний.

Уширение линий, обусловленное взаимодействием излучающих атомов со средой, в сильной степени зависит, естественно, от свойств этой среды и имеет совершенно различный характер в газах, жидкостях и в твердых телах. Мы разберем сравнительно простой случай разреженных газов, где взаимодействие происходит в течение сравнительно кратковременных столкновений, длительность которых значительно меньше времени свободного пробега. В таких условиях излучение будет, очевидно, иметь вид последовательности цугов, причем их длительность определяется процессами в момент столкновения.

Если в результате столкновений атом покидает уровни m, n (неупругие столкновения), то длительность цугов сокращается и будут справедливы формулы (211.21), (211.22), причем под τ_m, τ_n следует понимать длительности состояний m, n, уменьшенные вследствие столкновений. Для интерпретации фазовой модуляции излучения нужно принять во внимание то обстоятельство, что во время столкновений несколько изменяются энергии стационарных состояний и частота ω_{mn}. Из-за этого изменения частоты происходит дополнительный набег фазы в течение столкновения, т.е. фазы излучения до и после столкновения оказываются различными. В итоге излучение разбивается на цуги с длительностью, определяемой временем τ, в течение которого указанный случайный «сбой» фазы достигает величины порядка π. Как было показано в § 22, фазовая модуляция излучения также приводит к выражению для контура линии вида (211.21), причем $\Gamma = 1/\tau$.

В рассматриваемом случае разреженного газа контур линии может быть сильно уширен вследствие эффекта Доплера, обусловленного тепловым движением атомов. Если принять в расчет только доп-

леровское уширение, то, согласно соотношению (22.17),

$$a_{mn}(\omega) = A_{mn}(\sqrt{\pi}\,\Delta\omega_D)^{-1} \exp\left[-\frac{(\omega-\omega_{mn})^2}{(\Delta\omega_D)^2}\right]; \qquad \Delta\omega_D = \frac{\omega_{mn}\bar{v}}{c}, \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{2kT}{m_a}}, \tag{211.23}$$

где m_a — масса атома.

В зависимости от внешних условий и свойств излучающего атома преобладать может либо та, либо другая причина уширения. При достаточно низких давлениях основную роль играет доплеровское уширение: в видимой области спектра $\Delta\omega_D \approx 10^{10}$ с$^{-1}$ ($T = 500$ К, атомный вес 20). Естественная ширина обычно значительно меньше ($\sim 10^8$ с$^{-1}$). Поэтому для ее изучения Вин и применял в качестве источника света атомный пучок (каналовые лучи, см. § 158). Понятно, что уширение из-за неупругих столкновений и фазовой модуляции увеличивается с ростом давления, так как при этом сокращается время свободного пробега. Обычно уширение из-за столкновений становится заметным при давлениях, превышающих 10 мм рт. ст., и начинает преобладать при давлениях порядка атмосферы.

Таким образом, изложенное в § 207–211 убеждает нас, что вся совокупность спектроскопических данных о положении, интенсивности и контуре линий находит исчерпывающее объяснение в рамках квантовой теории.

§ 212. Возбуждение свечения нагреванием

Квантовая теория позволяет дать ясное истолкование многочисленным опытам по возбуждению свечения в парах, вводимых в пламя газовой горелки.

Введем в бесцветное пламя бунзеновской горелки пары какого-либо металла; пропитаем, например, кусочек асбеста раствором хлористого стронция и внесем такой фитиль в пламя горелки. Пламя окрасится в красный цвет, и наблюдение при помощи спектроскопа обнаружит присутствие линии стронция с $\lambda = 689{,}2$ нм. Ни линии хлора, ни другие линии стронция при этом не обнаруживаются. Вообще говоря, в пламени можно возбудить лишь сравнительно немногие линии некоторых металлов. Объяснение этого следует искать в тех количествах энергии, которые могут сообщаться атому при столкновении с частицами, составляющими пламя (атомами, молекулами, ионами, электронами). Пламя бунзеновской горелки характеризуется температурой около 2000 К. Средняя кинетическая энергия частиц в этих условиях невелика и составляет всего около 0,20 эВ. В пламени с температурой 2000 К присутствует некоторое количество частиц с кинетической энергией, значительно превышающей среднюю энергию, ибо скорости распределены между частицами хаотически. Однако по закону распределения скоростей (закон Максвелла) число частиц, обладающих скоростями, значительно бóльшими средней, быстро падает по мере удаления от средней величины. Поэтому число частиц, обладающих кинетической энергией больше 2–3 эВ, настоль-

ко незначительно, что практически трудно ожидать свечения атомов, потенциал возбуждения которых превышает эти величины.

Таблица 38.2 содержит данные, относящиеся к легко возбудимым атомам, наблюдаемым в пламени.

Таблица 38.2

Длины волн и потенциалы возбуждения некоторых атомов

Название	Длина волны λ, Å	Потенциал возбуждения, В	Название	Длина волны λ, Å	Потенциал возбуждения, В
Литий	6707,8	1,84	Стронций	6892	1,8
Натрий	5896–5890	2,1	Барий	5535	2,24
Калий	7664–7699	1,6			

Наоборот, такие вещества, как ртуть (потенциал возбуждения 4,9 В) или водород (потенциал возбуждения 10, 15 В), нельзя сколько-нибудь заметно возбудить в пламени горелки. В пламени, температура которого выше, можно наблюдать линии и с более высокими потенциалами возбуждения. Так, в столбе электрической дуги, горящей при достаточно высоком давлении (например при атмосферном), удары ионов и электронов, летящих под действием электрического поля, сообщают молекулам газов и паров, составляющих столб дуги, значительную кинетическую энергию, в результате чего в дуге устанавливается высокая температура (6000–7000 К), обеспечивающая в свою очередь ионизацию, достаточную для прохождения электрического разряда между электродами. В столбе дуги можно наблюдать несравненно больше линий, чем в пламени газовой горелки.

Представляет интерес отметить, что если между атомами, молекулами, ионами и электронами столкновения происходят достаточно часто, то между ними устанавливается тепловое равновесие, и распределение скоростей всех частиц можно найти по закону Максвелла, причем средние кинетические энергии частиц разных сортов будут одинаковы. Это, по-видимому, имеет место, когда дуговой разряд происходит при атмосферном давлении или при несколько более низком. Но если давление в дуге достаточно мало, то, как показывает опыт, равновесие между атомами и электронами может и не наступить, хотя равновесие между атомами, равно как и равновесие между электронами, может установиться [1]). Таким образом, можно говорить об

[1]) Выравнивание средней кинетической энергии электронов и атомов идет довольно сложным путем. При упругом столкновении электронов с атомами обмен кинетической энергией происходит в весьма слабой степени вследствие огромного различия в массах электронов и атомов. При неупругом столкновении кинетическая энергия передается атомам крупными порциями (возбуждение, ионизация), но воспринимается ими не как кинетическая энергия, а как внутренняя энергия атома, перешедшего в иное состояние. Однако возбужденный атом может не только испустить приобретенную им энергию в виде излучения; возможны и столкновения возбужденного ато-

атомной температуре (максвелловское распределение скоростей атомов, соответствующее температуре T_a) и об электронной температуре (максвелловское распределение скоростей электронов, соответствующее температуре T_e), но T_e не равно T_a, а значительно выше ($T_e \gg T_a$).

В таких условиях возбуждение атомов может происходить за счет столкновений с электронами, т.е. условие возбуждения определяет температура электронов. В тех же случаях, когда тепловое равновесие имеет место (горелка, столб дуги при атмосферном давлении), возбуждение свечения можно определить по температуре газа.

§ 213. Полосатые спектры молекул в видимой и ультрафиолетовой областях

При обсуждении спектра водорода упоминалось, что в нем наряду с дискретными спектральными линиями, составляющими серии, наблюдается ряд полос, которые при исследовании приборами с достаточной разрешающей способностью расчленяются на ряд тесно расположенных друг около друга линий, образуя так называемый многолинейчатый, или полосатый, спектр. Подобной особенностью отличаются и спектры других газов, молекулы которых состоят из двух или нескольких атомов. Наоборот, для одноатомных газов (благородные газы, пары металлов) характерны только линейчатые атомные спектры. Правда, при значительном давлении пары металлов (например Hg, Zn и др.), равно как и благородные газы, также излучают полосатые спектры, но, как показывают разнообразные исследования, при этих условиях в парах образуются нестойкие соединения типа Hg_2, He_2, HgH, Cs_2 и т.д., т.е. *молекулы*, с существованием которых и связано излучение полосатых спектров.

Для наблюдения молекулярных спектров, так же как и спектров атомов, следует по возможности защитить молекулы от сильных возмущающих воздействий окружающих частиц, т.е. наблюдать вещество в газообразном состоянии. Возбудить молекулярные спектры можно в пламени горелки или в различных видах электрического разряда: гейслерова трубка, дуга, искра. При этом, как правило, следует избегать слишком сильных возбуждений, ибо в противном случае может наступить распад молекул (диссоциация) и, следовательно, исчезнут носители молекулярных спектров. Такой процесс легко наблюдать при возбуждении спектров в электрической дуге. В наиболее горячих частях дуги с температурой 5000–7000 К испускается, главным образом, излучение атомов и наиболее прочных соединений (например CN); излучение же большинства соединений сосредоточено в основном в более холодных частях дуги.

Полосатые спектры можно возбуждать также, заставляя газ светиться под действием соответствующего освещения (флуоресценция).

ма с невозбужденным, при которых энергия возбуждения распределяется между обоими атомами в виде кинетической энергии. Такие столкновения, получившие название *столкновений второго рода*, наблюдаются на опыте. Они-то и играют важную роль в явлениях электрического разряда при переходе кинетической энергии электронов в кинетическую энергию атомов.

Наиболее хорошо исследованы спектры двухатомных молекул. Многоатомные молекулы представляют собой обычно гораздо менее прочные соединения, так как многообразие взаимных вращений и колебаний отдельных частей такой молекулы открывает большое число возможностей распада. Поэтому возбуждение интенсивного спектра многоатомных молекул затруднительно. Вместе с тем спектры многоатомных молекул значительно сложнее, и для различения важных деталей требуется применение спектральных приборов особенно большой разрешающей силы. Совокупность обоих обстоятельств — малая интенсивность и необходимость применения приборов большого разрешения — очень затрудняет исследование спектров испускания многоатомных молекул. Приходится ограничиться главным образом изучением спектров поглощения; этот метод, основанный на законе Кирхгофа, применяется и к двухатомным молекулам. Многие молекулы, однако, поглощают в далеком ультрафиолете, что в свою очередь затрудняет исследование. Так как полосатые спектры не обладают значительной интенсивностью, то общую картину их легче получить при использовании светосильного спектрографа с призмами из стекла или кварца. Однако у таких приборов разрешающая сила не очень велика, и они передают только грубые черты молекулярных спектров. Для различения тонких деталей необходимо применение приборов большого разрешения — обычно применяются дифракционные решетки, что требует длительных экспозиций.

Трудности наблюдения полосатых спектров многоатомных молекул и сложность их теоретической трактовки привели к тому, что спектроскопическое исследование их еще не продвинулось достаточно далеко. В дальнейшем изложении мы ограничимся двухатомными

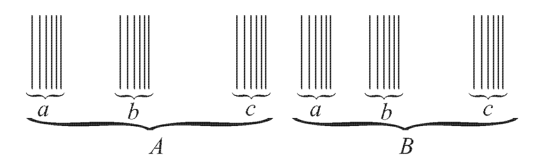


Рис. 38.6. Схематическое изображение полосатого спектра молекулы

молекулами. Схематический вид и фотография типичного молекулярного спектра испускания представлены на рисунках 38.6 и 38.7. Как

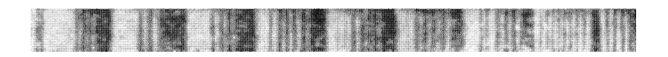


Рис. 38.7. Фотография одной из систем полос в спектре молекулы йода

мы видим, он состоит из ряда линий, сгруппированных в *тесные полосы*. Эти полосы (a, b, c) расположены с определенной правильностью, образуя *системы* полос; в свою очередь системы A, B, ... полос, разбросанные нередко по всему спектру, составляют *группу*, или *се-*

рию, систем полос[1]). Фотография изображает одну из систем полос в спектре йода. Совокупность таких систем и представляет всю серию, образующую полный спектр йода.

Нередко молекулярные спектры бывают осложнены еще рядом деталей, однако в основном типичные черты полосатых спектров сводятся к перечисленным выше. Таким образом, спектры молекул значительно сложнее спектров атомов, что, конечно, стоит в связи с соответственно более сложной структурой молекул. Удается, однако, установить главные черты теории молекулярных спектров, пользуясь в основном теми же принципами, которые служат для истолкования атомных спектров. Кроме того, спектроскопия молекул оказывает столь же существенную помощь в разъяснении строения молекул, как атомная спектроскопия в вопросах строения атома.

Истолкование молекулярных спектров также возможно в квантовой теории. Необходимо только при расчете энергии стационарного состояния молекулы принимать во внимание бóльшую сложность ее структуры. В основном изменение энергии молекулы происходит, как и в атоме, в результате изменений в *электронной* конфигурации, образующей периферическую часть молекулы. Однако при заданной электронной конфигурации молекулы могут отличаться друг от друга еще и состоянием, в котором находятся их ядра, могущие колебаться и вращаться относительно общего центра тяжести. С этими возможными типами движения также связаны известные запасы энергии, которые должны быть учтены в общем балансе. Как по общим соображениям теории квантов, так и на основании более строгих квантово-механических расчетов эти запасы энергии также необходимо считать дискретными и имеющими квантовый характер.

Обозначим через W_r энергию, обусловленную вращением ядер (ротационная энергия), через W_v — энергию, соответствующую колебаниям ядер (вибрационная энергия), и через W_e — энергию, обусловленную электронной конфигурацией (электронная энергия). Энергия взаимодействия отдельных типов молекулярных движений обычно бывает мала даже по сравнению с W_r. Поэтому мы можем ею пренебречь и с достаточным приближением выразить полную энергию какого-либо стационарного состояния молекулы в виде $W = W_e + W_v + W_r$. Пользуясь вторым постулатом Бора, найдем частоты излучения, испускаемые нашей молекулой, из соотношения

$$h\nu = (W_e - W_e') + (W_v - W_v') + (W_r - W_r'), \qquad (213.1)$$

где штрихами снабжены значения энергии, соответствующие измененному состоянию.

Сравнивая спектр, определяемый формулой (213.1), с наблюдаемым экспериментально, мы убеждаемся в следующем. Отдельные линии полосы соответствуют изменениям $(W_r - W_r')$ при неизменных $(W_v - W_v')$ и $(W_e - W_e')$. Совокупность всех возможных *линий* данной полосы обусловлена различными возможными изменениями ротаци-

[1]) На рис. 38.6 дана упрощенная схема. Нередко отдельные полосы или даже системы полос перекрываются друг с другом, что очень затрудняет расшифровку.

онной энергии молекулы. Если при неизменном $(W_e - W_e')$ меняется также и $(W_v - W_v')$, то мы получим последовательность *полос* a, b, c, т.е. какую-либо из систем (например, A, см. рис. 38.6). Таким образом, каждая из систем полос обусловлена возможностью изменения вибрационной энергии молекулы. Наконец, если к возможным изменениям энергии присоединяются вариации $W_e - W_e'$, т.е. изменения электронной энергии, то мы получим различные *системы* полос A, B, C, т.е. всю группу систем полос.

Соотношение между различными частями полосатого спектра можно представить и несколько иначе. Вообразим, что в нашей молекуле могут изменяться только электронные состояния, а вращения и колебания отсутствуют, т.е. что энергия стационарных состояний молекулы определяется только величиной W_e. Спектр такой молекулы состоял бы, подобно спектру атомов, из *линий*, соответствующих электронным переходам с частотой $\nu = (W_e - W_e')/h$ и расположенных по всему спектру примерно на местах, где наблюдаются в действительности системы полос. Эти линии и намечают распределение всей серии по спектру.

Учтем теперь, что в молекуле возможны различные колебательные состояния; в таком случае каждая из описанных выше линий распадается на систему линий, каждая из которых представляет отдельную полосу реальной системы полос. Наконец, если принять во внимание возможные изменения ротационной энергии, то каждая из только что упомянутых отдельных линий превратится в совокупность линий, представляющих наблюдаемые в действительности полосы. Изложенное толкование наблюдаемых закономерностей позволяет заключить, что $(W_e - W_e')$, т.е. разность энергий двух электронных состояний, гораздо больше, чем $(W_v - W_v')$, а последняя в свою очередь много больше, чем $(W_r - W_r')$, т.е.

$$(W_e - W_e') \gg (W_v - W_v') \gg (W_r - W_r'), \qquad (213.2)$$

ибо разница в частоте между отдельными линиями полосы очень мала по сравнению с разностью частот, определяющих положение отдельной полосы в системе, а эта последняя гораздо меньше разности частот, определяющей положение системы в серии.

Неравенство (213.2) вполне соответствует квантовым свойствам обсуждаемой модели. Действительно, ротационная энергия молекулы связана со сравнительно медленными вращениями тяжелых ядер и не превышает обычно $4 \cdot 10^{-22}$ Дж ($1/\lambda \approx 20$ см$^{-1}$). Колебания ядер, происходящие под действием межатомных сил, связывающих атомы в молекулу, происходят со значительно большей частотой; им соответствует энергия около $200 \cdot 10^{-22}$ Дж ($1/\lambda \approx 1000$ см$^{-1}$). Наконец, для возбуждения электронных переходов требуется энергия того же порядка, как и для аналогичного процесса в атоме, т.е. $5000 \cdot 10^{-22}$ Дж ($1/\lambda \approx 25\,000$ см$^{-1}$).

Сколько-нибудь полная расшифровка полосатых спектров по описанной схеме удается для наиболее простых (главным образом двухатомных) молекул, где при помощи анализа молекулярных спектров удается оценить момент инерции молекулы и, следовательно, взаим-

ное расстояние составляющих ее ядер, собственные периоды колебаний, теплоту диссоциации молекулы на атомы и т.д.

В частности, спектры He_2 и H_2 выделяются из большинства молекулярных спектров благодаря малым моментам инерции испускающих спектры молекул и соответствуют большим частотам вращения ν_r. С этим связаны сравнительно большое расстояние между отдельными линиями полос и относительная бедность спектра линиями, затрудняющие распознавание описанной выше закономерности полосатых спектров и делающие спектры данных молекул нетипичными.

§ 214. Инфракрасные спектры молекул

Наряду с полосатыми спектрами молекул, расположенными в видимой и ультрафиолетовой областях, наблюдаются также и инфракрасные спектры молекул. Опыт показывает, что инфракрасные колебательные спектры газа или пара остаются в большинстве случаев практически неизменными и при исследовании соответствующей жидкости или даже твердого тела. Причину нечувствительности этих спектров к агрегатному состоянию надо, очевидно, искать в том, что силы взаимодействия между атомами (внутримолекулярные силы) значительно больше ван-дер-ваальсовых межмолекулярных сил, обусловливающих переход из газообразного в другие агрегатные состояния. Поэтому колебания атомов внутри молекулы происходят практически одинаково как в изолированных молекулах газа, так и в сближенных молекулах жидкости или твердого тела. Излучение же полосатых спектров в видимой и ультрафиолетовой областях в основном определяется изменением электронной конфигурации молекулы, а эта последняя испытывает в случае жидкости или твердого тела вполне ощутимые воздействия со стороны соседних молекул. Но все же и для инфракрасных спектров некоторые детали, связанные главным образом с вращением молекулы вокруг ее центра тяжести, лучше наблюдаются в газообразном состоянии, ибо свобода вращения молекул в жидкостях и твердых телах в значительной степени стеснена.

Наблюдение инфракрасных линий в спектре испускания, особенно для газообразных тел, затруднено относительной слабостью их. Тем не менее удалось наблюдать линии 218 и 343 мкм в излучении ртутной лампы высокого давления; линии эти, как показали позднейшие исследования, излучаются при вращении молекул ртути. В большинстве случаев, однако, инфракрасные спектры наблюдаются в виде спектров абсорбции или как максимумы избирательного отражения от соответствующего вещества; спектры колебаний хорошо наблюдаются также методом комбинационного рассеяния (см. § 162). В инфракрасных спектрах присутствуют очень низкие частоты, соответствующие линиям в несколько десятков и даже сотен микрометров; вместе с тем имеются и линии гораздо более коротковолновые (до нескольких микрометров). Пример полосы, характеризующей поглощение в парах HCl, приведен на рис. 38.8.

Естественно разделить наблюдаемые инфракрасные спектры на два типа — вращательные и колебательные (точнее, колебательно-вращательные), приписывая их этим двум процессам в молекуле.

Действительно, из рассуждений предыдущего параграфа следует, что главная часть изменения энергии молекулы при переходе из одного стационарного состояния в другое соответствует изменению электронной конфигурации молекулы. Связанное с ним изменение энергии мы обозначили через $(W_e - W_e')$ и видели, что благодаря этому члену в формуле (213.1) частота молекулярного излучения соответствовала видимой или ультрафиолетовой части спектра. Если же электронная конфигурация остается неизменной, т.е. $W_e = W_e'$, то частота излучения будет определяться соотношением

$$h\nu = (W_v - W_v') + (W_r - W_r'), \tag{214.1}$$

т.е. будет соответствовать инфракрасной области спектра. Повторяя рассуждения предыдущего параграфа, мы получим истолкование длинноволнового спектра как чисто ротационного, т.е. соответствующего условию $W_v = W_v'$, означающему, что атомы в молекуле не совершают колебаний, а лишь вращаются около своего центра тяжести. Аналогично, приняв во внимание и колебания и вращения, мы получим объяснение структуры более коротковолновых полос, являющихся вибрационно-ротационными. Теория эта хорошо передает все наблюдаемые особенности инфракрасных спектров и позволяет оценивать различные параметры молекул (например, момент инерции и т.д.), находящиеся в согласии с оценками, выводимыми из наблюдений над полосатыми спектрами видимой области или при помощи других физических методов.

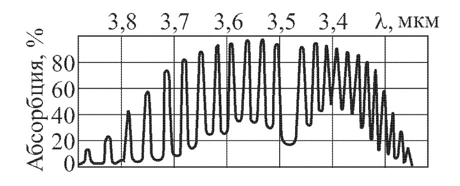


Рис. 38.8. Спектр поглощения паров хлористого водорода в близкой инфракрасной области

Глава XXXIX

ФОТОЛЮМИНЕСЦЕНЦИЯ

§ 215. Флуоресценция молекул

Выше мы уже рассматривали возбуждение атомов действием света. Наблюдающееся при этом резонансное свечение есть простейшая форма фотолюминесценции, имеющая ясное теоретическое истолкование. Подобное явление наблюдается и при освещении молекул, причем в соответствии с большей сложностью системы энергетических уровней молекулы наблюдаемое излучение также имеет очень сложный вид.

Так, Вуд, освещая пары йода, состоящие из молекул I_2, монохроматическим излучением ртутной лампы, обнаружил, что испускается крайне сложный спектр, состоящий из очень большого числа отдельных линий, точнее, пар линий, длины волн которых отличались

приблизительно на 2 Å. Эти пáры представляют правильную совокупность, и расстояния между ними соответствуют разности длин волн в несколько десятков ангстрем. Полученная таким образом структура имеет большое сходство с системой полос, характерных для полосатого спектра, причем каждая полоса представлена двумя линиями. Замечательно, что освещение монохроматическим светом другой длины волны привело к возбуждению сходного сложного спектра, все длины волн которого были несколько изменены. Если же освещение производилось не только монохроматическим излучением, а более широким участком спектра (в несколько десятых ангстрема), то спектр испускания становился гораздо сложнее.

Вся сложная совокупность наблюдаемых фактов получила крайне ясное истолкование, когда она была рассмотрена в рамках теории полосатого спектра.

Молекула йода характеризуется системой энергетических уровней, в соответствии с изложенным в § 212. Часть этих уровней схематически изображена на рис. 39.1.

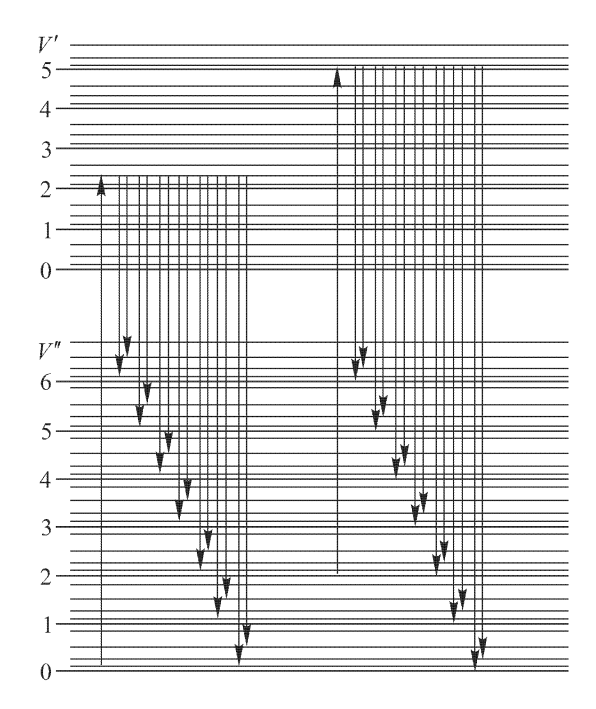


Рис. 39.1. Схема энергетических уровней молекулы, поясняющая образование сложного спектра испускания при монохроматическом возбуждении

Нижняя группа соответствует первому электронному состоянию молекулы и состоит из ряда уровней, отмеченных цифрами $V'' = 0, 1, 2, \ldots$, соответствующих разным колебательным состояниям мо-

лекулы; около каждого из таких уровней нанесено несколько уровней, соответствующих различным состояниям вращения. Верхняя группа уровней относится к молекуле с измененной электронной конфигурацией.

Число отдельных уровней настолько велико, что возможны весьма разнообразные переходы с одного из уровней нижней группы на один из уровней верхней. Это означает, что молекула йода может поглощать различные световые кванты, т.е. монохроматический свет различной частоты; другими словами, спектр абсорбции такой молекулы состоит из очень большого числа линий.

Два таких случая абсорбции изображены на рис. 39.1 в виде стрелок, идущих снизу вверх. Длина стрелок выражает величину энергии поглощенного кванта $h\nu$. Возбужденная таким образом молекула может возвращаться в одно из нижних состояний, излучая соответствующие кванты, как показано на чертеже стрелками, идущими сверху вниз. В каждой молекуле происходит один из изображенных переходов; все облако освещенных паров дает совокупность этих переходов, т.е. излучение целой системы линий. Каждая пара близких линий соответствует переходу на какие-либо два вращательных состояния. Отдельные пары соответствуют переходам в разные колебательные состояния. То обстоятельство, что каждая полоса представлена только двумя вращательными линиями, т.е. что происходят не все мыслимые переходы, находит свое объяснение в так называемых *правилах отбора*, вытекающих из квантовых законов и имеющих место всегда при излучении сложных атомов и молекул.

Таким образом, прихотливый на первый взгляд спектр излучения молекулы, возбужденной монохроматическим светом, получает ясное истолкование и может быть использован для составления схемы молекулярных уровней. В настоящее время флуоресценция молекул изучена для многих двухатомных молекул и приведена в соответствие с общей теорией молекулярных спектров. Исследование спектров флуоресценции многоатомных молекул позволяет разобраться в строении последних, но эти спектры отличаются гораздо большей сложностью и, следовательно, их значительно труднее интерпретировать.

§ 216. Фотолюминесценция жидкостей и твердых тел. Спектральный состав люминесценции. Правило Стокса

Явление флуоресценции паров, рассмотренное выше, начали изучать лишь в начале XX века. Оно получило свое истолкование после создания теории Бора. Явления фотолюминесценции жидкостей и твердых тел, гораздо более яркие и легко наблюдаемые, известны более трехсот лет. Однако вследствие значительно большей сложности взаимодействия между молекулами в случае жидких и твердых веществ полной теоретической ясности в истолковании явлений люминесценции конденсированных систем мы не имеем и в настоящее время, несмотря на ряд полученных важных результатов, достигнутых, в частности, и благодаря работам советских физиков.

Наблюдение фотолюминесценции можно осуществить разнообразными способами. Для многих веществ (растворы красок, например,

флуоресцеина) своеобразное свечение заметно уже на рассеянном дневном свету или в пучке солнечных лучей. Для других, менее ярко светящихся тел удобнее расположение, изображенное на рис. 39.2. Свет от источника, например электрической дуги, концентрируется линзой на исследуемом веществе, например колбе с раствором краски, хинина, керосина и т.д. Глаз сбоку видит на темном фоне след пучка света не в виде белой полоски, но в виде пучка той или иной окраски в зависимости от исследуемого вещества: зеленой для флуоресцеина, оранжевой для родамина, синеватой для хинина и т.д.

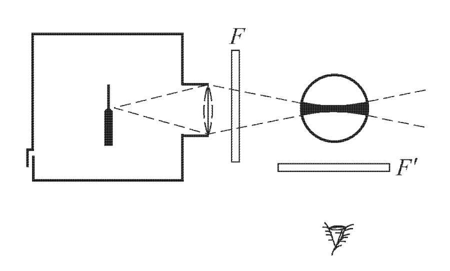


Рис. 39.2. Схема наблюдения флуоресценции жидкостей: F и F' — дополнительные (скрещенные) светофильтры

Цвет возникающего свечения является характерным признаком люминесценции; он отличен от цвета возбуждающего света, благодаря чему облегчается наблюдение люминесценции. При этом обычно соблюдается правило, установленное Стоксом (1852 г.), согласно которому свет люминесценции характеризуется *большей длиной волны*, чем поглощенный телом свет, вызывающий люминесценцию. Обычно расположение спектральных полос люминесценции и абсорбции соответствует изображенному на рис. 39.3, где видно, что полосы эти частично перекрываются. Таким образом, правило Стокса означает, что максимум полосы поглощения смещен в сторону коротких волн относительно максимума полосы люминесценции.



Рис. 39.3. Схема, поясняющая правило Стокса

Пользуясь правилом Стокса, можно улучшить условия наблюдения люминесценции, поместив на пути возбуждающих лучей светофильтр F, поглощающий лучи, соответствующие длинам волн люминесценции, но пропускающий свет, абсорбируемый изучаемым веществом. Наоборот, между изучаемым объектом и глазом помещается фильтр F', дополнительный к первому, т.е. поглощающий излучение полосы A, но пропускающий область L. Таким образом глаз будет защищен от случайно рассеянного света, и вместе с тем люминесценция будет возбуждена и достигнет наблюдателя без значительного ослабления. Этот метод — метод скрещенных фильтров — оказывает значительные услуги при исследовании слабо люминесцирующих веществ.

Так как полосы абсорбции и люминесценции частично перекрываются, то часть света люминесценции, выходя из глубины освещенного вещества и проходя через все слои достаточной толщины, будет в большей или меньшей степени поглощаться. Вследствие этого может произойти искажение вида полосы люминесценции; необходимо вве-

дение соответствующих поправок, особенно в случае значительных концентраций люминесцирующего вещества.

Для некоторых классов органических молекул правило Стокса может быть заменено, как установил В.Л. Левшин, количественным соотношением, получившим название *правила зеркальной симметрии* спектров поглощения и люминесценции. Согласно наблюдениям Левшина, кривые поглощения и люминесценции для этого типа веществ, представленные в функции частот, при рациональном выборе ординат оказываются зеркально симметричными относительно прямой, проходящей перпендикулярно к оси частот через точку пересечения кривых, изображающих оба спектра. Хотя правило зеркальной симметрии соблюдается не во всех случаях люминесценции, однако для обширного класса сложных молекул оно позволяет делать важные заключения о структуре энергетических уровней молекулы.

Из общих соображений ясно, что свет, способный вызвать люминесценцию некоторого вещества, должен поглощаться этим веществом, т.е. длина волны возбуждающего света должна лежать внутри полосы абсорбции. Так как последняя довольно широка, что почти всегда наблюдается для жидкостей и твердых тел, то в пределах полосы абсорбции можно довольно значительно варьировать длину волны возбуждающего света. Исследования такого рода показали, что спектр люминесценции не меняется при изменении длины волны возбуждающего света, пока эта последняя лежит в пределах данной полосы поглощения (рис. 39.4).

Если вещество имеет несколько полос поглощения, то возбуждение светом, относящимся к разным полосам поглощения, может вызвать изменение спектра люминесценции, хотя нередко последний сохраняется и в данном случае. Эти важные наблюдения показывают, что спектр люминесценции характеризует исследуемое вещество. Длина

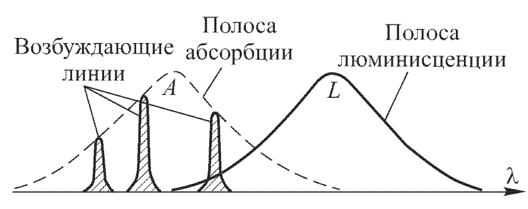


Рис. 39.4. При возбуждении светом любой частоты, лежащей в пределах одной полосы поглощения, спектр люминесценции остается неизменным

волны возбуждающего света имеет второстепенное значение, и лишь переход от одной полосы поглощения к другой может играть роль, меняя характер возбуждения молекулы, подобно тому как было обнаружено при возбуждении паров йода.

При возбуждении отдельными монохроматическими излучениями можно особенно отчетливо наблюдать случаи отступления от правила Стокса. На рис. 39.5 изображен такой случай. Заштрихованная область, соответствующая нарушению правила Стокса, называется *антистоксовой*. Иногда эта область видна довольно хорошо.

Правило Стокса получило общее теоретическое истолкование при помощи представления о фотонах. Истолкование это сводится к предположению, что каждый испущенный при люминесценции фотон ($h\nu$) получается за счет какого-нибудь одного поглощенного фотона ($h\nu_0$). Как правило, при каждом таком процессе часть энергии (A) поглощенного фотона растрачивается на какие-то внутримолекулярные процессы, так что, согласно закону сохранения энергии, имеем

$$h\nu = h\nu_0 - A.$$

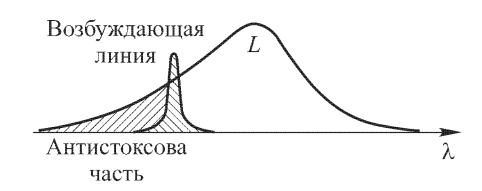


Рис. 39.5. Нарушение правила Стокса

Величина A положительна, что обусловливает стоксово смещение. Случай нарушения правила Стокса следует объяснять добавлением к энергии возбуждающего фотона тепловой энергии люминесцирующего вещества. Действительно, с повышением температуры антистоксова область обычно выступает яснее.

Эти общие соображения, конечно, далеко не исчерпывают вопроса о механизме возбуждения люминесценции. Не вся поглощенная энергия излучается в виде энергии люминесценции. Энергетическим выходом или коэффициентом полезного действия люминесценции принято называть отношение η излучаемой энергии к энергии, поглощаемой люминесцирующим веществом. С.И. Вавилов, который впервые произвел определение выхода, нашел, что величина η чрезвычайно сильно зависит от изучаемого вещества и от условий опытов. Имеются случаи, когда η достигает почти 100 % и, наоборот, нередко величина η очень мала. Эта величина не только меняется от одного вещества к другому, но и для данного вещества сильно зависит от внешних условий: температуры, растворителя, концентраций, посторонних примесей и т.д.

Явление ослабевания люминесценции вследствие введения посторонних веществ носит название *тушения* люминесценции. Механизм этого процесса ясен для случая резонансной флуоресценции газов. Атом находится в возбужденном состоянии в среднем 10^{-8}–10^{-9} с. За это время может произойти столкновение возбужденного атома с каким-либо атомом или молекулой примеси. При этом может оказаться, что энергия возбужденного атома передается частице, которая с ним столкнулась, и расходуется на какие-либо процессы, происходящие в данной частице, или переходит в тепло (столкновения второго рода). Таким образом, часть возбужденных атомов лишается возможности участвовать в излучении, и следовательно, происходит ослабление (тушение) первоначально наблюдаемой люминесценции. Взамен нее может произойти химическая реакция с молекулой, которая сама не поглощает света, но заимствует его от возбужденного атома (сенсибилизированная фотохимическая реакция, см. § 190). Поглощенная энергия, переданная при столкновении второй частице, может пойти на возбуждение последней и вызвать ее люминесценцию (сенсибилизированная люминесценция).

В случае люминесценции жидких (и твердых) веществ также наблюдается тушение; например, интенсивность люминесценции многих растворов сильно уменьшается при добавлении йодистого калия. По-видимому, и в этих случаях присутствие тушителя вызывает переход энергии возбуждения люминесцирующей молекулы к молекулам тушителя. В конечном счете энергия, отнятая у возбужденных молекул, обычно распределяется среди всего вещества, слегка нагревая его. Сходное явление тушения наблюдается и при повышении концентрации люминесцирующего вещества (так называемое *концентрационное тушение*). Опыт показывает, что значительное повышение концентрации вещества обычно сильно понижает выход флуоресценции, и при очень больших концентрациях он становится незначительным. В качестве примера приведем рис. 39.6, который показывает падение выхода флуоресценции водного раствора флуоресцеина с повышением его концентрации.

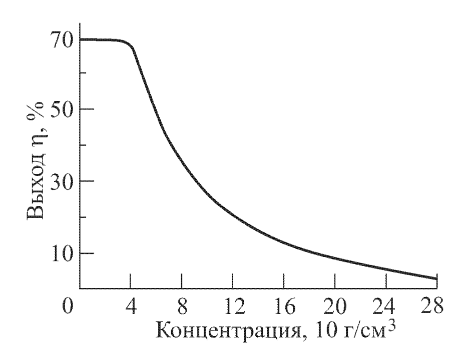


Рис. 39.6. Зависимость выхода люминесценции от концентрации для флуоресцеина (по данным С.И. Вавилова)

Не исключено, что присутствие тех или иных тушащих агентов и обусловливает пониженный выход флуоресценции, наблюдаемый во многих случаях. Наоборот, сильное увеличение яркости флуоресценции, обнаруженное, например, при добавлении щелочи к водным растворам флуоресцеина, связано, по-видимому, с уменьшением концентрации водородных ионов, вызывающих заметное тушащее действие.

Механизм концентрационного тушения, равно как и тушения посторонними примесями в жидкостях, т.е. процесс перехода энергии возбуждения в тепло, можно выяснить только на основе детальных сведений о строении молекулы и среды. Таких детальных сведений в нашем распоряжении еще нет. Но общие законы явления тушения, как экспериментальные, так и теоретические, позволяющие связать это явление с другими особенностями люминесценции (например, с длительностью и характером поляризации), выяснены с достаточной полнотой благодаря работам С.И. Вавилова и его сотрудников.

Окружающая среда влияет не только на интенсивность, но и на спектральный состав люминесценции. Например, замена одного растворителя другим может переместить полосу флуоресценции на несколько сотен ангстрем. Причина лежит, по-видимому, чаще всего в том, что при этом меняется степень диссоциации растворенного вещества, а флуоресценции молекулы и иона часто сильно разнятся между собой. Например, молекула акридина флуоресцирует лиловым светом, а ее ион — сине-зеленым. В соответствии с этим акридин в органических растворителях или в щелочной среде светится фиолетовым светом, а в водном растворе или кислой среде — сине-зеленым.

Указанные обстоятельства часто затрудняют применение метода люминесценции для целей количественного анализа. Однако нередко это удается обойти путем тщательного предварительного исследования.

§ 217. Длительность фотолюминесценции

Для многих веществ (главным образом жидкостей и газов) затухание идет настолько быстро, что свечение практически прекращается одновременно с прекращением освещения. Такой тип люминесценции обычно носит название *флуоресценции*. Наблюдение флуоресценции требует, следовательно, непрерывного освещения. В других случаях (твердые тела) послесвечение происходит в течение большего или меньшего промежутка времени. Этот вид люминесценции нередко называют *фосфоресценцией*. Разделение двух процессов по признаку длительности послесвечения довольно искусственно, ибо улучшение способов наблюдения позволяет установить бóльшую или меньшую длительность всех видов люминесценции.

Для установления наличия послесвечения и определения его длительности употребляют различные приемы. Простейший прибор, предназначенный для этой цели и носящий название фосфороскопа Беккереля, устроен следующим образом. Исследуемое вещество помещается между двумя дисками, которые можно привести в быстрое вращение. Диски снабжены одинаковым числом секторообразных вырезов и насажены на общую ось так, что вырезы одного диска приходятся против сплошных мест другого (рис. 39.7). Источник, посылающий свет на объект, расположен по одну сторону дисков, с другой помещается наблюдатель. Благодаря тому, что отверстия дисков не

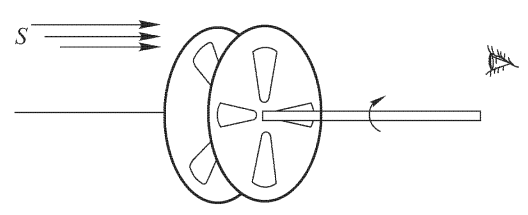


Рис. 39.7. Схема простого фосфороскопа, обеспечивающего измерение длительности послесвечения до 10^{-4} с

совпадают, освещение и наблюдение объекта происходят раздельно во времени, причем можно регулировать промежуток времени между этими двумя процессами, изменяя быстроту вращения дисков и угол между отверстиями. Зная быстроту вращения дисков, при которой становится заметен свет фосфоресценции, и угол, на который смещены друг относительно друга отверстия в переднем и заднем дисках, можно определить продолжительность послесвечения. С помощью фосфороскопа Беккереля удается измерять продолжительность последействий, длящихся до 10^{-4} с.

В фосфороскопе иного типа объект помещается на прозрачный быстро вращающийся диск. При вращении диска наблюдатель ви-

дит фосфоресцирующую полосу, постепенно ослабляющуюся к концу (рис. 39.8). Зная скорость вращения, можно по длине полосы судить о времени послесвечения фосфоресценции. Этот фосфороскоп позволяет измерять времена затягивания до 10^{-5}–10^{-6} с.

Еще более короткие последействия (до 10^{-9} с) можно измерять с помощью флуорометра Гавиола (рис. 39.9). Метод основан на применении эффекта Керра, который для времени 10^{-8}–10^{-9} с практически безынерционен. Две установки Керра $N_1Z_1N_2$ и $N_3Z_2N_4$ управляются переменным напряжением высокой частоты (10^6–10^7 Гц) и,

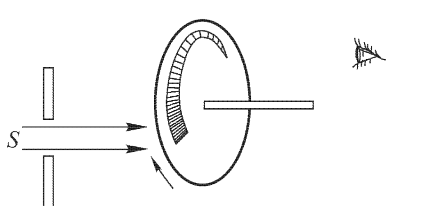


Рис. 39.8. Схема фосфороскопа, обеспечивающего измерения длительности возбужденного состояния до 10^{-5}–10^{-6} с

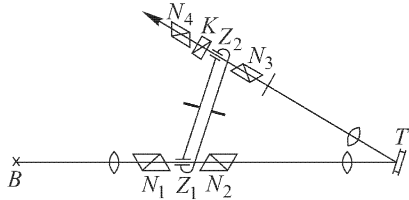


Рис. 39.9. Схема фосфороскопа с применением высокочастотной модуляции света, обеспечивающего измерения длительности возбужденного состояния до 10^{-8}–10^{-9} с

таким образом, являются оптическими затворами, открывающими и закрывающими доступ свету большое число раз в секунду. Действие их до известной степени подобно двум дискам фосфороскопа Беккереля: свет от источника B, прошедший в какой-то момент через $N_1Z_1N_2$, доходит до флуоресцирующего вещества T и вызывает люминесценцию. В зависимости от длительности запаздывания процесса люминесценции этот вторичный свет дойдет до Z_2 в более или менее поздний момент. Так как пропускаемость установки $N_3Z_2N_4$ быстро меняется со временем, то интенсивность вышедшего из Z_2 света будет зависеть от момента прихода вспышки к Z_2, и следовательно, по ее интенсивности можно судить о времени послесвечения.

В данной установке измеряют не интенсивность света, прошедшего через Z_2, а разность фаз, возникающую между двумя компонентами света в конденсаторе Керра. Эта величина, собственно говоря, и определяет интенсивность пропускаемого света; измерение же разности фаз может быть выполнено с бо́льшим удобством (при помощи компенсатора K), чем оценка интенсивности пропущенного света. Измеренное таким образом запаздывание t складывается из двух величин: τ_0 — времени прохождения светом пути Z_1TZ_2 и τ — времени запаздывания процесса вторичного свечения. Если заменить сосуд с флуоресцирующим веществом зеркалом, от которого отражение происходит практически мгновенно, то мы найдем непосредственно τ_0 и получим возможность ввести соответствующую поправку и определить время запаздывания свечения τ.

До известной степени аналогичен флуорометру Гавиола флуорометр Физического института Академии наук, построенный Л.А. Тумерманом и М.Д. Галаниным, в котором модуляция светового пучка производится с помощью дифракции на ультраакустических волнах. Этот метод имеет преимущество перед методом Керра ввиду своей большой светосилы. В настоящее время строятся и другие еще более быстро работающие флуорометры, также использующие возможность измерять малые запаздывания по фазе.

Как уже указывалось в § 210, определяемое значение τ может служить как для характеристики времени *запаздывания* свечения (средняя длительность возбужденного состояния), так и для характеристики *затягивания* свечения (продолжительность процесса испускания), в зависимости от того, с какой точки зрения рассматривается процесс излучения. В настоящее время мы не имеем оснований сомневаться в правильности квантовой трактовки, и следовательно, естественно рассматривать τ как среднюю длительность возбужденного состояния. Однако нередко оказывается удобным сохранять классическое описание процесса излучения, в котором, как указано, τ имеет иной смысл.

При помощи описанного метода было определено τ для излучения изолированных атомов (резонансная флуоресценция атомов Na, $\tau = 1{,}5 \cdot 10^{-8}$ с), излучения изолированных молекул (молекулярная флуоресценция паров йода, $\tau = 1 \cdot 10^{-8}$ с) и люминесценции жидких и твердых тел. Для разнообразных веществ последнего типа было обнаружено, что τ имеет порядок 10^{-9} с, меняясь при переходе от одного вещества к другому и даже при изменении растворителя. Так, для водных растворов эозина $\tau = 1{,}9 \cdot 10^{-9}$ с, а для растворов этой краски в метиловом спирте $\tau = 3{,}4 \cdot 10^{-9}$ с. Погрешность измерений составляет около $0,5 \cdot 10^{-9}$ с и в современных флуорометрах может быть еще уменьшена. Для твердых люминесцирующих тел, например урановых стекол, τ значительно больше (около 10^{-4} с). Для многих других случаев люминесценции твердых тел средняя длительность возбужденного состояния настолько велика, что для ее измерения применяются более грубые фосфороскопы, описанные вначале настоящего параграфа. Известны специальные виды фосфо́ров (кристаллофосфо́ры), свечение которых длится несколько часов и даже дней.

Несомненно, что длительная и кратковременная люминесценция обусловлена физическими процессами разного типа. Два типа люминесценции — флуоресценция и фосфоресценция — различались первоначально именно по этому признаку, и притом под флуоресценцией понималось свечение, прекращающееся мгновенно вместе с прекращением освещения. Данные, относящиеся к длительности возбужденного состояния, показывают, что такое деление имеет условный характер, ибо различие в длительности возбужденных состояний весьма велико: мы с несомненностью относим в разряд флуоресценции, например, процессы, для которых τ может отличаться в десятки раз (например резонансная флуоресценция атомов ртути и натрия).

Тем не менее, по-видимому, возможно разделение процессов фотолюминесценции на два типа. Один — в котором процессы возбужде-

ния разыгрываются целиком внутри атома или молекулы, так что переход в возбужденное состояние не сопровождается отделением электрона от возбужденного атома или молекулы. Люминесценция такого типа соответствует возвращению молекулы (атома) в первоначальное состояние; она определяется в основном свойствами этой молекулы (атома) и сравнительно мало зависит от внешних условий (температуры, окружающих молекул и т.д.). Сюда относится в первую очередь люминесценция газов и жидкостей. Другой тип наиболее ясно представлен люминесцирующими кристаллами или кристаллическими порошками. При возбуждении таких веществ электрон нередко совершенно удаляется от своего положения в кристаллической решетке, благодаря чему повышается электропроводность кристаллов и возникает фосфоресценция, сопровождающая возвращение на старое место отделившегося электрона или какого-либо другого.

Так как подвижность электрона в кристалле мала, то длительность таких возбужденных состояний может быть весьма значительна. Фосфоресценция этого типа характеризуется обычно очень значительным затягиванием, наблюдение которого легко осуществить без всякого фосфороскопа. Повышение температуры нередко значительно сокращает это время, что можно объяснить повышением подвижности электронов. Указанные чистые типы люминесценции представляют крайние случаи, между которыми возможны различные переходы. В частности, наблюдалось, что при повышении вязкости среды (например, путем прибавления к раствору желатина) можно удлинить процессы высвечивания, как бы переводя кратковременное свечение в длительное. Однако здесь нет места такому непрерывному переходу, и при повышении вязкости наряду с кратковременной люминесценцией развивается и вторая, более длительная.

§ 218. Определение люминесценции и критерий длительности

Несмотря на чрезвычайное разнообразие в значениях времени τ, показывающего длительность люминесценции (от $\tau \approx 10^{-9}$ с до $\tau \approx \approx 10^{6}$ с), для всех процессов люминесценции характерно, что оно *значительно превосходит* период собственного колебания светящейся молекулы ($T = 10^{-14}$–10^{-15} с). На это обратил особое внимание С.И. Вавилов, показавший, что данный критерий длительности является единственным характерным критерием, позволяющим отделить люминесценцию от всех других видов свечения.

В § 194 мы определили тепловое или температурное излучение как равновесное излучение, подчиняющееся закону Кирхгофа. Этим мы противопоставили тепловое излучение другим, неравновесным видам свечения. Однако к числу таких неравновесных свечений, интенсивность которых может превышать при данной температуре тепловое излучение, принадлежат еще разнообразные типы свечения. Сюда относится, конечно, и люминесценция, однако и рассеянный свет и свет отраженный точно так же отличаются от теплового излучения. Все эти виды свечения, кроме люминесценции, можно охарактеризовать

как вынужденные световые колебания, длящиеся лишь постольку, поскольку есть вынуждающее свечение, и исчезающие практически за время, соизмеримое с периодом вынуждающих световых колебаний, т.е. примерно за время $\tau \approx 10^{-14}$ с. Для люминесценции же в собственном смысле слова характерна несравненно бо́льшая длительность послесвечения. В соответствии с этим С.И. Вавилов предложил *определять люминесценцию как свечение, представляющее избыток над температурным излучением при условии, что такое избыточное излучение обладает длительностью, значительно превышающей период световых колебаний.*

Данное определение однозначно отличает люминесценцию от всех других видов свечения и дает возможность надежного экспериментального установления люминесцентного характера свечения. Для этой цели не требуется производить сложные определения времени свечения. Достаточно убедиться, что оно не слишком мало. А для этого можно провести опыты по тушению предполагаемой люминесценции подходящим тушителем. Для тушения необходимо, чтобы длительность возбужденного состояния была заведомо больше среднего времени между соударениями с молекулами тушителя. Время это при не слишком малых концентрациях возбужденных молекул и тушащего вещества не меньше 10^{-11}–10^{-12} с. Поэтому нелюминесцентные, т.е. чрезвычайно быстро прекращающиеся ($\tau < 10^{-14}$ с) виды свечения не успевают испытать тушение.

Этот критерий в руках самого Вавилова позволил ему в нескольких важных случаях решить вопрос о люминесцентном или нелюминесцентном характере свечения.

§ 219. Излучение Вавилова–Черенкова

Особенно важное значение имеет случай специального свечения, наблюдаемого под действием радиоактивных излучений (β- и γ-лучи). Как показал П.А. Черенков (1934 г.), работавший под руководством С.И. Вавилова, свечение такого рода возникает у весьма разнообразных веществ, в том числе и у чистых жидкостей. Обнаружив, что это свечение не испытывает тушения, Вавилов пришел к мысли, что оно не является люминесценцией, как считалось ранее, и связал его происхождение с движением электронов через вещество. Полное разъяснение явления было дано в теоретическом исследовании И.Е. Тамма и И.М. Франка (1937 г.), которые показали, что свечение должно иметь место, если скорость электрона превосходит фазовую скорость света в данном веществе.

Пусть электрон движется равномерно со скоростью v вдоль линии OL (рис. 39.10) сквозь какое-нибудь вещество, например воду.

При движении электрона сквозь вещество имеется, конечно, взаимодействие электрона с атомами вещества, в результате которого часть энергии электрона может передаваться атомам, вызывая их ионизацию или возбуждение. Однако в данном вопросе нас интересуют не эти виды потерь энергии электроном. Как показывает детальное рассмотрение электрического поля, создаваемого движущимся элек-

троном, могут иметь место и иные формы растраты энергии электроном. Наиболее ясно это выступает, если рассмотреть случай, который был указан Л.И. Мандельштамом. Пусть электрон со значительной скоростью движется по оси пустотелого канала, проделанного в веществе, так что он не испытывает непосредственных столкновений с атомами вещества. Оказывается, однако, что если диаметр канала значительно меньше длины волны света, то все же электрон теряет энергию в виде световой радиации сквозь поверхность, охватывающую ось цилиндрического канала. При этом мы можем для простоты считать среду вполне прозрачной, так что поток радиации беспрепятственно проходит через нее. Излучаемая энергия, конечно, заимствуется из энергии движущегося электрона, скорость которого должна уменьшаться вследствие торможения электрона в его собственном поле. Именно это излучение и представляет собой в чистом виде излучение Вавилова–Черенкова.

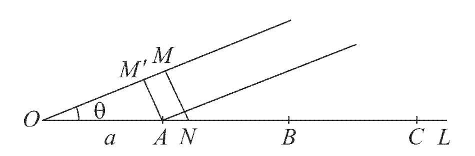


Рис. 39.10. К теории излучения Вавилова–Черенкова: $OA = AB = BC = \ldots \ldots = a = v\tau$, $M'A$ — положение фронта волны, излученной из O, к моменту τ, когда электрон достигает положения A

Расчет показывает, что рассматриваемое излучение и связанное с ним торможение возникают только в том случае, когда скорость электрона v больше фазовой скорости света в среде c, и прекращаются, когда скорость электрона уменьшается до этой скорости (т.е. $v = c$). Рассчитав электрическое и магнитное поля движущегося со «сверхсветовой» скоростью электрона и образовав вектор Пойнтинга, можно вычислить поток радиации, излучаемой электроном. При этом обнаруживается своеобразное распределение излучения в пространстве в виде узкого конического слоя, образующая которого составляет с осью движения угол θ, так что $\cos\theta = c/v$, где $c = c_0/n$ — фазовая скорость света; излучение оказывается поляризованным так, что его электрический вектор лежит в плоскости, проходящей через направление движения электрона. Все эти выводы теории оказались в хорошем соответствии, не только качественном, но и количественном, с результатами наблюдения свечения Вавилова–Черенкова.

Наиболее своеобразную особенность рассматриваемого излучения — его угловое распределение и необходимость соблюдения условия $v > c_0/n = c$ можно получить из довольно общих соображений. Представим себе электрон, движущийся со скоростью v вдоль линии OL (см. рис. 39.10), служащей осью узкого пустотного канала в однородном прозрачном веществе с показателем преломления n. Каждая точка линии OL, последовательно занимаемая движущимся электроном, является центром испускания света, но с запозданием, определяемым величиной $\tau = a/v$, где a — расстояние между двумя рассматриваемыми положениями электрона. Для того чтобы все волны, исходящие из этих последовательных положений, усиливались в результате взаимной интерференции, необходимо, чтобы разность фаз между ними была равна нулю при любом значении a. Из рис. 39.10

нетрудно увидеть, что это будет иметь место для направления, составляющего угол θ с направлением движения электрона, причем θ определяется из условия

$$\frac{a\cos\theta}{c} - \frac{a}{v} = 0,$$

откуда

$$\cos\theta = \frac{c}{v}\,.$$

Действительно, фронт волны, исходящей из O, достигает положения AM', где A — новое положение электрона, через время $OM'/c = a\cos\theta/c$; электрон же достигнет точки A через промежуток времени $\tau = a/v$. Если указанные промежутки времени совпадают, $a\cos\theta/c = a/v$, то волна из O и волна из A окажутся в одной фазе, каково бы ни было a.

Итак, мы видим, что направление максимальной интенсивности определится углом θ образующей конуса с его осью OL, удовлетворяющим условию $\cos\theta = c/v$. Если $v < c$, т.е. скорость электрона ниже фазовой скорости света, то соответствующее направление θ невозможно. Наоборот, при $v > c$ угол θ имеет вполне определенное значение, зависящее от скорости электрона (v) и показателя преломления среды (n) в согласии с полной теорией и опытными данными.

Легко видеть также, что если условие $\cos\theta = c/v$ не соблюдается, то мы можем всегда разбить траекторию OL на такие отрезки a, чтобы разность хода между волнами, исходящими из соответствующих двух соседних отрезков (т.е. из точек, разделенных расстоянием a), была равна $\pm\lambda/2$. Иными словами, должно выполняться условие

$$c\,\frac{a\cos\theta}{c} - c\,\frac{a}{v} = \pm\frac{\lambda}{2}\,,$$

откуда

$$a = \pm\frac{\lambda v}{2(v\cos\theta - c)}\,.$$

При соблюдении этого условия свет, исходящий из соответствующих точек соседних участков, будет гаситься вследствие интерференции, и по данному направлению излучение распространяться не будет.

Таким образом, единственное направление, по которому в силу взаимной интерференции волн может распространяться излучение, есть направление, определяемое условием $\cos\theta = c/v$, имеющим смысл только в случае движения со сверхсветовой скоростью ($v > c$). Конечно, в реальном опыте световой конус не будет бесконечно тонким, ибо поток летящих электронов имеет конечную апертуру и известный разброс скоростей v, равно как и показатель преломления n имеет несколько различные значения для разных длин волн видимого интервала. Все это дает более или менее узкий конический слой около направления, определяемого условием $\cos\theta = c/v$.

Эффекты, сходные с излучением Вавилова–Черенкова, хорошо известны в области волновых явлений. Если, например, судно движется по поверхности спокойной воды (озера) со скоростью, превышающей скорость распространения волн на поверхности воды, то возникающие

под носом судна волны, отставая от него, образуют плоский конус волн, угол раскрытия которого зависит от соотношения скорости судна и скорости поверхностных волн. При движении снаряда или самолета со сверхзвуковой скоростью возникает звуковое излучение («вой»), законы распространения которого также связаны с образованием так называемого «конуса Маха». Явления эти осложняются нелинейностью аэродинамических уравнений. В 1904 г. Зоммерфельд рассчитал электродинамическое (оптическое) излучение подобного рода, которое должно возникать при движении заряда со скоростью, превышающей скорость света. Однако через несколько месяцев после появления работы Зоммерфельда создание теории относительности сделало бессмысленным рассмотрение движения заряда со скоростью, превышающей скорость света в пустоте, и расчеты Зоммерфельда казались лишенными интереса. Физическая возможность появления свечения Вавилова–Черенкова связана с движением электрона со скоростью, превышающей *фазовую* скорость световой волны в среде, что не стоит ни в каком противоречии с теорией относительности.

Таким образом, излучение Вавилова–Черенкова является совершенно новым и крайне интересным видом свечения, впервые открытым советскими исследователями.

Излучение Вавилова–Черенкова нашло разнообразные применения в экспериментальной ядерной физике и физике элементарных частиц. Несмотря на чрезвычайную слабость свечения, приемники света достаточно чувствительны, чтобы зарегистрировать излучение, порожденное единственной заряженной частицей. Созданы приборы, которые позволяют по излучению Вавилова–Черенкова определять заряд, скорость и направление движения частицы, ее полную энергию. Практически важно применение излучения Вавилова–Черенкова для контроля работы ядерного реактора.

§ 220. Кристаллические фосфóры

Хотя, согласно предыдущему, четкое деление между флуоресцирующими и фосфоресцирующими веществами в настоящее время невозможно, тем не менее существуют вещества, которые вполне целесообразно выделить в класс фосфоресцирующих. К ним принадлежат, в частности, так называемые кристаллические фосфóры, дающие нередко очень интенсивное свечение и имеющие благодаря этому практический интерес. Основой таких фосфоров являются неорганические вещества, не флуоресцирующие в чистом виде. Добавление к ним очень небольших количеств (10^{-2}–10^{-4} %) некоторых примесей, так называемых «активаторов», делает их интенсивно фосфоресцирующими. Такими активаторами в большинстве случаев служат соединения металлов. Так, например, яркий фосфóр, нередко применяющийся для изготовления фосфоресцирующих экранов, представляет собой сернистый цинк, активированный небольшими примесями соединений, содержащих марганец, висмут или медь.

Такие фосфоресцирующие вещества характеризуются длительным послесвечением и, как уже упоминалось, сильной зависимостью

длительности от температуры. Повышение температуры значительно сокращает длительность свечения, причем одновременно очень сильно повышается яркость его. Явление можно наблюдать на следующем простом опыте. Возбудим фосфоресценцию экрана сернистого цинка, осветив его ярким светом электрической дуги. Перенесенный в темноту экран будет светиться в течение ряда минут, постепенно угасая. Если к светящемуся экрану с противоположной стороны прижать нагретое тело, например диск, то нагревшаяся область экрана ярко вспыхнет, отчетливо передавая контуры нагретой области. Однако через короткое время эта область окажется темнее окружающей, ибо более яркое свечение сопровождается более быстрым затуханием (высвечиванием). Измерения показывают, что световая сумма, т.е. интеграл по времени от интенсивности свечения, остается практически постоянной даже при ускорении высвечивания в тысячи раз (так, например, при нагревании до 1300 °C время свечения с нескольких часов сокращается до 0,1 с).

В явлениях фосфоресценции также соблюдается правило Стокса. Очень многие вещества фосфоресцируют видимым светом под действием ультрафиолетовых и рентгеновских лучей. Этим пользуются для удобного исследования невидимой коротковолновой радиации, и фосфоресцирующие экраны имеют очень широкое распространение. Вместе с тем явление фосфоресценции можно использовать для изучения инфракрасной части спектра. Опыт показывает, что фосфоресценция гасится под действием инфракрасного излучения. Спроецируем на фосфоресцирующий экран (предварительно возбужденный) сплошной спектр. Через некоторое время фосфоресценция мест экрана, лежащих под инфракрасной частью спектра, оказывается погашенной, тогда как остальная его поверхность продолжает фосфоресцировать, так что след от инфракрасных лучей будет заметен на экране в виде темных полос. Этим можно воспользоваться для фотографирования в инфракрасной области (до $\lambda = 1{,}7$ мкм) или для получения фотографии предмета, испускающего невидимые инфракрасные лучи.

При действии инфракрасных лучей на фосфоресцирующий экран иногда наблюдается временное усиление фосфоресценции; в последнее время удалось изготовить фосфóры, очень эффективные в этом отношении и имеющие ряд практических применений. Однако действие инфракрасных лучей не сводится к нагреванию. В частности, световая сумма может под действием инфракрасных лучей уменьшаться (тушение).

Коэффициент полезного действия фосфóров, т.е. отношение общего количества отдаваемой в виде света энергии к количеству световой энергии, поглощенной фосфóром при возбуждении, может быть очень велик (иногда он близок к единице). Большое значение коэффициента полезного действия открывает перспективы для использования фосфóров в качестве источников света. Успешные попытки применения фосфóров для улучшения цветности и повышения экономичности газосветных ламп упомянуты в § 203.

§ 221. Люминесцентный анализ

Очень важной особенностью люминесценции является возможность наблюдения свечения при чрезвычайно малых концентрациях вещества. Концентрации порядка 10^{-9} г/см^3 оказываются нередко вполне достаточными; так как для удобного наблюдения можно ограничиться объемом в несколько десятых кубического сантиметра, то достаточно располагать 10^{-10} г флуоресцирующего вещества, чтобы иметь возможность обнаружить его по характерному свечению. Особенно удобно наблюдение при концентрациях 10^{-4}–10^{-7} г/см^3. Эта чрезвычайная чувствительность люминесцентных наблюдений делает возможным применение люминесцентного анализа для решения многих важных практических задач.

В настоящее время люминесцентный анализ применяют довольно часто. Так, при закладке буровых скважин для быстрой разведки пользуются тем, что флуоресценция нефти или содержащихся в ней примесей весьма значительна. Исследуя на флуоресценцию кусочки извлеченной при бурении породы, содержащие следы нефти, получают возможность судить о близости нефтеносных слоев и нередко о качестве нефти.

С помощью люминесцентного анализа отличают друг от друга различные сорта стекол, сортируют шлаки, отделяя устойчивые и пригодные для мощения дорог; оценивают степень пористости каменных пород и строительных материалов, для чего смачивают их флуоресцирующим раствором и наблюдают за картиной распространения флуоресценции. Во многих химических производствах, в органической, технической и биологической химии применяют люминесцентный анализ для распознавания тех или иных компонент в сложных смесях. Известны применения этого анализа в текстильном производстве, где легко обнаруживаются масляные пятна на тканях, невидимые простым глазом; в палеонтологических исследованиях, ибо флуоресцентные снимки отпечатков ископаемых гораздо богаче подробностями, чем обычные снимки; в криминалистической практике люминесцентный анализ позволяет легко установить следы крови, открыть написанное невидимыми чернилами и т.д. Фотолюминесценция и катодолюминесценция многих минералов облегчают геологическую разведку, причем употребляются переносные осветители, позволяющие вести разведку непосредственно в породе. С помощью микроскопа можно наблюдать небольшие флуоресцирующие включения.

Возможно применение люминесцентного анализа и для количественных исследований. Благодаря чрезвычайной чувствительности люминесцентного метода можно ограничиться ничтожными количествами исходного вещества. Подобным методом удалось, например, исследовать содержание озона в воздухе даже на больших высотах, причем пробы воздуха объемом в 10–20 л забирались при пролетах стратостатов на большой высоте, где давление не превышало 15–20 мм рт. ст. Таким образом, в распоряжении исследователя было всего около 0,5 г воздуха. Содержащийся в этом количестве озон был надежно измерен, хотя его содержание было меньше 0,00001 %.

ЛАЗЕРЫ, НЕЛИНЕЙНАЯ ОПТИКА

Глава XL

ОПТИЧЕСКИЕ КВАНТОВЫЕ ГЕНЕРАТОРЫ

Для источников света, традиционных в оптической области спектра, характерна некогерентность излучения, а именно: излучение источника в целом слагается из некогерентных между собой потоков, испускаемых микроскопическими элементами источника, — атомами, молекулами, ионами, свободными электронами. Примерами некогерентного излучения могут служить свечение газового разряда, тепловое излучение искусственных и естественных источников, люминесценция при различных способах ее возбуждения и т.д.

В начале 60-х годов были созданы источники света иного типа, получившие название *оптических квантовых генераторов* или *лазеров*. В противоположность некогерентным источникам, электромагнитные волны, зарождающиеся в различных частях оптического квантового генератора, удаленных друг от друга на макроскопические расстояния, оказываются когерентными между собой. В этом отношении квантовые генераторы вполне аналогичны источникам когерентных радиоволн.

Когерентность излучения проявляется практически во всех свойствах оптических квантовых генераторов. Исключение составляет, разумеется, полная энергия излучения, которая, как и в случае некогерентных источников, прежде всего зависит от подводимой энергии. Замечательной чертой лазеров, тесно связанной с когерентностью их излучения, является способность к концентрации энергии — концентрации во времени, в спектре, в пространстве, по направлениям распространения. Для некоторых квантовых генераторов характерна чрезвычайно высокая степень монохроматичности их излучения. В других лазерах испускаются очень короткие импульсы, продолжительностью 10^{-12} с; поэтому мгновенная мощность такого излучения может быть очень большой. Световой пучок, выходящий из оптического квантового генератора, обладает высокой направленностью, которая во многих случаях определяется дифракционными явлениями. Такое излучение можно, как известно, сфокусировать на ничтожно малой площади и создать, следовательно, огромную освещенность.

В данной главе излагаются основные сведения о физических принципах, лежащих в основе работы оптических квантовых генераторов, и о свойствах излучения последних.

Оптические квантовые генераторы оказали и, несомненно, будут оказывать в дальнейшем значительное влияние на развитие оптики.

Изучение свойств самих лазеров существенно обогатили наши сведения о дифракционных и интерференционных явлениях (см. § 228–230). Распространение мощного излучения, испущенного оптическим квантовым генератором, сопровождается так называемыми нелинейными явлениями. Некоторые из них — вынужденное рассеяние Мандельштама–Бриллюэна, вынужденное рассеяние крыла линии Рэлея и вынужденное температурное рассеяние — описаны в гл. XXIX; выше упоминались также многофотонное поглощение и многофотонная ионизация (см. § 157), зависимость коэффициента поглощения от интенсивности света (см. § 157), нелинейный или многофотонный фотоэффект (см. § 179), многофотонное возбуждение и диссоциация молекул (см. § 189), эффект Керра, обусловленный электрическим полем света (см. § 152); сведения о других будут изложены в § 224 и в гл. XLI. Совокупность нелинейных явлений составляет содержание *нелинейной оптики* и *нелинейной спектроскопии*, которые сформировались в 60-е годы и продолжают быстро развиваться.

Оптические приборы и оптические методы исследования широко применяются в самых разнообразных областях естествознания и техники. Напомним, например, об изучении структуры молекул с помощью их спектров излучения, поглощения и рассеяния света, а также о применении микроскопа в биологии, об использовании спектрального анализа в металлургии и геологии. Оптические квантовые генераторы неизмеримо расширяют возможности оптических методов исследования.

Приведем несколько примеров, иллюстрирующих положение дела. Один из новых методов — голография — подробно описан в гл. XI. Изучение атомно-молекулярных процессов, протекающих в излучающей среде лазеров, а также рассеяния света и фотолюминесценции с применением лазеров позволило получить большой объем сведений в атомной и молекулярной физике, равно как и в физике твердого тела. Оптические квантовые генераторы заметно изменили облик фотохимии; с помощью мощного лазерного излучения могут производиться разделение изотопов и осуществляться направленные химические реакции. Благодаря монохроматичности излучения оптических квантовых генераторов оказывается сравнительно простыми измерения сдвига частоты, возникающего при рассеянии света вследствие эффекта Доплера; этот метод широко используется в аэро- и гидродинамике для излучения поля скоростей в потоках газов и жидкостей. В области индустрии отметим применения лазеров для сварки, обработки и разрезания металлических и диэлектрических материалов и деталей в приборостроении, машиностроении и в текстильной промышленности. Очень интересны и важны применения лазеров в биологии, медицине, геодезии и картографии, в системах локации спутников и во многих других областях. Следует подчеркнуть, что постоянно расширяется сфера применений оптических квантовых генераторов.

Перечисленные примеры наглядно иллюстрируют установившееся мнение о подлинной революции в оптике и оптических методах исследования, произошедшей благодаря изобретению оптических квантовых генераторов.

§ 222. Излучение электромагнитных волн совокупностью когерентных источников

Рассмотрим поле, создаваемое источником света, который представляет собой газ излучающих атомов. Не будем принимать во внимание отражение и преломление на границе и поглощение света при его распространении внутри объема источника. Атом, находящийся в точке, определяемой радиусом-вектором $\mathbf{r}_j(x_j, y_j, z_j)$, посылает в точку наблюдения $\mathbf{r}(x, y, z)$ (рис. 40.1) монохроматическую волну, которую можно записать следующим образом:

$$s_j(\mathbf{r}, t) = \frac{A_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} \cos[\omega t - k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j| + \varphi_j], \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{222.1}$$

Полное поле, создаваемое всеми атомами источника, будет равно сумме волн вида (222.1):

$$s(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=1}^{N} s_j(\mathbf{r}, t), \tag{222.2}$$

где N — число излучающих атомов источника.

Пусть атомы излучают совершенно независимым образом, разности фаз φ_j и $\varphi_{j'}$, относящихся к атомам j и j', принимают вполне произвольные значения, и следовательно, интерференция волн s_j отсутствует. Без дальнейших вычислений ясно, что на больших расстояниях, значительно превосходящих линейные размеры светящегося объема, его излучение будет практически изотропным. Что касается меньших расстояний, сравнимых с размерами источника, то яркость излучения будет, разумеется, неравномерной и неизотропной, и будет зависеть от формы источника, от соотношения его размеров в различных направлениях и т.д. Однако изменения яркости будут сравнительно плавными. Эти заключения и соответствуют свойствам некогерентных источников света (лампы накаливания, газоразрядные источники света и т.д.).

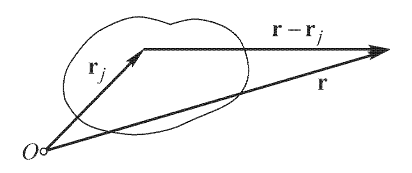


Рис. 40.1. К расчету поля, излучаемого протяженным источником света

Обратимся к противоположному предельному случаю полной когерентности волн, испускаемых различными атомами. Результат интерференции N волн существенно зависит от взаимного расположения излучающих атомов и от того конкретного закона, которому подчинены фазы φ_j. Рассмотрим простой случай, имеющий непосредственное отношение к свойствам оптических квантовых генераторов. Пусть источник имеет форму прямоугольного параллелепипеда (рис. 40.2) с длинами ребер a, b и L, светящиеся атомы заполняют его вполне равномерно, и амплитуды волн (точнее, коэффициенты A_j в выражении (222.1)) одинаковы. Пусть, далее, расстояние между соседними атомами значительно меньше длины волны, и поэтому суммирование по

j в (222.2) можно заменить интегрированием по объему источника. Будем писать поэтому $\mathbf{r}'(x', y', z')$ вместо $\mathbf{r}_j$.

Предположим, наконец, что все атомы, находящиеся в плоскости, перпендикулярной к оси Oz, испускают волны с одинаковыми фазами $\varphi(\mathbf{r}')$; иными словами, $\varphi(\mathbf{r}')$ зависит только от z', а от x' и y' не зависит. При выполнении перечисленных условий поле, создаваемое атомами, расположенными в какой-либо плоскости $z' = \text{const}$, подобно полю в случае дифракции монохроматической волны, падающей параллельно оси Oz на экран с отверстием в виде прямоугольника со сторонами a и b: роль вторичных волн Френеля в дифракционной задаче играют теперь реальные волны, испускаемые атомами, которые расположены в пределах этого «отверстия», — поперечного сечения источника плоскостью $z' = \text{const}$. На рис. 40.2 показано одно из таких сечений.

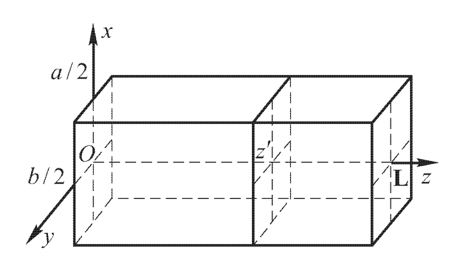


Рис. 40.2. К расчету интерференции волн, испускаемых атомами протяженного источника света

Ради простоты будем рассматривать поле на больших расстояниях от источника, соответствующих дифракционным явлениям Фраунгофера. Используя результаты вычислений, проведенных в § 42, можем написать

$$s(\mathbf{r}, t) = \frac{AN}{rL} \, \frac{\sin w}{w} \, \frac{\sin v}{v} \int\limits_0^L \cos\left[\omega t - kr + kz' + \varphi(z')\right] dz', \qquad (222.3)$$

где $w = \pi a x/\lambda r$, $v = \pi b y/\lambda r$. Множитель перед интегралом в (222.3), умноженный на dz', представляет собой амплитуду суммарной волны, испущенной всеми атомами, расположенными в пределах слоя толщины dz' вблизи плоскости $z = z'$. Интеграл выражает суммирование волн, идущих от всех таких слоев, находящихся в пределах источника. Аргумент косинуса под интегралом содержит начальную фазу $\varphi(z')$ и часть фазы, набегающую за счет разности хода $r - z'$ между точкой наблюдения и слоем вблизи $z = z'$. Зависимость амплитуды волны от углов x/r, y/r определяется обычными дифракционными множителями $w^{-1} \sin w$, $v^{-1} \sin v$, и излучение источника сосредоточено в малом телесном угле, равном примерно λ^2/ab. Ввиду указанной аналогии с дифракционными явлениями Фраунгофера такой результат очевиден. Из этой же аналогии можно заключить также, что если бы фаза $\varphi(\mathbf{r}')$ сохраняла постоянное значение не в плоскости $z' = \text{const}$, а в плоскости, перпендикулярной к какому-либо единичному вектору $\mathbf{n}$, то излучение источника было бы сконцентрировано в соответствующем дифракционном угле вблизи направления $\mathbf{n}$. Таким образом, когерентность волн, испускаемых различными атомами, обусловливает острую направленность излучения источника в целом.

Суммирование волн, приходящих в точку наблюдения от всех поперечных сечений светящегося объема, выражено интегралом по z' в формуле (222.3). Результат этого суммирования определяется соотношением между фазой $\varphi(z')$ и фазой kz', отражающей различие расстояний между точкой наблюдения и положениями разных атомов. Если $\varphi(z')$ не зависит от z', то волны, приходящие в точку наблюдения от слоев источника, отстоящих на расстояние половины длины волны, будут гасить друг друга; в этом случае максимальное значение интеграла в (222.3) оказывается равным λ/π, причем достигается оно, очевидно, тогда, когда на длине источника L укладывается нечетное число полуволн.

Амплитуда поля $s(\mathbf{r}, t)$ приобретает максимальное значение если волны, излучаемые различными сечениями источника, приходят в точку наблюдения с одинаковыми фазами. Другими словами, $\varphi(z')$ и kz' должны быть связаны соотношением

$$\varphi(z') + kz' = \varphi_0, \tag{222.4}$$

где φ_0 — постоянная величина. При выполнении этого равенства интеграл в (222.3) пропорционален всей длине источника L и

$$s(\mathbf{r}, t) = \frac{AN}{r}\,\frac{\sin w}{w}\,\frac{\sin v}{v}\,\cos(\omega t - kr + \varphi_0). \tag{222.5}$$

Таким образом, в данном случае амплитуда поля, излучаемого источником в целом, равна сумме амплитуд волн, исходящих от всех атомов. Условие, выражаемое равенством (222.4), называется *условием пространственной синфазности* [1]).

Итак, если излучение атомов, составляющих макроскопический источник света, когерентно и, кроме того, выполняется условие пространственной синфазности, то излучение источника в целом сосредоточено в малом дифракционном угле и амплитуда вблизи оси пучка в N раз больше амплитуды волны, испускаемой отдельным атомом. Отмеченные особенности характерны для оптических квантовых генераторов, т.е. рассмотренная схема представляет собой модель квантового генератора.

Естественно возникает вопрос, существует ли способ, с помощью которого можно добиться предполагавшейся выше синфазности излучения атомов, находящихся на макроскопических расстояниях друг от друга, и если можно, то в чем этот способ состоит?

Из условия пространственной синфазности (222.4) видно, что фазы φ_j волн s_j должны изменяться в зависимости от положения излучающегося атома по такому же закону, по которому изменяется фаза в световой волне. Это означает, что агентом, фазирующим излучение атомов, должна быть световая же волна. Вместе с тем, в гл. XXXIII указывалось, что для микроскопического описания спектральных свойств теплового излучения А. Эйнштейн ввел представление о вынужденном испускании. Одно из основных свойств вынужденного испускания состоит в том, что волны, излучаемые атомом в

---

[1]) Часто используется также термин «пространственный синхронизм».

этом процессе, имеют такую же частоту и фазу, что и действующая на атом волна. Благодаря указанному свойству, как будет показано в § 223, фазировка излучения удаленных атомов может обеспечиваться вынужденным испусканием.

§ 223. Поглощение и усиление излучения, распространяющегося в среде

Пусть плоская волна частоты ω, соответствующей разности энергий $E_m - E_n$ каких-либо двух состояний атомов (или молекул) среды, распространяется сквозь эту среду. Поток излучения изменяется в соответствии с законом Бугера, причем коэффициент поглощения определяется соотношением (211.20)

$$\alpha_a(\omega) = \frac{1}{4}\,\lambda^2 a_{mn}(\omega) g_m \left(\frac{N_n}{g_n} - \frac{N_m}{g_m}\right), \tag{223.1}$$

где $a_{mn}(\omega)$ — спектральная плотность коэффициента Эйнштейна; g_m, g_n и N_m, N_n — статистические веса и заселенности состояний m, n. Напомним, что члены N_n/g_n и N_m/g_m в (223.1) описывают вклады соответственно переходов $n \to m$ и $m \to n$, которые сопровождаются поглощением и индуцированным испусканием фотонов. Мощность, поглощаемая в единице объема среды, выражается следующим образом:

$$q_a(\omega)\,d\omega = \alpha_a(\omega) I(\omega)\,d\omega = \alpha_a(\omega) c u(\omega)\,d\omega, \tag{223.2}$$

где $u(\omega)$ и $I(\omega)$ — спектральные плотности энергии (в 1 см^3) и потока.

В условиях термодинамического равновесия среды, сквозь которую распространяется излучение, $N_m/g_m < N_n/g_n$, что вытекает из принципа Больцмана, и следовательно, $\alpha_a(\omega) > 0$. Это соответствует поглощению излучения. Однако если тем или иным способом осуществить условия, при которых $N_m/g_m > N_n/g_n$, то коэффициент $\alpha_a(\omega)$ изменит свой знак и станет величиной отрицательной. В этом случае плотность потока энергии, распространяющегося в среде, будет возрастать, а не убывать, как при термодинамическом равновесии. Другими словами, за счет индуцированного излучения в световой пучок будет добавляться больше фотонов, чем он теряет на возбуждение атомов при обратных переходах ($n \to m$).

Соотношение между концентрациями атомов, соответствующее неравенству $N_m/g_m > N_n/g_n$, называют *инверсной заселенностью* энергетических уровней m, n.

В данной главе будет идти речь главным образом о средах с инверсной заселенностью. Поэтому вместо поглощаемой мощности $q_a(\omega)$ и коэффициента поглощения $\alpha_a(\omega)$ целесообразно ввести новые обозначения для *излучаемой мощности* или мощности испускания $q(\omega)$ и *коэффициента усиления* $\alpha(\omega)$, отличающиеся знаком от $q_a(\omega)$ и $\alpha_a(\omega)$:

$$\begin{gathered} q(\omega) = \alpha(\omega) u(\omega) c, \\ \alpha(\omega) = \frac{1}{4}\,\lambda^2 g_m a_{mn}(\omega) \left(\frac{N_m}{g_m} - \frac{N_n}{g_n}\right). \end{gathered} \tag{223.3}$$

Среду с инверсной заселенностью энергетических уровней, обеспечивающую усиление распространяющегося в ней излучения, принято называть *активной средой*.

Инверсную заселенность уровней можно образовать в газовом разряде при помощи некоторых химических реакций, оптического возбуждения и т.д. О нескольких способах создания активной среды будет сказано ниже[1]).

До сих пор речь шла об энергетической стороне вопроса. Как подчеркивалось в § 211, электромагнитные волны, возникающие в результате вынужденных переходов, когерентны с волной, вызывающей эти переходы. В частности, если поле, взаимодействующее с атомами, представляет собой плоскую монохроматическую волну, то и вынужденно испущенные фотоны образуют также плоскую монохроматическую волну с той же частотой, поляризацией, фазой и с тем же направлением распространения. В результате вынужденного испускания (равно как и поглощения) изменяется только амплитуда падающей волны.

Сказанное можно рассматривать как иную форму утверждения, что вынужденное испускание усиливает, а поглощение ослабляет излучение без изменения всех остальных его характеристик. Однако для понимания свойств излучения оптических квантовых генераторов оказывается очень плодотворным микроскопическое описание, основанное на представлении о когерентности падающей волны и «вторичных» волн, испускаемых в результате вынужденных переходов. В частности, из приведенных рассуждений видно, что условие пространственной синфазности, обсуждавшееся в § 222 и необходимое для получения мощного направленного излучения от макроскопического источника, может осуществиться благодаря процессу вынужденного испускания. Действительно, волны, испускаемые атомами, находящимися в различных точках пространства, будут синфазно складываться в точке наблюдения, если разность начальных фаз этих волн компенсирует соответствующую разность хода (см. (222.4)). Но именно таким и будет положение, если вторичные волны s_j, рассмотренные в § 222 (см. рис. 40.2), возникают в результате вынужденного испускания под влиянием внешней световой волны: значения фазы этой волны в z_1, z_2 (точках расположения различных атомов) различаются на величину $k(z_1 - z_2)$, и вторичные волны оказываются сдвинутыми по начальной фазе относительно друг друга на ту же величину, взятую с обратным знаком, что и необходимо для их синфазного сложения в точке наблюдения.

Следует помнить, что помимо когерентного испускания, обсуждавшегося выше и связанного с вынужденными переходами, атомы среды совершают и спонтанные переходы, в результате которых испускаются волны, некогерентные между собой, равно как и с внешним

---

[1]) В 1951 г. В.А. Фабрикантом, М.М. Вудынским и Ф.А. Бутаевой было зарегистрировано авторское свидетельство на способ усиления излучения за счет индуцированного испускания, предложенный В.А. Фабрикантом в 1940 г.

полем. Таким образом, излучение активной среды всегда представляет собой смесь когерентной и некогерентной частей, соотношение между которыми зависит, в частности, от интенсивности внешнего поля. Последнее вполне ясно, так как атомы, принявшие участие в процессе вынужденного испускания, лишились энергии возбуждения, и, следовательно, не могут излучать спонтанно. Более детальный анализ показывает, что под влиянием вынужденных переходов изменяется не только полная интенсивность некогерентного спонтанного излучения, но и его спектральный состав.

§ 224. Эффект насыщения

Согласно соотношению (223.2) выражение для поглощаемой (или излучаемой) мощности $q_a(\omega)$ содержит в качестве множителя произведение $u(\omega)c$, равное потоку излучения. Однако этим не исчерпывается зависимость $q_a(\omega)$ от $u(\omega)$: как уже упоминалось в § 157, опыт указывает на уменьшение коэффициента поглощения по мере возрастания $u(\omega)$. Это явление легко понять, если принять во внимание, что поглощение света сопровождается переходом атома в возбужденное состояние и число атомов, способных поглощать, уменьшается. В свою очередь в результате вынужденного испускания уменьшается число возбужденных атомов. Следовательно, поглощение и вынужденное испускание влияют на разность заселенностей уровней и на коэффициент поглощения.

Описанное явление имеет принципиальное значение для оптических квантовых генераторов, и мы рассмотрим его подробнее. Пусть в среде создана инверсная заселенность уровней m, n. Ради упрощения формул статистические веса состояний m, n будем предполагать одинаковыми ($g_m = g_n$). В противном случае разность $N_m - N_n$ в последующих выражениях следует заменить на $N_m/g_m - N_n/g_n$ (см. (223.3)).

В качестве меры мощности процесса возбуждения, приводящего к инверсной заселенности и пока неконкретизируемого, можно принять величину разности заселенности $N_{m0} - N_{n0}$, которая возникает в отсутствие излучения. Энергия, запасенная в среде и способная перейти в энергию излучения в результате вынужденных переходов, пропорциональна, очевидно, величине $\hbar\omega[N_{m0} - N_{n0}]$. При достаточно больших значениях $u(\omega)$ вся указанная энергия превратится в энергию излучения, и взамен соотношений (223.3) будет выполняться равенство

$$q_{\max}(\omega) = \sigma\hbar\omega(N_{m0} - N_{n0}), \tag{224.1}$$

где σ — коэффициент пропорциональности. Общее выражение для $q(\omega)$, которое переходит в (223.3) и (224.1) для предельных случаев $u(\omega) \to 0$ и $u(\omega) \to \infty$, можно представить в следующем виде (см. упражнение 247):

$$q(\omega) = \hbar\omega(N_{m0} - N_{n0})\frac{b_{mn}(\omega)u(\omega)}{1 + b_{mn}(\omega)u(\omega)/\sigma}\,. \tag{224.2}$$

Коэффициент σ связан с временами жизни атомов на уровнях m, n. Из сравнения (224.2) и (223.3) можно найти зависимость разности заселенностей и коэффициента усиления $\alpha(\omega)$ от $u(\omega)$:

$$N_m - N_n = \frac{N_{m0} - N_{n0}}{1 + b_{mn}(\omega)u(\omega)/\sigma}, \tag{224.3}$$

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{4}\lambda^2 a_{mn}(\omega)\frac{N_{m0} - N_{n0}}{1 + b_{mn}(\omega)u(\omega)/\sigma}. \tag{224.4}$$

На рис. 40.3 изображены графики зависимости величины $(N_m - N_n)/(N_{m0} - N_{n0})$ и $q(\omega)/q_{\max}(\omega)$ от переменной $b_{mn}(\omega)u(\omega)/\sigma$. Формуле (223.3) отвечает кривая *1*, которая по гиперболическому закону приближается к асимптотическому значению, соответствующему формуле (224.1).

Нелинейная зависимость испускаемой мощности $q(\omega)$ от плотности излучения $u(\omega)$ получила название *эффекта насыщения*. Этот же термин применяется и к явлению уменьшения разности заселенностей под влиянием вынужденного излучения и поглощения.

Рис. 40.3. Графики зависимости $\dfrac{N_m - N_n}{N_{m0} - N_{n0}}$ (кривая *2*) и $\dfrac{q(\omega)}{q_{\max}(\omega)}$ (кривая *1*) от плотности энергии излучения

Согласно вычислениям (см. упражнение 247) величина $1/\sigma$ определяется временами жизни атома на уровнях m, n, обусловленными спонтанными переходами и тушащими столкновениями. С другой стороны, произведение $b_{mn}(\omega)u(\omega)$ равно числу переходов, индуцированных излучением в единицу времени и в расчете на один атом в единице объема. Поэтому зависимость $N_m - N_n$ от комбинации $b_{mn}(\omega)u(\omega)/\sigma$ имеет простое физическое толкование: чем больше время $1/\sigma$, в течение которого атом находится на уровнях m и n, в тем большей степени электромагнитное поле «успевает» выровнять заселенности этих уровней и перевести энергию возбуждения в энергию излучения.

При анализе эффекта насыщения подразумевалась инверсная заселенность уровней, т.е. $N_m > N_n$. Если $N_m < N_n$, то соотношения (224.2)–(224.4) остаются в силе, но число переходов с поглощением превышает число переходов с вынужденным испусканием, и в итоге среда не отдает энергию в поле, а получает ее из поля.

Следует иметь в виду, что зависимость коэффициента усиления $\alpha(\omega)$ от плотности излучения $u(\omega)$ по гиперболическому закону (224.4) справедлива лишь для сравнительно простой модели среды. Из (224.4) видно, в частности, что спектральная плотность коэффициента Эйнштейна $a_{mn}(\omega)$ для всех атомов предполагается одинаковой. Если принять во внимание столкновения, движение атомов и связанный с ним

эффект Доплера, немонохроматичность излучения и другие обстоятельства, то вид зависимости $\alpha(\omega)$ от $u(\omega)$ будет иной. Однако уменьшение $\alpha(\omega)$ с ростом $u(\omega)$ является общей закономерностью.

Экспериментальное обнаружение эффекта насыщения принадлежит С.И. Вавилову, о чем уже упоминалось в § 157. Впоследствии эффект насыщения был подробно изучен для кристаллофосфо́ров, характеризующихся относительно большой длительностью возбужденных состояний, а также для переходов между атомными и молекулярными уровнями с частотами, относящимися к радиодиапазону и к оптической области спектра. Эффект насыщения представляет собой одно из основных явлений нелинейной оптики, и он будет играть существенную роль во всем дальнейшем изложении.

§ 225. Принцип действия оптического квантового генератора

Когерентное усиление света средой с инверсной заселенностью энергетических уровней определило возможность использовать такую среду для генерации направленного потока монохроматического излучения.

Прежде чем переходить к описанию работы оптического квантового генератора, сделаем замечание о смысле принятого для него названия. Для формирования потока направленного излучения в активной среде используются процессы излучения атомов или молекул, квантовых систем, обладающих дискретным набором возможных значений энергии и испускающих кванты энергии — фотоны. Это определяет целесообразность применяемого термина «оптический квантовый генератор», или, сокращенно, — ОКГ [1]). В радиотехнических ламповых генераторах, в которых используется движение электронов проводимости и частоты излучения низки, квантовые эффекты существенной роли не играют, и возможно классическое описание большинства происходящих в них явлений.

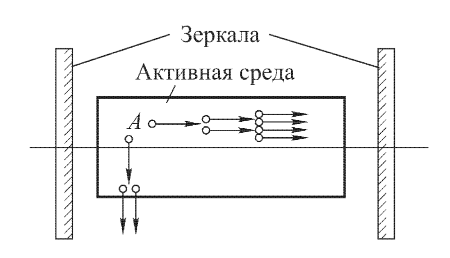


Рис. 40.4. Принципиальная схема оптического квантового генератора

Рассмотрим, как будет излучать свет активная среда, помещенная между двумя зеркалами типа используемых в интерферометрах Фабри–Перо (рис. 40.4). Такую систему принято называть активным оптическим резонатором. Пусть возбужденный атом, расположенный в точке A, испускает волну в результате спонтанного перехода между уровнями с инверсной заселенностью.

[1]) Второе сокращенное название ОКГ — лазер — составлено из первых букв английской фразы: light amplification by stimulated emission of radiation (усиление света индуцированным испусканием излучения).

Чем больше путь, проходимый волной в активной среде, тем больше усиление волны. Для направлений, перпендикулярных к оси резонатора, усиление оказывается наименьшим. Другим направлениям соответствует несколько больший путь, и, следовательно, несколько большее усиление. На рис. 40.4 это схематически показано увеличением числа стрелок в усиливающихся световых потоках. После отражения от зеркала волна вновь распространяется в активной среде, и ее амплитуда продолжает увеличиваться. Затем она достигает противоположного зеркала, отражается от него и испытывает дальнейшее усиление в активной среде, после чего все стадии описанного цикла повторяются, и энергия волны в резонаторе нарастает.

Помимо усиления активной средой, существует ряд факторов, которые уменьшают амплитуду волны внутри резонатора. Коэффициенты отражения зеркал резонатора не равны единице. Более того, для вывода излучения из резонатора по крайней мере одно из зеркал делается частично прозрачным. Кроме того, при распространении излучения вдоль оси резонатора будут и другие потери энергии потока излучения, вызванные его дифракцией, рассеянием в среде, заполняющей резонатор и т.д. Все эти потери энергии можно учесть, введя для зеркал некоторый эффективный коэффициент отражения $r_{эф}$, который меньше значения истинного коэффициента отражения зеркал r.

Если усиление волны на длине L больше суммарных потерь, испытываемых волной при отражении от зеркал, то с каждым пробегом амплитуда волны будет увеличиваться все больше и больше. Усиление будет продолжаться до тех пор, пока плотность энергии $u(\omega)$ в этой волне не достигнет такого значения, при котором величина коэффициента усиления существенно уменьшится вследствие эффекта насыщения. Стационарное состояние соответствует, очевидно, условиям точной компенсации усиления в среде суммарными потерями энергии. Таким образом, эффект насыщения имеет принципиальное значение в вопросе о генерации излучения в лазерах.

Количественное соотношение, определяющее возможность генерации направленного потока излучения, можно найти из следующих соображений. Поток излучения со спектральной плотностью I_0, возникший в какой-либо точке A активной среды (см. рис. 40.4) н направленный вдоль оси резонатора, усиливается на пути к правому зеркалу, отражается от него и после отражения от левого зеркала опять пройдет через точку A, распространяясь в своем исходном направлении. Таким образом, за один цикл распространения в резонаторе излучение пройдет путь $2L$. В отсутствие всяких потерь энергии это должно привести к увеличению потока до величины $I_0 \exp{[2\alpha(\omega)L]}$, где $\alpha(\omega)$ — коэффициент усиления. Однако в результате потерь, которые учтены эффективным коэффициентом отражения зеркал $r_{эф}$, фактическая плотность потока энергии после одного цикла его распространения в резонаторе определится выражением $I_0 r_{эф}^2 \exp{[2\alpha(\omega)L]}$. Поэтому решение вопроса о возможности возбуждения генерации в резонаторе сводится к условию

$$I_0 r_{эф}^2 \exp{[2\alpha_0(\omega)L]} > I_0,$$

или
$$r^2_{\text{эф}} \exp\left[2\alpha_0(\omega)L\right] > 1. \tag{225.1}$$
Здесь под $\alpha_0(\omega)$ понимается значение коэффициента усиления при малых интенсивностях, т.е. без учета эффекта насыщения (так называемый *ненасыщенный коэффициент усиления*). В том случае, когда соотношение (225.1) превращается в равенство, говорят о достижении *пороговых условий* генерации.

В соответствии со сказанным выше, стационарная мощность генерации определяется условием
$$r^2_{\text{эф}} \exp\left[2\alpha(\omega)L\right] = 1; \tag{225.2}$$
потенцируя последнее соотношение, получим
$$\alpha(\omega)L = f, \quad f = \ln\frac{1}{r_{\text{эф}}}\,. \tag{225.3}$$
Условия (225.2) или (225.3) называются *условиями стационарной генерации.* Ему можно придать несколько иной вид, если с помощью соотношения (223.3) перейти от коэффициента усиления к мощности испускания в 1 см^3. Предполагая, кроме того, что $r_{\text{эф}}$ мало отличается от 1 (и, значит, $f = \ln(1/r_{\text{эф}}) \approx 1 - r_{\text{эф}}$), и умножая левую и правую части (225.3) на площадь S поперечного сечения пучка лазера и на $cu(\omega)$, получим
$$q(\omega)SL = cu(\omega)(1 - r_{\text{эф}})S. \tag{225.4}$$
Можно сказать, следовательно, что условие стационарной генерации эквивалентно равенству мощности qSL, излучаемой в объеме SL активной среды, и потока $cuS(1 - r_{\text{эф}})$, выходящего из резонатора.

Величина f называется *относительными потерями энергии* или, сокращенно, *потерями.* Вместо величины f иногда оперируют с *добротностью резонатора* Q_r. Под добротностью колебательной системы понимают отношение энергии, запасенной в системе, к энергии, выходящей из системы за один период колебаний $2\pi/\omega$. Легко показать, что для оптических резонаторов добротность, определенная таким образом, связана с потерями f соотношением
$$Q_r = \frac{2L}{\lambda f} = \frac{q}{f}\,,$$
где q — число полуволн, укладывающихся на длине резонатора L.

Вычислим стационарную мощность генерации. С этой целью воспользуемся соотношением (224.4), которое представим в виде
$$\alpha(\omega) = \frac{\alpha_0(\omega)}{1 + u(\omega)/u_0}\,, \tag{225.5}$$
где введены обозначения
$$u_0 = \frac{\sigma}{b_{mn}}\,, \quad \alpha_0(\omega) = \frac{1}{4}\,\lambda^2 a_{mn}(\omega)[N_{m0} - N_{n0}] \tag{225.6}$$
и $\alpha_0(\omega)$ — ненасыщенный коэффициент усиления, а величина u_0 равна такой плотности излучения, при которой $\alpha(\omega)$ уменьшается в 2

раза в сравнении с $\alpha_0(\omega)$. Подставляя выражение (225.5) для $\alpha(\omega)$ в равенство (225.3), можно найти стационарное значение $u(\omega)$ внутри резонатора:

$$u(\omega) = u_0 \left[\frac{\alpha_0(\omega)L}{f} - 1\right], \quad f = \ln\frac{1}{r_{эф}}. \qquad (225.7)$$

Таким образом, плотность генерируемого излучения пропорциональна превышению ненасыщенного коэффициента усиления над его пороговым значением f/L; если $\alpha_0(\omega) \leqslant f/L$, то генерация не возникает, что согласуется с условием (225.1).

Используя понятие добротности резонатора, можно придать формуле (225.7) следующий вид:

$$u(\omega) = u_0 \left[\frac{1}{2}\,\alpha_0(\omega)\lambda Q_r - 1\right].$$

Пороговое условие генерации в этих терминах означает, что усиление света на протяжении полуволны должно быть больше величины, обратной добротности резонатора:

$$\frac{1}{2}\,\alpha_0(\omega)\lambda > Q_r^{-1}.$$

С помощью соотношения (225.7) можно вычислить поток Φ, выходящий из резонатора:

$$\Phi = cu(\omega)(1 - r_{эф})S = cu(\omega)fS. \qquad (225.8)$$

Простые преобразования позволяют записать выражение для потока Φ в виде (см. упражнение 248)

$$\Phi = q_{\max}SL - \frac{c\,u_0}{fS}, \qquad (225.9)$$

где $q_{\max}$ — максимальное значение мощности испускания единицы объема активной среды, которое определяется энергией, запасаемой в среде за счет процессов возбуждения (см. § 224 и формулу (224.1)). Таким образом, если условия возникновения генерации (см. (225.1)) выполнены, то мощность потока когерентного излучения, выходящего из лазера, линейно зависит от мощности процессов возбуждения, поддерживающих в активной среде инверсную заселенность.

Напомним, что в эффективном коэффициенте отражения учтены потери энергии любой природы, в том числе потери из-за выхода излучения через боковые стенки резонатора. Вполне ясно, что для пучков, распространяющихся наклонно по отношению к оси резонатора, потери будут больше, чем для осевых пучков. Поэтому порог генерации для наклонных пучков выше, чем для осевых. Кроме того, следует помнить об ограниченности запаса энергии активной среды, способного перейти в вынужденное излучение. Поскольку для осевых пучков потери меньше, чем для наклонных, их интенсивность нарастает быстрее, для них стационарные условия достигаются раньше, чем для наклонных. Поэтому осевые пучки могут при благоприятных обстоятельствах использовать указанный запас энергии целиком, не оставив практически ничего на долю наклонных пучков.

Из сказанного должно быть ясно, что световые пучки, выходящие из квантового генератора, могут обладать очень малой расходимостью. Минимальный телесный угол, в котором сосредоточен поток, не может, конечно, быть меньше величины, определяемой дифракцией на зеркале, т.е. $(\lambda/D)^2$, где D — диаметр пучка. Это минимальное значение реализуется во многих случаях и оно действительно очень мало. Например, для $\lambda = 500$ нм и $D = 5$ мм имеем $(\lambda/D)^2 = 10^{-8}$, тогда как для некогерентных источников света телесный угол порядка $2\pi - 4\pi$. Эта сторона вопроса более подробно рассматривается в § 229.

Усиление спонтанного излучения в активном резонаторе и в конечном счете его превращение в генератор когерентного излучения имеет глубокую аналогию с процессами, развивающимися в автоколебательных системах, при самовозбуждении в них генерации. В таких системах важнейшую роль играет положительная обратная связь колебательной системы с источником энергии, поддерживающим в ней колебания. Сравнительно простой механизм индуктивной положительной обратной связи можно проследить на примере генератора колебаний с электронной лампой.

В случае оптического квантового генератора зеркальный резонатор создает положительную обратную связь между полем излучения и источником его энергии — активной средой [1]). Зеркала резонатора обеспечивают многократное распространение (и тем самым усиление) светового потока в активной среде. Это необходимо и для самовозбуждения генерации, и для ее поддержания. Однако роль резонатора в работе лазера не исчерпывается повышением плотности энергии поля в активной среде. Согласно указанной выше аналогии для возникновения автоколебательного режима обратная связь должна быть положительной. Другими словами, должна иметь место строгая синфазность колебаний, уже существующих в системе и «приходящих» по каналу обратной связи. Подобные соображения применимы и к оптическим квантовым генераторам, о чем будет идти речь в § 228, 229.

Из приведенного выше описания принципа работы лазеров видно, что оптические квантовые генераторы основаны на трех фундаментальных идеях, родившихся в различных областях физики. Первая идея сформулирована Эйнштейном, который постулировал возможность процесса вынужденного испускания в рамках теории теплового некогерентного излучения. Вторая фундаментальная идея — применение термодинамически неравновесных систем, в которых возможно усиление, а не поглощение электромагнитных волн (В.А. Фабрикант, 1940 г.). Наконец, третья идея, имеющая радиофизические корни, — использование положительной обратной связи для превращения усиливающей системы в автоколебательную, т.е. в генератор когерентных электромагнитных волн. За разработку нового принципа усиления и генерации электромагнитных волн и создание молекулярных генераторов и усилителей советским физикам Н.Г. Басову и А.М. Прохорову в 1959 г. была присуждена Ленинская премия, а в 1964 г. Н.Г. Басову,

[1]) Применение зеркал — не единственный способ осуществления обратной связи в лазерах. Некоторые другие методы мы рассмотрим в § 233.

А.М. Прохорову и американскому физику Ч. Таунсу была присуждена Нобелевская премия (по физике).

§ 226. Описание устройства и работы рубинового оптического квантового генератора

Для создания активной среды необходимо селективное возбуждение ее атомов, обеспечивающее инверсную заселенность хотя бы одной пары их энергетических уровней. Возможны различные способы создания инверсной заселенности. Поскольку в предшествующем изложении подробно обсуждались процессы излучения и поглощения света, начнем с описания *оптического метода селективного возбуждения* атомов среды [1]). Примером оптического квантового генератора, в котором используется оптический метод возбуждения, может служить рубиновый лазер. Отметим, что этот генератор был исторически первым квантовым генератором, излучающим в видимой области спектра (Мейман, 1960 г.).

Рубин представляет собой кристалл окиси алюминия Al_2O_3 (корунд), в который при его выращивании введена окись хрома Cr_2O_3 обычно в количестве нескольких сотых долей процента. Окись хрома изоморфно входит в кристаллическую решетку корунда. В результате введения примеси ионов хрома прозрачный кристалл корунда приобретает розовую окраску. В спектре белого света, прошедшего через кристалл рубина, легко заметить две широкие полосы поглощения, расположенные в зеленой и фиолетовой областях спектра. Поглощение в этих участках спектра и определяет розовую окраску рубина.

Если кристалл рубина осветить сине-зеленым излучением, то он светится красным светом, отсутствующим в первичном световом пучке и представляющим собой фотолюминесценцию ионов хрома. При наблюдении свечения рубина через спектроскоп можно увидеть в красной области спектра линию с длиной волны $\lambda = 694{,}3$ нм [2]).

Изучение люминесценции рубина позволило составить следующее схематическое представление о механизме ее возникновения и об энергетических уровнях ионов хрома, введенных в кристаллическую решетку кристаллов корунда. На рис. 40.5 широкими полосами показаны энергетические уровни ионов хрома E_3 и E_3'. Переходы на них из основного состояния E_1 соответствуют упомянутым выше широким полосам поглощения кристалла рубина в видимой области спектра. Процессы поглощения энергии света ионами хрома символиче-

[1]) Вместо термина «оптический метод возбуждения» иногда используется термин «оптическая накачка», заимствованный из американской научной литературы.

[2]) В спектроскоп с большой дисперсией можно наблюдать две близко расположенные красные спектральные линии с длинами волн 694,3 и 692,9 нм. Интенсивность второй линии меньше первой. При нашем схематическом описании наблюдаемых явлений мы не будем обсуждать ни эту подробность, ни сверхтонкую структуру каждой линии в отдельности и зависимость их длин волн от температуры.

ски представлены стрелками, направленными от нормального нижнего энергетического уровня ионов E_1 к верхним уровням E_3, E_3'. В результате поглощения света ионы хрома переходят с нижнего уровня на верхние. Длительность существования τ этих возбужденных состояний ионов хрома мала и составляет примерно 10^{-8} с.

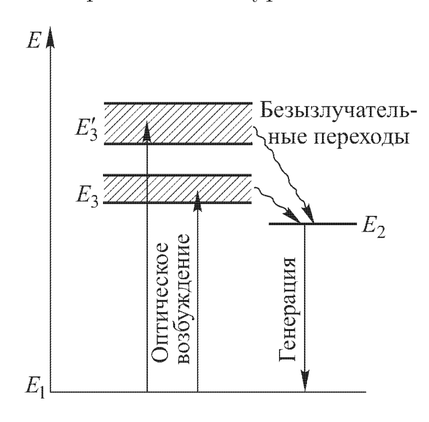


Рис. 40.5. Схема энергетических уровней иона хрома

Однако только незначительная часть ионов хрома возвращается обратно в основное состояние E_1, непосредственно излучая поглощенные ими фотоны. Опыт показывает, что большая часть возбужденных ионов хрома сначала отдает часть своей энергии кристаллической решетке корунда без излучения света. В результате такой передачи энергии кристаллу ионы переходят в состояние с энергией E_2. Этому безызлучательному переходу соответствуют волнистые стрелки на рис. 40.5 между уровнями E_3, E_3' и E_2. Длительность возбужденного состояния E_2 ионов хрома составляет $3 \cdot 10^{-3}$ с [1]), т.е. она во много раз больше, чем для состояний E_3 или E_3'. Возвращение ионов хрома с уровня E_2 на основной уровень E_1 совершается путем излучательных переходов, и создающих ту красную люминесценцию кристаллов рубина, о которой было сказано выше.

Описанная схематически структура энергетических уровней ионов хрома в кристаллах рубина и длительное существование возбужденного состояния с энергией E_2 благоприятствовали созданию первого оптического квантового генератора.

Принципиально эту задачу можно разрешить следующим образом. Мощное освещение рубина белым светом возбуждает ионы хрома, которые приобретают энергию E_3, E_3', а затем без излучения быстро переходят на метастабильный уровень E_2. Благодаря большой длительности его существования, на уровне E_2 происходит «накопление» ионов хрома. При достаточно большой освещенности рубина их концентрация на уровне E_2 будет больше, чем на уровне E_1, т.е. возникнет среда с инверсной заселенностью энергетических уровней E_2 и E_1. Для возникновения генерации когерентного излучения при переходах $E_2 \to E_1$ необходимо поместить рубин в резонатор и удовлетворить тому условию самовозбуждения генерации $\alpha_0(\omega)L > f$, которое было выведено выше (см. § 225). Поэтому рубиновый лазер устроен следующим образом (рис. 40.6). Изготовляют цилиндрический рубиновый стержень *1* диаметром в несколько миллиметров и

[1]) Возбужденные состояния со столь большой длительностью существования называются метастабильными.

длиной в несколько сантиметров с плоскими торцами, тщательно полированными и строго перпендикулярными оси цилиндра. Один из торцов покрывают плотным слоем металла с высоким коэффициентом отражения, например, серебра. Другой торец рубинового стержня покрывают полупрозрачным слоем того же серебра. В результате

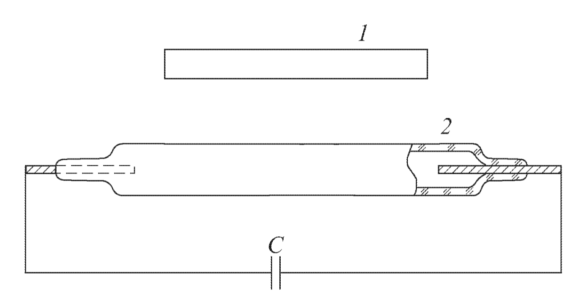


Рис. 40.6. Схема рубинового лазера

стержень и два параллельных друг другу зеркала на его торцах образуют оптический резонатор [1]).

Необходимая освещенность рубинового стержня осуществляется лампой *2* (см. рис. 40.6), помещенной вместе со стержнем в специальный зеркальный осветитель (на рис. 40.6 осветитель не показан), концентрирующий свет лампы на рубине. Этот осветитель *3*, имеющий форму эллиптического цилиндра с зеркальной поверхностью, изображен вместе с рубиновым стержнем и лампой, но в другой проекции, на рис. 40.7.

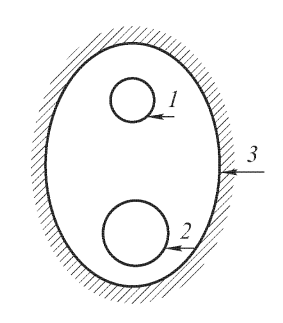


Рис. 40.7. Поперечное сечение осветителя лазера с оптическим возбуждением

Для возбуждения генерации обычно пользуются импульсными газоразрядными лампами, дающими яркую световую вспышку длительностью порядка одной миллисекунды. Для возникновения генерации световая мощность, непосредственно используемая для возбуждения ионов хрома в 1 см^3 рубина, должна составить около 2 кВт. Если лампа обеспечивает такую мощность возбуждения, то рубиновый лазер генерирует световой импульс с длительностью, несколько меньшей длительности свечения лампы. На экране, расположенном параллельно полупрозрачному зеркалу на торце рубинового стержня, можно увидеть ослепительно яркую красную световую вспышку. Площадь поперечного сечения светового пятна на экране при этом практически не зависит от расстояния (в пределах десятка метров) между рубином и экраном.

[1]) Можно ограничиться полировкой торцов рубинового стержня и установить два внешних зеркала.

Для освещения рубинового стержня применяются ксеноновые газоразрядные лампы, через которые разряжается батарея высоковольтных конденсаторов. Емкость такой батареи конденсаторов порядка 1000 мкФ, и заряжается она до напряжения в 2–3 кВ. На рис. 40.6 показана батарея конденсаторов C, включенная параллельно лампе *2*, но блок зарядки конденсаторов и устройство для быстрого их включения параллельно лампе не изображены.

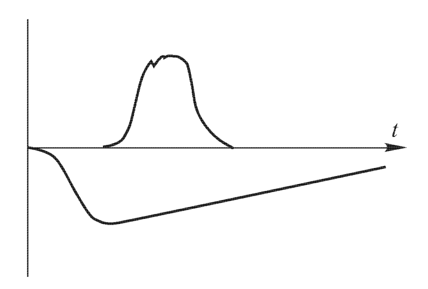


Рис. 40.8. Осциллограммы свечения возбуждающей лампы-вспышки и излучения рубинового лазера

На рис. 40.8 показаны осциллограммы интенсивности световых вспышек рубинового лазера и возбуждавшей его генерацию ксеноновой лампы. Для того чтобы эти две осциллограммы не накладывались друг на друга, ординаты одной из них (лазерной) отсчитываются вверх от горизонтальной оси временной развертки, а другой — вниз. Из сравнения осциллограмм видно, что генерация в рубине начинается не одновременно с началом световой вспышки ксеноновой лапмы, а только после обеспечения достаточной инверсной заселенности рабочих уровней ионов хрома. Излучение лазера заканчивается, когда мощность возбуждающего света ксеноновой лампы падает ниже порога, необходимого для поддержания генерации в рубине.

Спектры светового импульса ксеноновой лампы и рубинового лазера совершенно различны. Ксеноновая лампа излучает импульс света со сплошным спектром, рубиновый лазер генерирует красную спектральную линию с длиной волны 694,3 нм и шириной около 0,025 нм (и меньше). Энергия светового импульса рубинового лазера сравнительно невелика и составляет несколько джоулей. Но, так как длительность импульса порядка миллисекунды, мощность лазерного импульса достигает нескольких киловатт [1]). О способах значительного ее повышения будет сказано ниже.

Как уже отмечалось в § 225, оптический резонатор лазера обеспечивает коллимацию (направленность) излучения, выходящего из лазера. Хотя при использовании рубиновых стержней трудно достичь дифракционного предела углового раскрытия λ/D излучаемого светового конуса, но, тем не менее, можно получить расходимость светового пучка, не превышающую нескольких угловых минут. Это значит, что на экране, расположенном на расстоянии километра от лазера, диаметр поперечного сечения светового пучка составит примерно метр без применения каких-либо фокусирующих оптических систем.

Необходимо подчеркнуть пространственную когерентность излучения в сечении лазерного светового пучка, тесно связанную с его

[1]) Отметим, что существуют рубиновые лазеры, работающие в непрерывном режиме.

расходимостью (см. § 22). Если на пути лазерного светового пучка расположить две узкие параллельные щели, прорезанные в непрозрачном экране, т.е. осуществить схему интерференционного опыта Юнга (см. § 16), но без первой входной щели, то на экране, поставленном за этими щелями, можно наблюдать интерференционную картину с высокой видимостью (контрастностью) ее полос. Это значит, что излучение лазера пространственно когерентно.

Рубиновый лазер может давать линейно-поляризованное излучение без помощи какого-либо поляризатора. Если рубиновый стержень лазера вырезан из кристалла рубина таким образом, что оптическая ось кристалла перпендикулярна к оси стержня или составляет с ней угол 60°, то излучение линейно-поляризовано, причем вектор индукции $\mathbf{D}$ перпендикулярен плоскости главного сечения кристалла.

Если сопоставить характеристики импульсного рубинового лазера, обычно применяемого в современной лабораторной практике (мощность светового импульса, ширину спектра излучения, пространственную когерентность светового пучка, его коллимацию), с аналогичными характеристиками других источников света, то становится ясно, что оптический квантовый генератор представляет собой источник излучения принципиально иного типа. Из легко осуществимого расчета вытекает, что для излучения абсолютно черным телом «лазерной мощности» в пределах указанного спектрального интервала (0,025 нм) оно должно иметь температуру порядка 10^8 К. Но даже при этом условии поток равновесного излучения не был бы пространственно когерентен. Сравнивая спектральные мощности излучения единицы поверхности Солнца и лазера, получим, что лазер излучает в 10^4 раз больше, чем Солнце. Если найти амплитуду напряженности электрического поля в несфокусированном лазерном световом пучке указанной выше мощности, то окажется, что она составляет величину порядка 10^4 В/см. Для сравнения укажем, что напряженность поля в солнечном свете на экваторе у поверхности Земли в ясный солнечный день порядка 10 В/см. Как мы увидим в дальнейшем, напряженность поля в лазерном световом пучке можно повысить еще на несколько порядков.

Рассмотрим некоторые способы повышения мощности излучения импульсного рубинового лазера. Так, можно увеличивать длину и повышать качество рубинового кристалла, а также мощность его оптического возбуждения. Это дает несомненные положительные результаты и позволяет повысить мощность излучаемого импульса примерно на один порядок при неизменной его длительности.

Другая возможность повышения мощности лазерного импульса основана на совершенно иных соображениях. Мощность импульса пропорциональна его энергии $\mathcal{E}$, деленной на длительность импульса $\Delta\tau$. Поэтому, если при данном значении энергии импульса сократить его длительность, то мощность импульса повысится. Изложим один из методов сокращения длительности импульса излучения, получивший название *метода модулированной добротности.*

Выше неоднократно подчеркивалось значение резонатора для самовозбуждения генерации лазера. Генерация начинает развиваться,

как только инверсная заселенность примет пороговое значение, определяемое потерями энергии в резонаторе. Поэтому целесообразно иметь большие потери на первом этапе освещения кристалла с тем, чтобы задержать начало развития генерации и накопить в освещенном кристалле более высокую концентрацию возбужденных ионов хрома. Можно расположить перпендикулярно пучку только одно зеркало, а другое зеркало или призму полного отражения (рис. 40.9) вводить в рабочее положение лишь после того, как будет достигнута высокая инверсная заселенность.

В момент правильной ориентации зеркала или призмы лавинообразно нарастает амплитуда импульса индуцированного излучения, получающего почти всю энергию, запасенную в активной среде, и имеющего длительность порядка 10^{-7}–10^{-8} с.

Существует несколько способов импульсного уменьшения потерь. Призму полного внутреннего отражения вращают вокруг оси, перпендикулярной к ребру A и лежащей в плоскости чертежа (на рис. 40.9

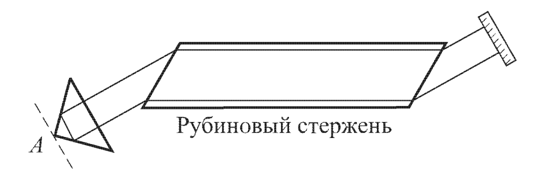


Рис. 40.9. Схема лазера с модулированной добротностью

она показана штриховой линией), с угловой скоростью около 500 об/с. Начальную фазу вращения подбирают таким образом, что призма занимает рабочее положение через заданный промежуток времени после включения ксеноновых ламп, когда инверсная населенность уровней ионов хрома велика.

Срезы торцов рубинового стержня, используемого в данном случае, делаются косыми и, разумеется, неметаллизированными для того, чтобы при высокой инверсной заселенности уровней, т.е. при высоких значениях коэффициента усиления, сам кристалл не стал оптическим резонатором.

Таким образом, повышение мощности лазерного импульса достигается сокращением его длительности за счет специального приема «включения» в работу оптического резонатора. Описанный метод сокращения длительности импульса до 10^{-7} с (правда, при некоторой потере его энергии) дает возможность получить импульсы с мощностью 10^7 Вт.

Как нетрудно понять, изменение ориентации призмы изменяет добротность оптического резонатора. Поэтому описанный метод формирования коротких мощных импульсов получил наименование *модуляции добротности* оптического резонатора. Лазеры, работающие в таком режиме, называются *лазерами с модулированной добротностью.* Соответственно условия работы лазера с неизменной во времени добротностью называют *режимом свободной генерации.*

Значительно более быструю модуляцию добротности резонатора можно осуществлять, используя электрооптические затворы (см. § 152). Действие этих затворов основано на практически безынерционном изменении или возникновении оптической анизотропии некоторых жидкостей и кристаллов под действием электрического поля. Относящийся к явлениям этого типа эффект Керра описан в § 152. С этой же целью применяется и другое электрооптическое явление, так называемый эффект Поккельса, возникающий в кристаллах и столь же малоинерционный, как и эффект Керра.

Модуляция добротности резонатора с помощью эффекта Керра осуществляется следующим образом. В резонатор, кроме кристалла рубина, введен затвор, состоящий из ячейки Керра и призматического линейного поляризатора, ориентированного таким образом, чтобы он полностью пропускал линейно-поляризованное излучение рубинового стержня, когда он начнет генерировать. Схема затвора Керра изображена на рис. 27.2. Перед включением ламп возбуждения рубина на ячейку Керра подается такое напряжение, чтобы она была эквивалентна полуволновой пластинке, надлежащим образом ориентированной по отношению к плоскости поляризации излучения рубина. При этих условиях свет, излучаемый рубином, не может распространяться вдоль оси резонатора. Если после включения ламп возбуждения, когда уже создана большая инверсная заселенность уровней рубина, быстро снять напряжение с конденсатора Керра, то линейно-поляризованное излучение рубина сможет свободно распространяться между зеркалами оптического резонатора и возникнет короткий импульс лазерного излучения длительностью порядка 10^{-8} с. Лазер с элементом Поккельса для модуляции добротности работает аналогично описанному выше.

Заканчивая описание лазеров с оптическим возбуждением кристалла, сделаем некоторые замечания общего характера относительно применения этого метода создания активной среды.

Отметим, что в качестве рабочего элемента в лазерах описанного типа с оптическим возбуждением используется не только рубин, но и целый ряд других кристаллов, а также вещества в других состояниях (стекла, газы).

Для метода оптического возбуждения существенно использование не менее трех энергетических уровней атома (см. рис. 40.5). Важно также, чтобы уровень E_2 был долгоживущим (в трехуровневой системе), а уровни E_3 — широкими. В самом деле, при использовании только двух энергетических уровней невозможно создать их стационарную инверсную заселенность за счет оптического возбуждения. Нарастание плотности потока возбуждающего излучения будет увеличивать и число актов поглощения фотонов, и число актов их индуцированного излучения. В результате даже при бесконечной мощности излучения заселенности энергетических уровней станут всего лишь одинаковыми, и их инверсная заселенность не будет достигнута. В том, что разность заселенностей $N_1 - N_2$ не может изменить знак, легко убедиться при помощи общего выражения (224.3) для этой величины.

§ 227. Гелий-неоновый лазер непрерывного действия

Гелий-неоновые лазеры излучают монохроматический, хорошо коллимированный пучок мощностью до нескольких десятков милливатт, работают и в импульсном, и в непрерывном режимах, просты и сравнительно безопасны в эксплуатации. Эти лазеры генерируют излучение и в видимой, и в инфракрасной областях спектра. В видимой области спектра длина волны их излучения приходится на красную часть спектра ($\lambda = 632{,}8$ нм), в инфракрасной области спектра они генерируют излучение на длинах волн 1150 и 3390 нм. Приборы такого типа стали наиболее распространенным видом лабораторного лазера, когда требования к параметрам излучения ограничиваются указанными выше условиями.

Принципиальная схема гелий-неонового лазера изображена на рис. 40.10. Здесь *1* — газоразрядная стеклянная трубка, диаметром

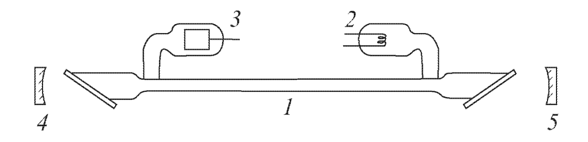


Рис. 40.10. Принципиальная схема гелий-неонового лазера

несколько миллиметров и длиной от нескольких десятков сантиметров до 1,5 м и более. Торцы трубки замкнуты плоскопараллельными стеклянными или кварцевыми пластинками, ориентированными под углом Брюстера к оси трубки. Для излучения, распространяющегося вдоль оси трубки и поляризованного в плоскости падения света на пластинки, коэффициент отражения от них равен нулю.

Давление гелия в трубке примерно равно 1 мм рт. ст., давление неона — 0,1 мм рт. ст. Трубка имеет катод *2*, накаливаемый низковольтным источником питания, и цилиндрический пустотелый анод *3*. Между катодом и анодом на трубку накладывается напряжение 1–2,5 кВ. Разрядный ток в ней равен нескольким десяткам миллиампер. Разрядная трубка гелий-неонового лазера помещается между зеркалами *4*, *5*. Зеркала, обычно сферические, делаются с многослойными диэлектрическими покрытиями, имеющими высокие значения коэффициента отражения и почти не обладающими поглощением света. Пропускание одного зеркала составляет обычно около 2 %, другого — менее 1 %.

При нагретом катоде трубки и включенном анодном напряжении трубка светится, и в ней отчетливо виден газоразрядный столб розового цвета. По внешнему виду включенная трубка вполне аналогична газоразрядным неоновым рекламным трубкам. Если через спектроскоп наблюдать ненаправленное свечение этой трубки, то отчетливо видна совокупность многих спектральных линий неона, расположенных в различных областях видимого спектра, и желтые линии свечения гелия.

При правильной ориентации через оба зеркала (но в особенности через зеркало с бо́льшим значением коэффициента пропускания) распространяются хорошо коллимированные интенсивные пучки монохроматического (красного) света с длиной волны 632,8 нм. Эти пучки возникают в результате генерации излучения гелий-неонового лазера. В его спектре присутствует только линия с длиной волны 632,8 нм.

Для генерации и наблюдения инфракрасного излучения того же лазера необходимо иметь прозрачные для него торцовые окна газоразрядной трубки, зеркала резонатора с высокими значениями коэффициента отражения в инфракрасной области спектра и, разумеется, приемник, чувствительный к инфракрасному излучению, например, болометр или фотодиод.

Кратко обсудим процессы, которые обеспечивают инверсную заселенность уровней неона. На рис. 40.11 приведена упрощенная схема уровней энергии атома неона (справа). Излучению с длинами волн 632,8 и 1150 нм соответствуют переходы $E_3 \to E_1$ и $E_2 \to E_1$. Помимо уровней E_4, E_3, E_2, E_1, атом неона имеет еще 28 состояний с энергиями, меньшими E_3, но они для нас несущественны и на рис. 40.11 не указаны. В результате столкновений с электронами газоразрядной плазмы часть атомов возбуждается, что отмечено на рис. 40.11 вертикальными штриховыми стрелками. При определенных режимах разряда этот процесс оказывается достаточным для образования инверсной заселенности уровней E_2 и E_1. Однако уровни E_3, E_1 и E_3, E_4, переходы между которыми отвечают $\lambda = 632{,}8$ и $\lambda = 3390$ нм, заселены не инверсно.

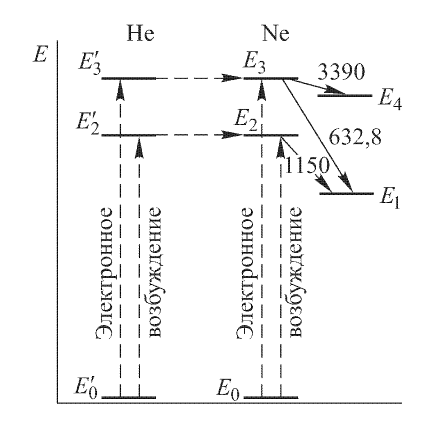


Рис. 40.11. Энергетические уровни атомов гелия и неона; числа у стрелок указывают длины волн в нанометрах

Положение изменяется, если в разрядную трубку ввести гелий. Гелий обладает двумя долгоживущими (метастабильными) состояниями E'_2, E'_3, показанными на левой части рис. 40.11; эти состояния возбуждаются при столкновениях с электронами, и ввиду большой длительности их существования, концентрация метастабильных атомов гелия в разряде очень велика. Энергии E'_3, E'_2 метастабильных состояний гелия очень близки к энергиям E_3, E_2 неона, что благоприятно для передачи энергии возбуждения от гелия к неону при их столкновениях. Эти процессы символизируются горизонтальными штриховыми стрелками. В результате концентрация атомов неона, находящихся на уровнях E_3, E_2, резко увеличивается, и возникает инверсная заселенность уровней E_3 и E_1, а разность заселенностей уровней E_2 и E_1 увеличивается в несколько раз. Таким образом, добавление гелия к

неону (примерно в пропорции 5:1–10:1) весьма существенно для генерации в гелий-неоновом газовом лазере.

Высокая степень оптической однородности активной среды гелий-неонового лазера позволяет сравнительно легко приблизиться к дифракционному пределу для коллимации излучения и его пространственной когерентности. Последнее можно легко продемонстрировать, если раздвигать щели в схеме опыта Юнга до самых краев сечения лазерного светового пучка. Видимость (контрастность) интерференционной картины при этом сохраняется.

Точные количественные исследования показали, что степень пространственной когерентности γ_{12} (см. § 22) излучения гелий-неонового лазера ($\lambda = 632{,}8$ нм) почти равна единице. Например, некогерентная часть потока $1 - \gamma_{12}$ оказалась порядка 10^{-3} для тех точек поперечного сечения пучка, где интенсивность составляет всего 0,1 % от максимальной интенсивности на оси, а для точек на оси — порядка 10^{-5}. Согласно расчетам указанные значения некогерентной части излучения лазера можно объяснить спонтанным испусканием его активной среды.

Благодаря высокой когерентности гелий-неоновый лазер служит превосходным источником непрерывного монохроматического излучения для исследования всякого рода интерференционных и дифракционных явлений, осуществление которых с обычными источниками света требует применения специальной аппаратуры. Многочисленные варианты гелий-неонового лазера нашли весьма разнообразные применения в биологических исследованиях, в системах лазерной связи, в голографии, машиностроении и многих других областях естествознания и техники.

§ 228. Спектр излучения оптических квантовых генераторов

В предыдущих параграфах, посвященных описанию принципа действия и конкретных схем лазеров, основное внимание концентрировалось на энергетической стороне дела, а именно, на методах образования достаточно большой инверсной заселенности и на усилении поля в активной среде. Существенную роль при этом играл резонатор, зеркала которого отражали падающий на них свет в активную среду и тем самым способствовали достижению порога генерации. Однако, помимо указанной функции, резонатор выполняет и другую — формирует пространственно когерентное и монохроматическое излучение.

Для выяснения этой стороны вопроса вернемся к рис. 40.4. Фиксируем какой-либо волновой фронт волны, распространяющейся в пространстве между зеркалами, и проследим его судьбу за время, необходимое для достижения им правого зеркала, отражения от него, распространения до левого зеркала и возвращения в исходную точку. На протяжении описанного цикла изменяются, вообще говоря, все параметры волны: так, к фазе добавляется величина $2kL$, где k — волновое число; в результате усиления в активной среде и отражения от зеркал амплитуда изменяется в $r \exp[\alpha(\omega)L]$ раз; дифракционные

явления и диафрагмирование зеркалами могут вызвать изменения в распределении амплитуды по волновому фронту; если среда резонатора или зеркала анизотропны, то может измениться и поляризация поля. Однако для формирования в лазере строго монохроматического излучения необходимо, чтобы к концу цикла любой параметр волны принимал то же самое значение, которое он имел в начале цикла. Действительно, предположим обратное и выберем в качестве исходного положение волнового фронта непосредственно перед его отражением от одного из зеркал, например, правого. Частично волна отразится от зеркала, а частично выйдет из резонатора. По прохождении цикла фиксированный нами волновой фронт также частично пройдет через правое зеркало, и по предположению вышедший свет будет иметь иные характеристики, чем свет, прошедший зеркало в начале цикла. Следовательно, если по истечении цикла происходят какие бы то ни было изменения в световой волне, выходящее из резонатора излучение будет иметь вид последовательности цугов, не вполне «согласованных» друг с другом. Другими словами, выходящая волна будет модулирована по одному или нескольким параметрам (амплитуде, фазе и т.д.), т.е. не будет монохроматической. Таким образом, для генерации строго монохроматического излучения необходимо, чтобы возможные изменения любой характеристики волны компенсировались на протяжении цикла и к его концу принимали исходные значения. Исключение составляет фаза, которая может, разумеется, измениться на величину, кратную 2π. Сформулированное утверждение именуется в дальнейшем *принципом цикличности* [1]).

Рассмотрим некоторые следствия, вытекающие из принципа цикличности. Амплитуда волны за счет усиления в активной среде за один цикл изменяется в $\exp[\alpha(\omega)L]$ раз, что должно компенсироваться выходом излучения из резонатора вследствие частичной прозрачности зеркал, дифракцией и потерями любого другого происхождения. Следовательно, применительно к амплитуде поля принцип цикличности требует выполнения равенства

$$\exp(-f)\exp[\alpha(\omega)L] = 1, \quad \alpha(\omega)L = f. \tag{228.1}$$

Полученный результат совпадает с соотношением (225.3). Напомним, что коэффициент усиления зависит от амплитуды поля. Поэтому (228.1) следует рассматривать как уравнение для амплитуды. Таким образом, принцип цикличности может служить основой для вычисления стационарной мощности генерации.

Выше мы обращали внимание на поляризованность светового пучка, создаваемого лазером. В зависимости от конкретного устройства лазера поляризация может быть линейной, круговой или эллиптической, но в любом случае испускается поляризованный, а не естествен-

---

[1]) Аналогично тому, как принцип Гюйгенса–Френеля находит обоснование в электромагнитной теории света, принцип цикличности также является следствием более общих соображений. Однако в принятом здесь элементарном способе изложения принцип цикличности вполне достаточен для интерпретации совокупности свойств лазеров, работающих в стационарном режиме.

ный свет. В рамках принципа цикличности это свойство излучения лазера самоочевидно. Впрочем, строго монохроматический свет всегда поляризован, и поэтому ценность принципа цикличности в данном случае состоит не в утверждении факта поляризованности излучения лазера, а в возможности с его помощью установить состояние поляризации в том или ином лазере. Мы не будем останавливаться более на этом тонком вопросе, решение которого требует привлечения многих сведений о конструкции резонатора и о свойствах активной среды.

В отношении фазы волны требование принципа цикличности означает, что суммарное изменение фазы, возникающее за один цикл, должно быть кратным 2π, т.е.

$$2kL + \delta_1 + \delta_2 = 2\pi q, \tag{228.2}$$

где k — волновое число, q — целое число, а δ_1 и δ_2 — скачки фаз при отражении от зеркал резонатора. Соотношение (228.2) представляет собой уравнение относительно тех длин волн (или частот), которые только и могут возникать в стационарном режиме генерации при заданной конструкции лазера. Полагая, ради простоты, что скачки фаз при отражении отсутствуют ($\delta_1 = \delta_2 = 0$), из (228.2) находим

$$k_q = \frac{\pi}{L}\, q, \quad \lambda_q = \frac{2\pi}{k_q} = \frac{2L}{q}, \quad \omega_q = k_q \frac{c}{n_{\text{ср}}} = \frac{\pi c}{L n_{\text{ср}}}\, q, \quad q = 1, 2, \ldots \tag{228.3}$$

Волновое число, длина волны и частота снабжены индексом q, чтобы подчеркнуть очень важное обстоятельство, а именно: оптический квантовый генератор может создавать монохроматическое поле не с произвольной частотой, но лишь с дискретным набором частот [1)] (если, разумеется, фиксированы его длина L и показатель преломления $n_{\text{ср}}$ среды).

Согласно (228.3) на длине L укладывается целое число полуволн, т.е. равенство (228.3) совпадает с условием максимума интенсивности в интерференционной картине, создаваемой в интерферометре Фабри–Перо. Такое совпадение неудивительно, поскольку условие цикличности для фазы означает синфазность волн, прошедших любое число циклов, а это же условие определяет и максимумы интерференционной картины (см. § 30).

Разность частот, для которых числа q отличаются на единицу, равна

$$\Delta\omega = \omega_{q+1} - \omega_q = \frac{\pi c}{L n_{\text{ср}}},$$

т.е. совпадает с областью дисперсии эталона Фабри–Перо, эквивалентного резонатору по L и $n_{\text{ср}}$.

[1)] Строго говоря, и показатель преломления, и коэффициент усиления зависят от амплитуды поля и от частоты. Поэтому соотношения (228.1) и (228.2) представляют собой систему уравнений относительно амплитуды и частоты, и их следует решать совместно. Это обстоятельство в некоторых случаях может привести к поправкам к полученным выше решениям. Однако утверждение о дискретности спектра генерации останется, очевидно, в силе.

Аналогия с интерферометром Фабри–Перо позволяет взглянуть на процесс генерации с иной точки зрения. Представим себе, что излучающий атом помещен между зеркалами интерферометра, и вычислим образующееся при этом поле. Суммирование вторичных волн, возникающих в результате многократного отражения от зеркал первичной волны, приводит к следующему выражению для интенсивности света, вышедшего из интерферометра:

$$I = I_0 \frac{(1+r)t}{(1-r)^2 + 4r\sin^2[\pi\omega/\Delta\omega]}, \quad \Delta\omega = \frac{\pi c}{Ln_{\text{ср}}}, \tag{228.4}$$

где I_0 — интенсивность света в отсутствие зеркал, r и t — коэффициенты отражения и пропускания зеркал. Максимальное значение интенсивности достигается при выполнении обычного интерференционного условия

$$\omega = \Delta\omega q = \frac{\pi c}{Ln_{\text{ср}}}\, q, \quad q = 1, 2, \ldots,$$

совпадающего с (228.3). Физическое содержание этого условия в данном случае очевидно — все вторичные волны когерентны между собой и при выполнении (228.3) складываются по амплитуде, а в противном случае в большей или меньшей степени гасят друг друга. Неполное гашение обусловлено тем, что вторичные волны имеют неодинаковые амплитуды, убывающие по закону геометрической прогрессии (см. § 30).

Пусть теперь между зеркалами находится активная среда с коэффициентом усиления $\alpha(\omega)$. В этом случае амплитуды вторичных волн изменяются не только в результате неполного отражения от зеркал, но и в результате усиления в среде. Поэтому вместо коэффициента отражения r надо пользоваться величиной $r\exp[\alpha(\omega)L]$, и (228.4) примет вид

$$I = I_0 \frac{(1 + r\exp[\alpha(\omega)L])t}{(1 - r\exp[\alpha(\omega)L])^2 + 4r\exp[\alpha(\omega)L]\sin^2[\pi\omega/\Delta\omega]}. \tag{228.5}$$

Если усиление в среде компенсирует потери при отражениях, т.е. $r\exp[\alpha(\omega)L] = 1$, то при выполнении интерференционного условия интенсивность обращается в бесконечность. Последнее означает бесконечную *спектральную плотность* излучения для частот, задаваемых (228.3), т.е. генерацию монохроматических излучений с указанными частотами. Полная же интенсивность определяется эффектом насыщения и находится из условия $\alpha(\omega)L = -\ln r$, что было уже выяснено в § 225.

Таким образом, разобранный пример позволяет следующим образом интерпретировать необходимость выполнения фазовых условий. Если условие (228.2) не выполняется, то вторичные волны, будучи одинаковыми по амплитуде, но не синфазными, полностью гасят друг друга. Только строгая синфазность бесконечного числа вторичных волн с равными амплитудами обеспечивает их сложение по амплитуде и отсутствие взаимного гашения.

Ввиду большой важности фазового условия (228.2), определяющего спектр генерируемого излучения, кратко остановимся на еще

одной его интерпретации. Как известно, основной характеристикой колебательных систем (маятника, пружины, колебательного контура и т.д.) служат частоты их собственных колебаний. При некоторых условиях в таких системах можно возбудить незатухающие колебания (автоколебания), происходящие с собственными частотами исходной колебательной системы. Сказанное относится, например, к маятнику часов, ламповому генератору и т.п. Оптический резонатор также можно рассматривать как колебательную систему, и частоты, определяемые соотношением (228.3), оказываются его собственными частотами (см. упражнение 249). Важное отличие состоит в том, что резонатор как колебательная система обладает бесконечным числом степеней свободы и, следовательно, бесконечным набором собственных частот (см. (228.3)). Поэтому даже в ограниченном участке спектра число собственных частот резонатора может быть значительным. В случае, например, гелий-неонового лазера ($\lambda = 632{,}8$ нм) число собственных частот, расположенных в пределах ширины линии усиления, равно примерно 5–10, в рубиновом лазере оно достигает сотен, а в некоторых лазерах — десятков и сотен тысяч (лазеры на красителях, см. § 230).

Генерация может возникать, разумеется, лишь для тех частот из бесконечного набора (228.3), которые принадлежат спектральному интервалу, где выполняется условие достижения порога генерации (228.1). Сказанное иллюстрируется рис. 40.12, где кривая изображает зависимость ненасыщенного коэффициента усиления α_0 от частоты ω, а штриховая линия отсекает на оси ординат отрезок, равный пороговому значению коэффициента усиления $\alpha_{\text{порог}} = f/L$. Генерация, следовательно, возможна лишь для тех частот ω_q, которые расположены внутри интервала частот ω', ω''. Разность $\omega'' - \omega'$ увеличивается с ростом мощности процесса возбуждения активной среды при фиксированной величине потерь, так как увеличивается $\alpha_0(\omega)$ и кривая на рис. 40.12 поднимается при неизменном положении штриховой прямой. Если $\omega'' - \omega' < \Delta\omega$, то возможна генерация только для одной частоты. Если же $\omega'' - \omega' > \Delta\omega$, то в зависимости от степени выполнения этого неравенства возможны бихроматический, трихроматический и т.д. режимы генерации. Для случая, изображенного на рис. 40.12, возникает генерация с единственной частотой ω_q.

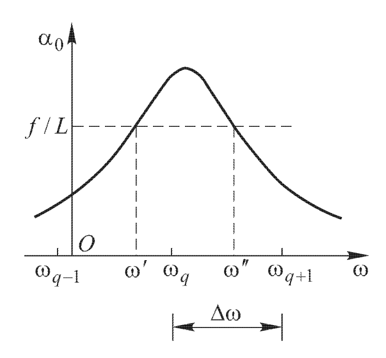


Рис. 40.12. К вопросу о спектре излучения лазера

Картина, приведенная на рис. 40.13, схематически показывает спектр излучения лазера, полученный с помощью интерферометра Фабри–Перо, в монохроматическом (*а*) и трихроматическом (*б*) режимах. Переход от одного режима к другому достигается изменени-

ем величины инверсной заселенности уровней. Очень широкий спектр генерации лазера на красителе изображен на рис. 40.23 *а* (см. § 231). Этот спектр получен на приборе с малой разрешающей силой, и его монохроматические компоненты не разрешаются (светлые линии на спектре соответствуют полосам поглощения воздуха). Однако при достаточном разрешении они наблюдаются, и их число составляет около 10^4.

Таким образом, структура спектра излучения лазеров зависит как от положения участков спектра, где удается получить достаточно большое усиление световых волн, так и (внутри этих участков) от положения собственных частот оптических резонаторов. К 1975 г. уже были разработаны лазеры разных типов, которые во всей своей совокупности позволяли получать когерентное излучение от вакуумного ультрафиолета (длины волн около 100 нм) до далекой инфракрасной области (длины волн в несколько десятых миллиметра).

До сих пор предполагалось, что излучение квантового генератора, отвечающее какому-либо собственному колебанию резонатора, монохроматично. В действительности же каждая такая спектральная компонента излучения лазера имеет малую, но конечную ширину. На протяжении курса неоднократно подчеркивалось, что строго монохроматическое колебание возможно лишь при бесконечной его продолжительности. Существует общее соотношение между длительностью T волнового цуга и шириной его спектра $\delta\omega$ (см. § 21)

$$T\delta\omega \gtrsim 2\pi.$$

Из сказанного следует, что в случае импульсных лазеров спектральная ширина компонент в спектре их излучения никак не меньше величины, обратной длительности импульса. Для лазеров с модулированной добротностью, например, $T \approx 10^{-8}$ с, и $\delta\omega$ не менее 10^9 с$^{-1}$.

а *б*

Рис. 40.13. Интерференционные кольца, полученные с эталоном Фабри–Перо при его освещении излучением гелий-неонового лазера ($\lambda = 632{,}8$ нм): *а* — монохроматический режим, *б* — трихроматический режим. Эквидистантность линий в шкале частот искажена непостоянством дисперсии эталона

В случае квантовых генераторов непрерывного действия минимальная возможная спектральная ширина отвечала бы времени T между моментами включения и выключения лазера (при $T = 1$ час мы имели бы $\delta\omega \approx 2 \cdot 10^{-3}$ с$^{-1}$). Однако есть много причин, обусловливающих значительно бо́льшие значения спектральных ширин. Одна из этих причин состоит в следующем. Согласно соотношению (228.3) частоты ω_q зависят от длины резонатора L и показателя преломления среды $n_{\text{ср}}$. Это обстоятельство находит много полезных применений. Например, плавно передвигая одно из зеркал, можно непрерывно из-

менять частоту генерируемого излучения. Но изменения длины L могут происходить и случайным, неконтролируемым образом в результате вибраций, теплового расширения станины, на которой укреплены зеркала, и т.п. Если, например, L изменится на величину $\delta L = \lambda/100 \sim \sim 10^{-5}$ мм, то частота изменится на

$$\delta\omega = \frac{\omega\delta L}{L} \sim 2 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1} \qquad (L = 1 \text{ м}).$$

Аналогично вариация давления воздуха на 10^{-3} мм рт. ст. [1]) вызовет изменение частоты излучения (в предложении, что десятая часть длины резонатора заполнена воздухом), равное

$$\delta\omega = \omega\,\frac{\delta n_{\text{ср}}}{10 n_{\text{ср}}} = 10^5 \text{ с}^{-1}.$$

Перечисленные причины уширения спектра излучения генератора, а также аналогичные им носят название *технических.* Их влияние, по крайней мере принципиально, устранимо и действительно было устранено во многих приборах, но ценой значительного усложнения конструкции.

Помимо технических, существуют так называемые *естественные* причины уширения линий излучения квантовых генераторов, а именно броуновское движение зеркал и спонтанное испускание активной среды. Как показывают опыты и расчеты, спектральная ширина, определяемая естественными причинами, составляет 10^2–10^{-1} с$^{-1}$, т.е. фантастически малую величину.

Итак, общую картину спектра излучения оптических квантовых генераторов можно представить следующим образом. В интервале длин волн, простирающемся от вакуумного ультрафиолета до далекой инфракрасной области, с помощью разнообразных активных сред удается получать усиление излучения в участках спектра с относительной шириной $(\omega'' - \omega')/\omega$, составляющей в разных случаях от 10^{-1} (лазеры на красителях) до 10^{-7} (атомные и молекулярные газы). Положение этих участков спектра определяется частотами переходов между энергетическими уровнями, характерными для используемой активной среды (атомы, ионы, молекулы в газовой, жидкой и кристаллической фазе). В пределах каждого из упомянутых участков спектр генерируемого излучения имеет вид дискретных квазимонохроматических эквидистантных компонент, расстояние между которыми задается резонатором и составляет в относительной мере величину $\Delta\omega/\omega = \lambda/2L = 10^{-6}$–$10^{-4}$. Наконец, каждая из компонент представляет собой квазимонохроматическое излучение с ничтожно малой естественной спектральной шириной $\delta\omega \approx 10^2$–$10^{-1}$ с$^{-1}$, так что $\delta\omega/\omega \approx 10^{-13}$–$10^{-16}$. Средняя частота компонент быстро изменяется по техническим причинам, и за время порядка 10^{-4} с «пробегает» заметную долю (от 10^{-3} до 10^{-1}) от расстояния между компонентами $\Delta\omega$.

---

[1]) Такие изменения давления соответствуют силе звука при обычном разговоре.

§ 229. Конфигурация поля, создаваемого оптическими квантовыми генераторами

Вследствие ограниченности поперечных размеров зеркал и активной среды лазера распространение волн в резонаторе сопровождается дифракционными явлениями. Поэтому применение принципа цикличности к распределению амплитуды поля по волновому фронту сводится к решению дифракционной задачи: квантовый генератор формирует когерентный световой пучок с таким поперечным распределением амплитуды, которое с учетом дифракционных явлений должно воспроизводить себя на протяжении одного цикла.

Опыт показывает, что закон изменения амплитуды на волновом фронте зависит от конструктивных особенностей резонатора. Если резонатор образован двумя плоскими параллельными зеркалами, то структура пучка, выходящего из лазера, оказывается такой же, как и при дифракции нескольких когерентных плоских волн, падающих на экран с отверстием под небольшими углами, при условии, что форма эквивалентного отверстия совпадает с формой зеркал. В случае, например, прямоугольных зеркал угловое распределение амплитуды выражается функциями типа приведенных в § 42. Если же резонатор состоит из соосных сферических зеркал, то генерируемое излучение часто имеет вид гауссова пучка (см. § 43). Фотографии, показанные на рис. 9.8 (см. с. 170), получены для различных поперечных сечений пучка, выходящего из гелий-неонового лазера ($\lambda = 632{,}8$ нм). Как мы видим, интенсивность достигает максимального значения на оси пучка и плавно уменьшается, стремясь к нулю, в периферийной части сечения. Специальные измерения показали, что распределение интенсивности с высокой степенью точности описываются гауссовой функцией.

Покажем, что гауссов пучок может удовлетворить требованиям принципа цикличности. Предварительно напомним основные свойства гауссова пучка. Радиус кривизны волнового фронта в точке z дается соотношением

$$R = z - z_0 + \frac{(a_0^2 k)^2}{z - z_0}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \tag{229.1}$$

где z_0 — координата на оси Oz того сечения пучка, где его диаметр минимален, $2a_0$ — величина этого минимального диаметра (рис. 40.14). Штриховые дуги на рис. 40.14 изображают сечения плоскостью чертежа волновых фронтов, соответствующих точкам z_1, z_2. Центры кривизны этих волновых фронтов находятся в точках O_1 и O_2. Амплитуда волны в сечении, отвечающем точке z, описывается функцией

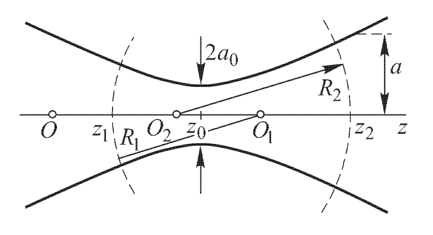


Рис. 40.14. Циклический гауссов пучок

$$A = \frac{a_0}{a}\,\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2a^2}\right), \quad a^2 = a_0^2 + \left(\frac{z - z_0}{ka_0}\right)^2. \tag{229.2}$$

Здесь x, y — координаты в плоскости, перпендикулярной к оси Oz; a — расстояние от оси, на котором амплитуда уменьшается в $\sqrt{e}$ раз, а интенсивность — в e раз по сравнению со своим значением на оси пучка. Гиперболические кривые, изображенные на рис. 40.14, показывают геометрическое место точек, удаленных от оси Oz на расстояние a (зависящее, согласно (229.2), от z).

Расположим в сечениях z_1 и z_2 два сферических зеркала с такими фокусными расстояниями f_1 и f_2, чтобы поверхности зеркал совпали с волновыми фронтами в сечениях z_1 и z_2. После отражения от одного из зеркал, подобранных и установленных указанным образом, исходный гауссов пучок будет преобразован в гауссов же пучок (см. § 43), распространяющийся в противоположном направлении и имеющий в любом сечении те же характеристики (a_0 и z_0), что и исходный. Применяя такие же рассуждения к отражению от второго зеркала, приходим к выводу, что после одного цикла гауссов пучок останется неизменным, как и диктуется принципом цикличности. Таким образом, в полном соответствии с опытом, из принципа цикличности и свойств гауссовых пучков следует, что в случае применения резонаторов, образованных сферическими зеркалами, излучение лазеров может иметь геометрическую конфигурацию гауссовых пучков.

В приведенных рассуждениях неявно предполагалось, что диаметр пучка $2a$ в месте расположения зеркал значительно меньше их диаметров, — только при выполнении этого условия гауссов пучок преобразуется в гауссов же. Однако амплитуда пучка, согласно (229.2), уменьшается очень быстро при $x^2 + y^2 > a^2$, и практически диаметр зеркала d должен быть больше диаметра $2a$ пучка в два-три раза. Расчет показывает, например, что при $d = 3 \cdot 2a$ мимо зеркала проходит лишь 0,01 % от общего потока. Эта величина и соответствует в данном случае вкладу в общие потери от дифракционных явлений. Как правило, потери иного происхождения (например, из-за прозрачности зеркал) существенно больше.

Итак, для заданного гауссова пучка всегда можно так подобрать зеркала и их расположение, чтобы он преобразовался «сам в себя». При рассмотрении квантовых генераторов практический интерес представляет обратная постановка вопроса: каковы параметры гауссова пучка, удовлетворяющего принципу цикличности, при заданных расположении и фокусных расстояниях зеркал? Вычисления (см. упражнение 250), основанные на формуле (229.1), приводят к следующему результату для зеркал с одинаковыми фокусными расстояниями f [1]):

$$z_0 = z_1 + \frac{L}{2}, \tag{229.3}$$

$$a_0^2 = \frac{\lambda L}{4\pi} \sqrt{\frac{4f}{L} - 1}. \tag{229.4}$$

[1]) К сожалению, фокусные расстояния и относительные потери общепринято обозначать одной и той же буквой, но это не должно привести к недоразумению.

Сечение пучка с минимальным радиусом a_0 равноудалено от зеркал, что естественно для симметричного резонатора. Поскольку подкоренное выражение должно быть положительным

$$4f > L, \tag{229.5}$$

то интересующий нас циклический гауссов пучок может существовать лишь при достаточно длиннофокусных зеркалах. Физически это вполне понятно: предельное значение $4f = L$ отвечает случаю, когда центры кривизн зеркал совпадают; более короткофокусные зеркала слишком сильно фокусируют пучок, и при последовательных отражениях он диафрагмируется зеркалами.

Из соотношения (229.4) видно, что минимальная площадь поперечного сечения пучка πa_0^2 пропорциональна площади первой зоны Френеля λL (см. § 33), соответствующей расстоянию L. Это явно указывает на дифракционный характер рассматриваемой задачи.

С помощью соотношений (229.2)–(229.4) можно вычислить радиусы a_1 и a_2 гауссова пучка в плоскостях зеркал, что позволит судить об осуществимости различных схем резонатора. В самом деле,

$$a_1^2 = a_2^2 = \frac{\lambda L}{4\pi}\left(\sqrt{\frac{4f}{L} - 1} + \frac{1}{\sqrt{4f/L - 1}}\right). \tag{229.6}$$

Отсюда следует, что и в *концентрическом резонаторе* ($4f \to L$), и в резонаторе с плоскими зеркалами ($f/L \to \infty$) пучок на зеркалах имеет очень большое сечение и значительная часть потока проходит мимо зеркал при их разумных размерах, а это означает фактически невозможность формирования в таких случаях гауссовых пучков. Радиусы пучков в плоскости зеркал и, следовательно, размеры самих зеркал минимальны, как легко показать, при $2f = L$, и тогда

$$a_{1\,\min}^2 = a_{2\,\min}^2 = \frac{\lambda L}{2\pi}. \tag{229.7}$$

Фокусы зеркал в этом случае совпадают, а центр кривизны каждого зеркала находится на противоположном зеркале. Такие резонаторы называются *софокусными*, или *конфокальными*, или *телескопическими* (два одинаковых зеркала с совпадающими фокусами образуют телескопическую систему с увеличением -1).

Если $\lambda = 0{,}63 \cdot 10^{-3}$ мм (гелий-неоновый лазер) и $L = 1$ м, то $a_{1\,\min} = 0{,}32$ мм и необходимые размеры зеркал варьируют от 1,5 до 2 мм. Благодаря малой величине длины волны практически приемлемыми оказываются зеркала, очень длиннофокусные с точки зрения обычных представлений. Например, $a_1 = 1$ мм реализуется при $f = 100$ м (если по-прежнему $\lambda = 0{,}63 \cdot 10^{-3}$ мм, $L = 1$ м).

Невозможность формирования гауссовых пучков в резонаторе с плоскими зеркалами отнюдь не означает, что не могут образовываться вообще никакое стационарные пучки. В этом случае стационарные пучки также существуют, но распределение амплитуды по волновому фронту будет описываться для них не гауссовой, а иной функцией. И опыт, и расчеты показывают, что в резонаторах с плоскими зеркалами поле представляет собой стоячую волну с почти плоским волновым

фронтом, а зависимость амплитуды от поперечных координат хорошо описывается произведением гармонических функций, которые обращаются в нуль на краях зеркал:

$$\sin\omega t \sin\left(\frac{\pi}{L}\,qz\right)\sin\left(\frac{\pi}{a}\,mx\right)\sin\left(\frac{\pi}{b}\,ny\right). \tag{229.8}$$

Здесь m, n, q — целые положительные числа, a и b — длины сторон прямоугольных зеркал, а начало координат совмещено с одной из вершин зеркала (рис. 40.15). На рис. 40.16 *а* приведены фотографии

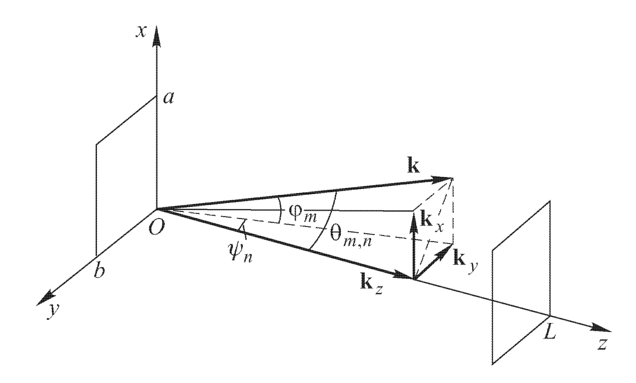


Рис. 40.15. Резонатор с плоскими прямоугольными зеркалами

поперечного сечения пучка на зеркале. Число полос нулевой амплитуды, параллельных осям Ox и Oy, равно, очевидно, $m-1$ и $n-1$.

Как известно, стоячая волна эквивалентна набору бегущих волн. В данном случае мы имеем дело с восемью бегущими волнами; четыре падают на левое зеркало, а четыре — на правое. Составляющие волновых векторов по осям Ox, Oy и Oz равны соответственно $\pm\frac{\pi}{a}\,m$, $\pm\frac{\pi}{b}\,n$ и $\pm\frac{\pi}{L}\,q$. Соотношения

$$\begin{gathered}\varphi_m \approx \frac{k_x}{k_z} = \frac{m/a}{q/L}, \quad \psi_n \approx \frac{k_y}{k_z} = \frac{n/b}{q/L}, \\ \theta_{m,n} = \frac{\sqrt{k_x^2+k_y^2}}{k_z} = \frac{\sqrt{(m/a)^2+(n/b)^2}}{q/L}\end{gathered} \tag{229.9}$$

определяют углы, смысл которых ясен из рис. 40.15. Угол $\theta_{m,n}$, например, образуется волновым вектором и осью Oz. Чем больше числа m, n, тем больше этот угол. Поэтому волны с $m \geqslant 2$, $n \geqslant 2$ называются *боковыми волнами*, в противоположность волне с минимальными значениями $m = n = 1$, называемой *осевой* или *аксиальной*.

Напомним, что между модулем волнового вектора и частотой существует общая связь $\omega = kc/n_{\text{ср}}$, где $n_{\text{ср}}$ — показатель преломления.

Поэтому волне (229.8) отвечает частота

$$\omega_{m,n,q} = \pi \frac{c}{n_{\text{ср}}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{q}{L}\right)^2}. \qquad (229.10)$$

Соотношение (229.10), которое можно получить и из принципа цикличности, означает дискретность набора частот в спектре излучения лазера с плоским резонатором. Однако, как легко показать, интервал частот, соответствующий изменению m и n на единицу, гораздо меньше, чем при переходе от q к $q+1$, если на зеркалах укладывается много зон Френеля, отвечающих расстоянию L (см. упражнение 251).

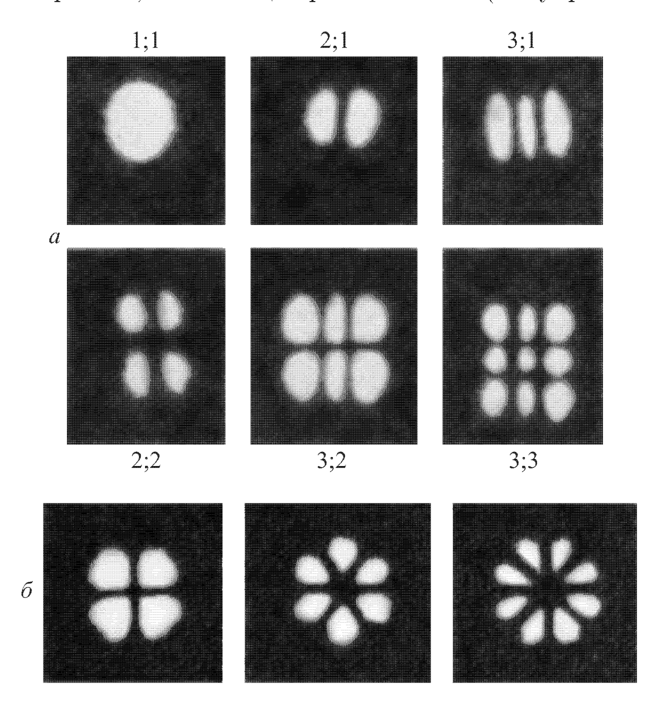


Рис. 40.16. Распределение освещенности на волновом фронте в оптическом квантовом генераторе: *а* — плоские квадратные зеркала (числа указывают значения m и n); *б* — круглые сферические зеркала

А теперь кратко обсудим вопрос об относительной величине энергии, покидающей объем резонатора, образованного плоскими зеркалами, вследствие дифракции за время одного цикла. Для того чтобы дифракционные потери были малыми, дифракционное уширение пучка должно составлять небольшую часть от поперечных размеров зеркал. В этом случае, как известно, мы имеем дело с дифракцией Френеля, и пучок расширяется на величину, примерно равную радиусу первой зоны Френеля $\sqrt{\lambda L}$. Если бы вблизи одного из зеркал

амплитуда сохраняла постоянное значение вдоль волнового фронта, то относительные потери за счет дифракции при достижении второго зеркала были бы, очевидно, пропорциональны $\sqrt{\lambda L}/a + \sqrt{\lambda L}/b$. Однако амплитуда поля на краю зеркал обращается в нуль, в результате чего потери оказываются пропорциональными кубам отношений $\sqrt{\lambda L}/a$, $\sqrt{\lambda L}/b$ (см. упражнение 252). Кроме того, потери увеличиваются с ростом m и n, т.е. потери минимальны для аксиальных волн и увеличиваются по мере возрастания угла между осью резонатора и волновым вектором.

Если $\lambda = 0{,}63$ мкм, $L = 1$ м, $a = b = 1$ см, то дифракционные потери составляют около 0,1 %.

Отметим, что боковые волны, характеризующиеся линиями нулевых значений амплитуды на волновом фронте, существуют и в резонаторах со сферическими зеркалами. В частности, фотографии на рис. 40.16 *б* получены с резонатором, составленным из сферических зеркал круглой формы.

До сих пор мы интересовались конфигурацией поля внутри резонатора. Характеристики пучка, вышедшего из лазера, можно найти, решая дифракционную задачу и принимая в качестве исходного распределение поля на внешней стороне зеркала, отличающееся на коэффициент пропускания зеркала от поля на внутренней его поверхности.

В случае резонатора со сферическими зеркалами амплитуда поля описывается гауссовой функцией (229.2), и, согласно общим выводам § 43, выходящий пучок будет гауссовым, а его параметры a_0 и z_0 могут отличаться от параметров, определяемых (229.3) и (229.4), только за счет фокусирующего действия толщи подложки зеркала. Последнее легко установить по законам преобразования гауссовых пучков линзами (см. § 43).

В случае резонатора, образованного плоскими зеркалами, амплитуда поля на волновом фронте описывается функцией

$$\sin\left(\frac{\pi}{a}\,mx\right)\sin\left(\frac{\pi}{b}\,ny\right),$$

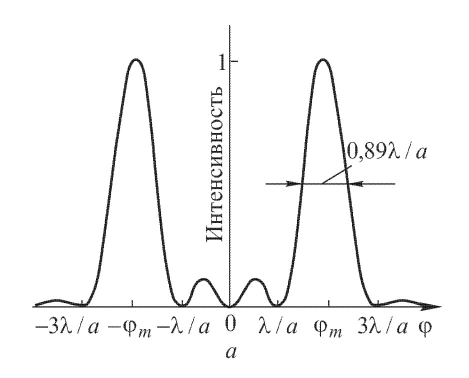
что соответствует, как было пояснено выше, падению на зеркало четырех плоских волн. Поэтому поле вне резонатора соответствует дифракции этих волн на прямоугольном отверстии со сторонами a и b вдоль осей Ox и Oy. Амплитуда в дифракционной картине на больших расстояниях (случай Фраунгофера) определяется выражением, которое можно написать по аналогии с результатами § 42.

Графики интенсивности в функции угла дифракции φ (соответствующего отклонению в направлении оси Ox) представлены на рис. 40.17 *а* для $m = 4$. Наибольшие значения интенсивности достигаются вблизи углов $\varphi = \pm\varphi_m = \pm m\lambda/2a$, отвечающих направлению распространения упомянутых «падающих» волн. При возрастании m расстояние между этими максимумами увеличивается.

На рис. 40.18 схематически показана освещенность удаленного экрана для $m = 4$, $n = 4$, причем заштрихованные кружки обозначают области наибольшей освещенности, а штриховые линии — линии нулевых значений амплитуды. Если в генерации принимают участие

все боковые волны, начиная с $m = 1$, $n = 1$ вплоть до $m = m_{\max}$, $n = n_{\max}$, то полная расходимость пучка определяется углами $\frac{\lambda}{2a}\, m_{\max}$ и $\frac{\lambda}{2b}\, n_{\max}$.

Если $m = 1$, то максимумы сливаются, как видно из рис. 40.17 *б*, где штриховые кривые соответствуют дифракционным картинам от двух плоских волн, падающих на отверстие под углами φ_1 и $-\varphi_1$ (см. также рис. 40.18 *б*, освещенность удаленного экрана). Волна с $m = 1$, $n = 1$ создает пучок с расходимостью,



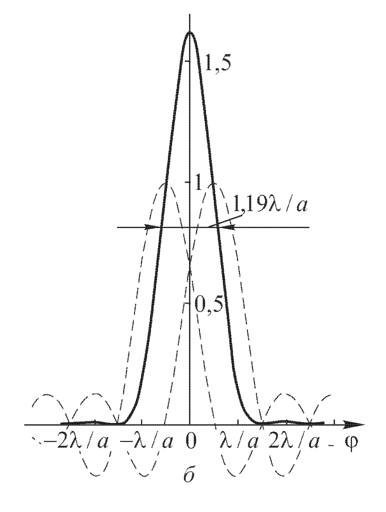


Рис. 40.17. Угловое распределение интенсивности в лазерном пучке. Резонатор образован плоскими зеркалами; поперечные индексы волн $m = 4$ (*а*) и $m = 1$ (*б*)

минимальной при заданных длине волны и поперечном размере зеркала и определяемой, как много раз подчеркивалось, отношением λ/a. Ширина углового распределения интенсивности на уровне, соответствующем половине максимальной интенсивности, равна $1{,}19\lambda/a$, т.е. сравнительно немного больше ширины в случае дифракции волны с постоянным значением амплитуды на отверстии $(0{,}89\lambda/a)$.

Расходимость гауссова пучка задается аналогичным отношением, в котором роль размера зеркала играет диаметр минимального сечения пучка $2a_0$, т.е. определяется величиной $(2/\pi)(\lambda/2a_0)$.

Таким образом, формирование пучка с дифракционной расходимостью представляет собой общее свойство оптических квантовых генераторов.

Основным понятием, которым мы оперировали на протяжении всего курса, служила плоская (или сферическая) волна. В данной главе выяснилось, что применительно к оптическим квантовым генераторам более адекватным физическим образом является совокупность когерентных между собою волн, удовлетворяющая требованиям принципа цикличности. Такая совокупность, характеризующаяся определенными частотой, поляризацией и стационарной геометричес-

кой конфигурацией, носит название *типа колебаний резонатора* [1]). В резонаторе, образованном плоскими зеркалами, типом колебаний служит стоячая волна (229.8), в случае резонатора со сферическими зеркалами, — стоячая волна, состоящая из двух гауссовых пучков, распространяющихся навстречу друг другу, волновые фронты которых совпадают с поверхностями зеркал. В других случаях конфигурация поля будет иной, характерной для каждой конкретной геометрии резонатора.

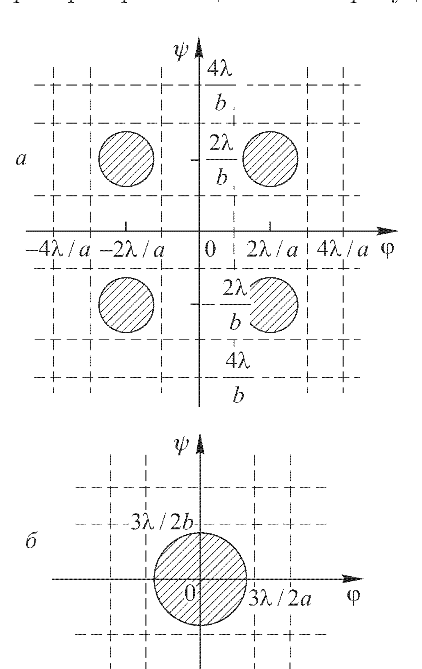


Рис. 40.18. Освещенность удаленного экрана, создаваемого лазерным пучком. Резонатор образован плоскими зеркалами ($a = b$); поперечные индексы волн $m = n = 4$ (*а*) и $m = n = 1$ (*б*)

Разумеется, тип колебаний всегда можно представить в виде суперпозиции бегущих плоских волн. Тип колебаний плоского резонатора, например, является суммой восьми когерентных плоских волн; гауссов пучок можно представить в виде бесконечного набора плоских волн (с помощью теоремы Фурье). Однако каждая из парциальных плоских волн не может существовать в резонаторе независимо, ибо в результате отражений и преломления, а также вследствие дифракционных явлений плоская волна преобразуется в совокупность волн, которые и образуют тип колебаний. Поэтому целесообразно рассматривать свойства указанной совокупности в целом.

Одно из замечательных свойств типов колебаний состоит в том, что они не преобразуются друг в друга. В этом отношении они аналогичны нормальным колебаниям механической системы, с помощью которых любое движение связанной системы точечных масс можно рассматривать как наложение одномерных колебаний, происходящих независимо друг от друга [2]). Аналогичным образом и общая задача об определении поля в резонаторе разбивается на более простые задачи об изучении

[1]) Для обозначения того же понятия применяется и термин *мода*, представляющий собой непосредственный перенос в русский язык английского слова mode.

[2]) См. С. Э. Хайкин. Физические основы механики.– М.: Наука, 1971, гл. XVIII.

парциальных полей с неизменной во времени геометрической конфигурацией (т.е. типов колебаний), а полное поле «конструируется» затем как суперпозиция типов колебаний. Такой подход характерен для физики вообще, и простейшим примером его применения может служить разложение движения материальной точки на три парциальных движения в адекватных системах координат (декартова система в случае инерциального движения или однородного поля сил, цилиндрическая система координат для кругового движения и т.п.).

При обсуждении принципа цикличности в начале § 228 было выяснено, что изменение того или иного параметра волны на протяжении цикла означает периодическую модуляцию излучения, выходящего из резонатора. Пользуясь представлением о типах колебаний, этот факт можно интерпретировать следующим образом: в резонаторе возбуждается не один тип колебаний, а несколько (два, три и т.д.) с различными собственными частотами, и модуляция поля в целом происходит с периодами, определяемыми разностями собственных частот возбужденных типов колебаний. Периодичность модуляции полного поля означает, что его спектр содержит дискретный набор частот. Поэтому собственные частоты резонаторов не могут принимать непрерывный ряд значений и должны быть дискретны, в чем мы убедились на примерах резонаторов с плоскими и сферическими зеркалами. Интересный и практически важный случай одновременного возбуждения многих типов колебаний будет рассмотрен в § 230.

При анализе нелинейных явлений принцип суперпозиции, разумеется, не выполняется, и упомянутый выше подход, основанный на описании поля с помощью линейной комбинации парциальных полей, теряет свою общность и эффективность. Тем не менее, во многих вопросах нелинейной оптики и спектроскопии оказывается целесообразным оперировать с типами колебаний в качестве элементарных структурных элементов поля.

§ 230. Генерация сверхкоротких импульсов света

Существуют режимы работы оптических квантовых генераторов, в которых выходящее из них излучение имеет вид последовательности эквидистантных, относительно коротких импульсов света. На рис. 40.19 приведена зависимость от времени мощности излучения лазера[1]), введенного в такой режим. Продолжительность каждого импульса составляет примерно $5 \cdot 10^{-12}$ с [2]), а интервал времени между последовательными импульсами точно равен длительности одного цикла $T = 2L/c$ (в данном случае $6{,}8 \cdot 10^{-9}$ с). Полное число импульсов определяется временем существования инверсной заселенности уровней иона неодима.

---

[1]) Активной средой служило стекло с введенным в него неодимом. Использовались переходы между энергетическими уровнями иона неодима Nd^{3+}.

[2]) Видимая на рисунке ширина импульсов гораздо больше, но она определяется инерционностью регистрирующей системы.

Описанный режим, получивший название *режима генерации сверхкоротких импульсов*, реализуется во многих лазерах. Иногда он возникает самопроизвольно, но в этом случае расстояние между соседними импульсами всего в несколько раз больше их ширины. Для получения особо «контрастных» импульсов применяются специальные методы. Некоторые из них заключаются в периодической модуляции

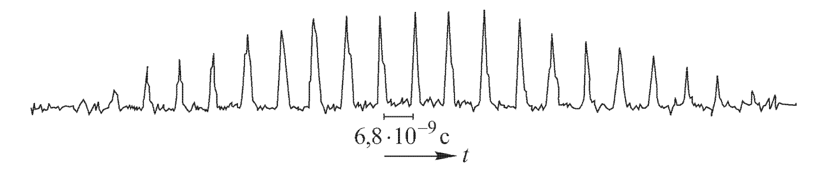


Рис. 40.19. Временна́я зависимость мощности излучения лазера, работающего в режиме сверхкоротких импульсов

добротности резонатора (с периодом $2L/c$). В других методах генерация сверхкоротких импульсов достигается за счет введения внутрь резонатора специальных фильтров, коэффициент поглощения которых резко уменьшается при больших интенсивностях излучения (эффект насыщения, см. § 224).

Из сказанного в § 229 должно быть ясно, что глубокая модуляция излучения лазера означает одновременное возбуждение многих типов колебаний резонатора, частоты которых отличаются на величину, кратную $\Delta\omega = 2\pi/T$, где T — продолжительность цикла. Кроме того, необходимо строгое согласование фаз возбужденных типов колебаний. В противном случае излучение лазера представляло бы, очевидно, хаотически, а не регулярно модулированную волну.

Для выяснения связи между столь своеобразной временно́й структурой светового пучка и свойствами возбужденных типов колебаний рассмотрим следующую схематизированную ситуацию. Пусть в лазере возбуждено N осевых типов колебаний с собственными частотами $\omega_j = \omega_0 + j\cdot 2\pi/T$, $j = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, а начальные фазы $\varphi_j = \varphi$ и амплитуды $A_j = A$ типов колебаний одинаковы. Тогда поле в какой-либо точке резонатора определяется суммой

$$s = A\sum_{j=0}^{N-1}\cos\left[(\omega_0 + j\Delta\omega)t + \varphi\right], \quad \Delta\omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{230.1}$$

В момент времени $t = 0$ фазы всех колебаний равны между собой, и амплитуда поля равна NA. В последующие моменты времени благодаря различию частот будет происходить расфазировка членов суммы (230.1), типы колебаний будут гасить друг друга, и по истечении некоторого времени ΔT произойдет полное погашение, т.е. амплитуда поля обратится в нуль. Действительно, пусть ради простоты рассуждений число типов колебаний N четно; тогда за время ΔT, определяемое из равенства

$$[\omega_{j+N/2} - \omega_j]\Delta T = \frac{N\Delta\omega\Delta T}{2} = \pi,$$

между j-м и $(j+N/2)$-м типами колебаний возникает разность фаз, равная π, и произойдет взаимное гашение первого и $(N/2+1)$-го, второго и $(N/2+2)$-го, ..., $(N/2)$-го и N-го типов колебаний. Полное гашение будет иметь место, очевидно, и через интервалы времени, кратные ΔT, но лишь до тех пор, пока разность фаз соседних колебаний (j-го и $(j+1)$-го) не станет равной 2π, ибо в этот момент все типы колебаний вновь синфазны и амплитуда поля по-прежнему равна AN. Момент восстановления синфазности колебаний есть $t = T$, поскольку $[\omega_{j+1} - \omega_j]T = 2\pi$. С дальнейшим течением времени описанная картина будет воспроизводиться с периодом T.

Количественное описание явления достигается суммированием N колебаний в (230.1), а итог вычислений можно представить в виде (см. упражнение 253)

$$s = AN\frac{\sin(\pi N t/T)}{N\sin(\pi t/T)}\ \cos\left[\left(\omega_0 + \frac{(N-1)\Delta\omega}{2}\right)t + \varphi\right]. \qquad (230.2)$$

Зависимость амплитуды от времени описывается множителем такого же типа, который фигурировал в теории дифракционной решетки (см. § 46), что вполне понятно, так как в обоих случаях дело сводится к сложению N колебаний, фазы которых образуют арифметическую прогрессию. Различие состоит в физической причине набега фазы: в случае дифракционной решетки фаза колебаний, приходящих от различных штрихов, изменяется с углом дифракции, а в данном случае она изменяется с течением времени. Поскольку функция $[\sin(N\beta)]/N\sin\beta$ детально изучалась в § 46, мы не будем повторять ее анализ и обратим внимание лишь на качественное совпадение графика, приведенного на рис. 40.19, и графика, изображенного на рис. 9.19 *а*.

Таким образом, в согласии с приведенными рассуждениями и в соответствии с опытом интервал T между последовательными импульсами равен продолжительности цикла, т.е.

$$T = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{2L}{c};$$

длительность каждого импульса обратно пропорциональна ширине участка спектра, отвечающего возбужденным типам колебаний, т.е.

$$\Delta T = \frac{2\pi}{N\Delta\omega} = \frac{T}{N}.$$

Выписанное соотношение между T и ΔT также находит экспериментальное подтверждение.

Числовое значение произведения $N\Delta\omega$ пропорционально ширине спектральной линии, соответствующей переходу между уровнями с инверсной заселенностью, поскольку именно в этом участке спектра коэффициент усиления имеет большое значение. Если, например, $N\Delta\omega = 10^{12}$ с$^{-1}$, чему соответствует 5,3 см$^{-1}$, то $\Delta T = 2\pi\cdot 10^{-12}$ с. Именно такие числовые значения величин и имеют место в случае, приведенном на рис. 40.19. Теоретические оценки вселяют надежду на сокращение величины ΔT еще в 10–100 раз. Иными словами, можно,

по-видимому, создать волновой цуг, содержащий всего несколько колебаний с периодом $2\pi/\omega = 3 \cdot 10^{-15}$ с ($\lambda = 1$ мкм).

До обнаружения обсуждаемого явления (1966 г.) наиболее короткие световые импульсы, получающиеся нелазерными методами, формировались из непрерывного излучения с помощью электрооптических затворов, основанных на эффекте Керра. Наименьшая длительность импульсов составляла примерно 10^{-9} с, т.е. была на несколько порядков больше, чем у лазерных импульсов, описанных выше.

Утверждения о существовании сверхкоротких импульсов и о строгой синфазности многих типов колебаний представляются, согласно изложенным соображениям, физически эквивалентными: одно соответствует описанию явления на временно́м языке, другое — на спектральном. В связи с этим для обозначения режима генерации сверхкоротких импульсов используется термин *излучение лазера с синхронизованными типами колебаний.*

Электромагнитное поле, генерируемое лазером, зарождается из спонтанного излучения активной среды. Поэтому, хотя при возбуждении одного типа колебаний и формируется монохроматическое поле, его начальная фаза совершенно произвольна. Если возбуждается много типов колебаний, то их начальные фазы, как кажется на первый взгляд, не могут быть согласованными, так как они должны определяться различными спектральными компонентами случайного спонтанного излучения. Высказанная точка зрения предполагает, однако, независимость различных типов колебаний, т.е. основана на принципе суперпозиции, который несправедлив в области нелинейных явлений. В лазерах же нелинейные явления играют принципиальную роль (см. § 225), вследствие чего типы колебаний в большей или меньшей степени должны влиять друг на друга, и может осуществиться их синхронизация. Специальные меры, способствующие реализации режима генерации сверхкоротких импульсов и упомянутые в начале параграфа, предназначены для усиления нелинейного «взаимодействия» типов колебаний.

Кратко обсудим нелинейные явления, приводящие к возникновению сверхкоротких импульсов в лазерах с поглощающим элементом внутри резонатора. Пусть создана инверсная заселенность уровней в активном элементе лазера и происходит усиление спонтанного излучения. Ввиду случайного характера актов спонтанного испускания амплитуда поля хаотически изменяется во времени и от точки к точке[1]) (рис. 40.20 *а*). Амплитуда поля имеет вид набора случайных по величине и случайно расположенных «выбросов». На первом этапе развития генерации, когда мощность излучения еще невелика, фильтр ослабляет все «выбросы» в равной мере. С течением времени все большее число атомов возбуждается, и энергия поля в резонаторе увеличивается. Как было выяснено в § 224, по мере роста мощности излу-

[1]) Подобную картину случайного распределения поля мы моделировали в § 22, наблюдая свет, рассеянный на матовом стекле (см. рис. 4.23). Схематически рис. 40.20 *а* аналогичен изменению освещенности на рис. 4.23 вдоль какого-либо направления.

чения коэффициент поглощения фильтра и доля поглощенной в нем энергии уменьшается, а доля энергии, прошедшей фильтр, увеличивается, или, как говорят, фильтр *просветляется излучением.* Если среда фильтра достаточно малоинерционна (для фильтров специально подбираются такие среды), то сказанное относится к мгновенному значению потока, падающего на фильтр: чем больше мгновенное значение мощности, тем сильнее просветляется фильтр. В итоге самый сильный «выброс» будет ослабляться фильтром в меньшей степени, чем все остальные, и в каждом последующем цикле его «преимущественно малое» ослабление будет все более усугубляться. Процесс выделения наиболее мощного «выброса» иллюстрируется рис. 40.20 *а–в*, на котором изображено лишь относительное распределение амплитуды поля и совсем не нашло отражения огромное увеличение общей энергии.

В итоге описанных процессов поле внутри резонатора может приобрести вид одиночного импульса (рис. 40.20 *г*). Поле же вне резонатора будет представлять собой совокупность импульсов, возникающих в результате частичного прохождения «внутреннего» импульса через зеркало резонатора на протяжении следующих друг за другом циклов.

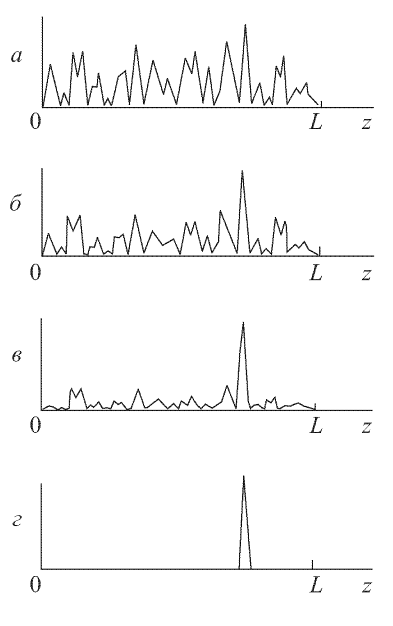


Рис. 40.20. Эволюция распределения амплитуды поля в лазере с просветляющим фильтром

Разобранный пример наглядно показывает решающую роль нелинейных явлений в образовании сверхкоротких импульсов. В проведенном рассмотрении использовался временно́й подход, а типы колебаний в явном виде не фигурировали. Легко видеть, однако, что наличие «самого сильного выброса» отражает не что иное, как случайное согласование фаз различных типов колебаний в месте его расположения, отнюдь не полное, но наиболее удачное в данной случайной ситуации. В последующих нелинейных процессах согласование фаз постепенно улучшается, и в конечном итоге устанавливаются полностью согласованные фазы. Поэтому и с помощью спектрального подхода мы пришли бы к полученному результату, но временно́й язык оказался более адекватным вопросу.

Мгновенная мощность излучения в режиме генерации сверхкоротких импульсов примерно в $T/\Delta T$ раз больше средней мощности и может достигать значений 10^{11}–10^{12} Вт. Поэтому сверхкороткие импульсы нашли широкое поле применения при исследовании самых

разнообразных явлений — многофотонной ионизации атомов и молекул, вынужденного рассеяния, мгновенного нагрева вещества до очень высоких температур и т.п. Рекордно короткая длительность импульса позволила использовать сверхкороткие импульсы для изучения очень быстрых процессов, например, распада возбужденных состояний молекул, происходящего за время 10^{-11}–10^{-12} с, времени существования эффекта Керра (см. § 152), инерционности нелинейного фотоэффекта (см. § 179) и т.д.

§ 231. Лазеры на красителях

Как было показано в § 228, спектральный интервал, в пределах которого могут располагаться квазимонохроматические компоненты излучения лазера, несколько меньше ширины линии, отвечающей переходу между уровнями с инверсной заселенностью, но пропорционален ей. В гелий-неоновом и рубиновом лазерах ширины линий составляют соответственно 0,03 см$^{-1}$ и 20 см$^{-1}$, а указанные спектральные интервалы — 0,01 см$^{-1}$ и 1 см$^{-1}$. Значительно бóльшие значения обсуждаемых параметров в оптических квантовых генераторах, активной средой которых служат растворы красителей. Химически красители представляют собой сравнительно сложные органические молекулы, и их спектр фотолюминесценции простирается на тысячи см$^{-1}$. В соответствии с этим и ширины участков спектра, в которых можно осуществить генерацию с использованием красителей, составляют сотни, а иногда и тысячи см$^{-1}$.

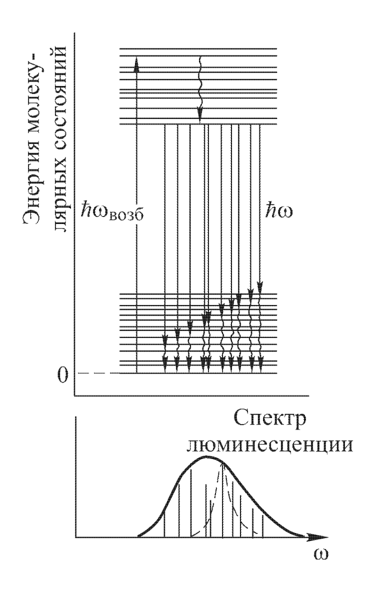


Рис. 40.21. Схема энергетических уровней сложной органической молекулы

На рис. 40.21 схематически изображены энергетические уровни сложной молекулы[1]. Верхняя группа уровней относится к одному из возбужденных состояний электронов молекулы, нижняя — к основному состоянию электронов. Каждая из указанных групп содержит уровни, отвечающие различным состояниям колебаний ядер молекулы. Вследствие большого числа колебательных степеней свободы структуры верхней и нижней групп уровней чрезвычайно сложны, однако для достижения наших целей нет необходимости в их конкретизации. Существенно лишь то обстоятельство, что спектр люминесценции состоит из большого чис-

[1]) Основные сведения о спектрах и об энергетических уровнях молекул изложены в главах XXXVIII и XXXIX.

ла линий, соответствующих переходам молекулы с уровней верхней группы на уровни нижней, причем отдельные линии не разрешаются и в своей совокупности образуют непрерывный спектр люминесценции. Схематически это показано на нижней части рис. 40.21, где вертикальные отрезки отвечают боровским частотам переходов между индивидуальными уровнями, штриховая кривая изображает контур отдельной спектральной линии, а сплошная кривая — суммарный контур полосы люминесценции.

Общую картину процессов, происходящих при оптическом возбуждении молекул красителя, можно представить следующим образом. В результате поглощения фотона $\hbar\omega_{\text{возб}}$ молекула из основного состояния переходит на один или несколько (в зависимости от ширины спектра возбуждающего света) колебательных уровней возбужденного электронного состояния. На рис. 40.21 этот процесс обозначен левой стрелкой, направленной вверх. Вследствие внутримолекулярных процессов и взаимодействия с растворителем молекула безызлучательно переходит на самые нижние уровни верхней группы, причем этот переход (верхняя волнистая стрелка) происходит за чрезвычайно короткие интервалы времени (10^{-11}–10^{-12} с). Последующее спонтанное или вынужденное испускание фотонов $\hbar\omega$ сопровождается переходами с нижних колебательных уровней верхней группы на все колебательные уровни основного электронного состояния (прямые стрелки, направленные вниз). Как отмечалось ранее, совокупность перекрывающихся линий, связанных с этими электронно-колебательными переходами, и образует широкий сплошной спектр люминесценции и усиления. По тем же причинам, которые указывались по отношению к верхней группе уровней, в основном электронном состоянии происходит быстрое затухание (за времена 10^{-11}–10^{-12} с) возбужденных колебательных состояний, вследствие чего их заселенность оказывается малой (нижние волнистые стрелки). Таким образом, возникает инверсная заселенность уровней, соединенных прямыми стрелками, направленными вниз.

Изложенная схема процессов сильно упрощена, и существует целый ряд факторов, в той или иной мере затрудняющих развитие генерации. К числу мешающих факторов относится, например, фотохимическое разложение молекул красителя при высоких значениях освещенности, нагревание раствора, приводящее к безызлучательному затуханию возбужденного электронного состояния, и многие другие. Однако все эти препятствия устраняются специальными методами[1]), и генерацию удается осуществить с большим числом разных красителей (их насчитывается сейчас около 100) в импульсном и непрерывном режимах, в широкой области спектра (от 350,0 до 1000,0 нм) и с применением в качестве источников возбуждающего излучения ксеноновых газоразрядных ламп и лазеров.

На рис. 40.22 приведена одна из оптических схем лазера на красителе, функционирующего в непрерывном режиме. Пучок возбуждаю-

---

[1]) Применяется, например, прокачка раствора через кювету со скоростью, достигающей десятков м/с.

щего света (сплошные линии) фокусируется зеркалом M_1 на кювету с раствором красителя K. Источником возбуждающего света служит аргоновый лазер непрерывного действия (на рисунке не показан). Частично прошедший возбуждающий свет возвращается в кювету

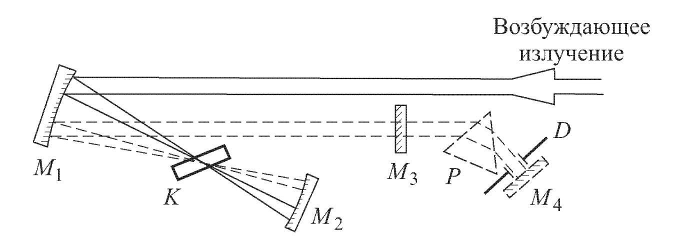


Рис. 40.22. Оптическая схема лазера на красителе

зеркалом M_2. Зеркала M_1, M_2, M_3 образуют оптический резонатор лазера; штриховые линии изображают генерируемый пучок; кювету K следует ориентировать под углом Брюстера к оси резонатора для уменьшения потерь, связанных с отражением света от ее границ.

Спектр излучения лазера, в котором использовался раствор красителя — родамина 6-G, приведен на рис. 40.23 *а*. Ширина спектра в данном случае составляла около двух нанометров. Применение других красителей и увеличение мощности возбуждения позволяет еще больше увеличить ширину спектра лазерного излучения. Структура

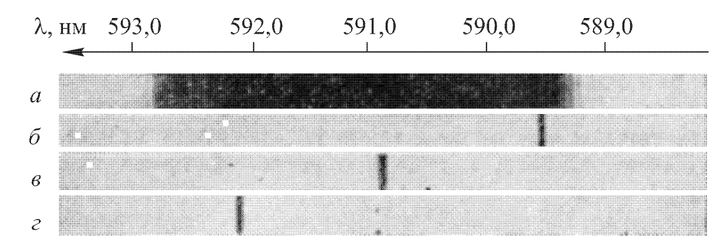


Рис. 40.23. Спектр излучения лазера на красителе: *а* — без призмы P; *б*, *в*, *г* — с призмой P при различных ее ориентациях

спектра, обусловленная дискретностью собственных частот резонатора, на рис. 40.23 *а* не разрешается. Светлые полосы, которые видны в спектре, вызваны поглощением света парами воды, всегда присутствующими в воздухе.

Если вместо зеркала M_3 установить призму P (аналогичную тем, которые применяются в спектральных приборах) и расположить зеркало M_4 так, как показано штриховой линией на рис. 40.22, то спектр излучения лазера резко сужается (рис. 40.23 *б*–*г*). Причина его сужения кроется, очевидно, в зависимости отклонения пучка призмой от длины волны. При заданной ориентации зеркала M_4 и при отражении

света от определенной части его поверхности, ограниченной диафрагмой D, возврат в активную часть объема кюветы будет обеспечен лишь для света с какой-то определенной длиной волны.

Для излучения с другими длинами волн потери будут больше, так как для них условие цикличности выполняется, очевидно, при отражении от участков зеркала, частично или полностью закрытых диафрагмой D. Если теперь вращать призму вокруг оси, перпендикулярной к плоскости чертежа, то указанные благоприятные условия будут реализовываться для различных длин волн. Таким способом можно в широком интервале плавно изменять частоту лазерного излучения. Фотографии рис. 40.23 *б–г* и получены при трех различных ориентациях призмы P.

Оптические квантовые генераторы с плавной перестройкой частоты служат основой для спектральных приборов с исключительно высокой разрешающей силой. Пусть, например, требуется исследовать спектр поглощения какого-либо вещества. Измерив величину лазерного потока, падающего на изучаемый объект и прошедшего через него, можно вычислить значение коэффициента поглощения. Перестраивая частоту лазерного излучения, можно, следовательно, определить коэффициент поглощения как функцию длины волны. Разрешающая способность этого метода совпадает, очевидно, с шириной линии лазерного излучения, которую можно сделать очень малой. Ширина линии, равная, например, 10^{-3} см$^{-1}$, обеспечивает такую же разрешающую способность, как дифракционная решетка с рабочей поверхностью длиной 5 м, а изготовление таких больших решеток представляет почти неразрешимую задачу.

В данной главе мы изложили физические принципы, положенные в основу устройства оптических квантовых генераторов, разобрали некоторые их общие свойства и описали три типа лазеров — рубиновый, гелий-неоновый и лазер на красителях. Помимо указанных, существует большое число других лазеров, отличающихся по тем или иным свойствам, а именно способами возбуждения активной среды, спектральной областью, в которой находится излучение, мощностью, коэффициентом полезного действия, временны́ми характеристиками и т.д. и т.п.

В зависимости от задачи, решаемой с помощью лазеров, выбирают тот или иной тип лазера, с оптимальным набором характеристик.

Глава XLI

НЕЛИНЕЙНАЯ ОПТИКА

Выше уже отмечались исследования С.И. Вавилова зависимости коэффициента поглощения от интенсивности поглощаемого света (см. главы XXVIII, XL). В книге «Микроструктура света», обобщая свои наблюдения, относящиеся к 20 гг., и последующие опыты, Вавилов писал: «Нелинейность в поглощающей среде должна наблюдаться не только в отношении абсорбции. Последняя связана с дисперсией,

поэтому скорость распространения света в среде, вообще говоря, также должна зависеть от световой мощности. По той же причине в общем случае должна наблюдаться зависимость от световой мощности, т.е. нарушение принципа суперпозиции, и в других оптических свойствах среды — в двойном лучепреломлении, дихроизме, вращательной способности и т.д.». Последующее развитие нелинейной оптики, обусловленное экспериментальным исследованием распространения лазерного излучения, не только подтвердило общие соображения Вавилова о многообразии возможных нелинейных явлений, но и привело к обнаружению всех перечисленных им конкретных эффектов. Поэтому Вавилов по праву признан основоположником нелинейной оптики.

Напомним, что причину нелинейных явлений Вавилов усматривал в изменении числа молекул или атомов, способных поглощать свет, т.е. изменений, обусловленных переходом атомов и молекул в возбужденное состояние и конечной длительностью пребывания в этих состояниях. Помимо указанной причины, к нелинейным явлениям приводит и ряд других причин; часть из них будет рассмотрена ниже. В соответствии с этим и совокупность нелинейных явлений, обнаруженных при исследовании распространения лазерного излучения, оказалась еще более многообразной. Некоторые из них — вынужденное рассеяние Мандельштама–Бриллюэна, многофотонное поглощение и ионизация (см. § 157), нелинейный фотоэффект (см. § 179) — описаны выше. В данной главе рассмотрены явления, сводящиеся, в общих чертах, к изменению направления распространения и спектрального состава излучения.

§ 232. Самофокусировка

Одним из основных законов оптики является закон прямолинейного распространения света в однородной среде, выполняющийся в тех случаях, когда по тем или иным причинам дифракционные эффекты несущественны. В нелинейной оптике указанный закон, вообще говоря, имеет дополнительные ограничения применимости. Пусть показатель преломления зависит от интенсивности света при достаточно больших ее значениях. Если освещенность в поперечном сечении пучка неравномерна, то и показатель преломления не будет постоянной величиной, что эквивалентно неоднородности среды. В неоднородной же среде лучи не прямолинейны и отклоняются в ту сторону, где показатель преломления больше.

На рис. 41.1 приведена схема опыта, в котором наблюдается указанное явление. Параллельный пучок света падает на слой K вещества, показатель преломления которого зависит от освещенности. Штриховая дуга слева от K изображает распределение освещенности в поперечном сечении FF пучка. Справа от слоя, на экране EE, регистрируется (визуально или фотографически) изменение размеров светового пятна. Кружки, показанные на нижней части рис. 41.1, соответствуют сечениям пучка, получающимся при фиксированной мощности света и различных положениях экрана EE. Если экран неподвижен и изменяется мощность пучка, то размер поперечного сечения последнего также изменяется. Таким образом, параллельный

пучок света превращается в сходящийся. Описанное явление получило название *самофокусировки.*

В опыте, иллюстрируемом рис. 41.1, показатель преломления увеличивается с ростом освещенности: лучи отклоняются к оси пучка, где освещенность больше. Если бы показатель преломления уменьшался с увеличением освещенности (существуют и такие среды), то лучи отклонялись бы от оси и происходила бы *саморасфокусировка* пучка.

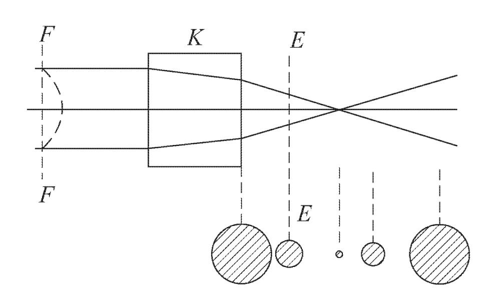


Рис. 41.1. Самофокусировка интенсивного пучка в нелинейной среде

Опыт и теория приводят к выводу, что подобного рода явления можно объяснить, если принять зависимость показателя преломления n от амплитуды поля A в следующей форме:

$$n = n_0 + n_2 A^2. \qquad (232.1)$$

Здесь n_0 — «обычный» показатель преломления, характеризующий оптические свойства среды при малых значениях интенсивности света. Член $n_2 A^2$ описывает изменение n под влиянием мощного излучения. Существуют несколько причин такого изменения n; они будут рассмотрены в § 235, а пока достаточно воспринимать величину n_2 как характеристику нелинейно-оптических свойств среды.

Оценим толщину слоя вещества $l_{сф}$, необходимую для пересечения крайних лучей с осью пучка внутри нелинейной среды. Благодаря нелинейной добавке к показателю преломления $n_2 A^2$ появляется разность фаз между колебаниями на оси пучка и на его краях. Амплитуду поля на оси пучка обозначим через A_0, а на краях будем считать ее нулевой. На искомой длине (толщине) $l_{сф}$ указанная разность фаз приобретет значение $(\omega/c) n_2 A_0^2 l_{сф}$. Искривление волнового фронта, необходимое для фокусировки пучка в нелинейной среде на длине $l_{сф}$, дает стрелку прогиба, равную $a^2/2l_{сф}$, где a — начальный радиус пучка; этой стрелке отвечает разность фаз $(\omega/c) n_0 a^2/2l_{сф}$, которая должна обеспечиваться разностью фаз из-за нелинейности среды:

$$\frac{\omega}{c} \frac{n_0 a^2}{2l_{сф}} = \frac{\omega}{c} n_2 A_0^2 l_{сф}.$$

Следовательно, искомая толщина слоя дается соотношением

$$l_{сф} = a\sqrt{\frac{n_0}{2\Delta n}} = a\sqrt{\frac{n_0}{2n_2 A_0^2}}; \quad \Delta n = n_2 A_0^2. \qquad (232.2)$$

Величина $l_{сф}$, определяемая этим соотношением, носит название *длины самофокусировки.* Она пропорциональна начальному радиусу пучка и обратно пропорциональна амплитуде поля на его оси. Поскольку освещенность пропорциональна A^2, то можно сказать, что $l_{сф}$ обратно пропорциональна квадратному корню из максимальной освещенности

в сечении пучка. Кроме того, $l_{сф}$ уменьшается с ростом коэффициента нелинейности n_2. Все перечисленные закономерности физически вполне прозрачны: чем меньше a^2 и чем больше $\Delta n = n_2 A_0^2$, тем резче изменяется показатель преломления в пределах сечения пучка и тем сильнее отклонение от прямолинейного распространения света.

Явление самофокусировки наблюдалось для многих веществ — газов, жидкостей и твердых тел. Экспериментальные исследования подтверждают прямую пропорциональность между длиной самофокусировки $l_{сф}$ и $\sqrt{a^2/A_0^2}$.

Если задаться значениями $l_{сф} = 10$ см, $a = 0{,}5$ мм, то, согласно соотношению (232.2), получим

$$\frac{\Delta n}{n_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{l_{сф}}\right)^2 = 1{,}25 \cdot 10^{-5},$$

т.е. относительные изменения показателя преломления могут быть сравнительно невелики. На опыте обычно непосредственно измеряется полный поток (мощность) излучения. В случае параболического изменения освещенности в поперечном сечении пучка из (232.2) нетрудно получить следующее соотношение для необходимой мощности излучения (см. упражнение 254):

$$P = \frac{n_0^2 c a^4}{32 n_2 l_{сф}^2}\,. \qquad (232.3)$$

Для сероуглерода CS_2 ($n_0 = 1{,}62$), например, обладающего сравнительно большим значением $n_2 = 2 \cdot 10^{-11}$ СГСЭ, получаем $P = 0{,}77 \cdot 10^6$ Вт при $a = 0{,}5$ мм, $l_{сф} = 10$ см. Таким образом, для опытов по самофокусировке требуются сравнительно высокие мощности пучков, которые, однако, вполне доступны при использовании лазеров. Средняя освещенность в рассмотренном числовом примере составляет $P/\pi a^2 = 10^8$ Вт/см^2. С помощью закона Стефана–Больцмана легко подсчитать, что для достижения такой же освещенности при использовании излучения абсолютно черного тела необходима температура $T = 2{,}7 \cdot 10^5\, \Omega^{-1/4}$ К, где Ω — телесный угол пучка. Из произведенного сопоставления понятно, почему явление самофокусировки было открыто лишь после создания мощных лазеров (Н.Ф. Пилипецкий, А.Р. Рустамов, 1965 г.; теоретическое предсказание Г.А. Аскарьян, 1962 г.).

Согласно сказанному выше самофокусировке благоприятствуют малые радиусы поперечного сечения пучков. Опыт показывает, однако, что существует некоторое оптимальное значение $a = a_0$, и дальнейшее уменьшение a требует не уменьшения, а увеличения мощности P. Причина состоит в том, что при достаточно малых значениях a вступают в игру дифракционные явления, которые не принимались во внимание в предыдущих рассуждениях. Дифракция, очевидно, расширяет пучок и тем самым препятствует его самофокусировке, причем роль дифракции тем больше, чем меньше радиус пучка a.

Оптимальное значение радиуса пучка можно оценить на основании следующих соображений. Нелинейность среды (если не прини-

мать во внимание дифракцию) уменьшает радиус пучка от a до 0 на протяжении длины $l_{сф}$. Вместе с тем, в отсутствие самофокусировки дифракционное расширение пучка на длине $l_{сф}$ примерно равно радиусу первой зоны Френеля $\sqrt{l_{сф}\lambda/n_0}$. Поэтому, если

$$a = \sqrt{\frac{l_{сф}\lambda}{n_0}} = a_0,$$

то самофокусировка компенсирует дифракционное уширение и пучок будет оставаться параллельным. Подставив полученное значение $a = a_0$ в выражение для P, получим величину пороговой мощности пучка

$$P_{порог} = \frac{\lambda^2 c}{32 n_2}\,. \tag{232.4}$$

Если $P > P_{порог}$, то самофокусировка возможна, хотя и на бóльшей длине, чем говорилось выше. Если же $P < P_{порог}$, пучок будет расширяться, но не столь быстро, как в линейной среде. Следует обратить внимание на то, что $P_{порог}$ не зависит от a, уменьшается в коротковолновой области спектра, где роль дифракции меньше, и падает по мере возрастания нелинейности среды. Все отмеченные закономерности подтверждаются опытом. В случае сероуглерода и $\lambda = 694{,}3$ нм (рубиновый лазер) из соотношения (232.4) находим $P_{порог} = 2{,}3 \cdot 10^4$ Вт, что соответствует наблюдениям.

Выше предполагалось симметричное распределение освещенности в поперечном сечении пучка и плавное ее уменьшение от оси к периферии, благодаря чему нелинейность среды проявлялась в виде регулярного сужения пучка. Разумеется, при иных законах изменения освещенности возникнут эффекты, которые внешне могут ничем не напоминать самофокусировку. Введем, например, в пучок поглощающий клин, пропускание которого линейно зависит от координаты (рис. 41.2). В этом случае освещенность в пучке, прошедшем клин, и показатель преломления среды в кювете K будут линейно изменяться по поперечному сечению. Неоднородность среды, создаваемая таким пучком, по своему действию эквивалентна отклоняющей призме. Поэтому нелинейность среды проявится в виде *самоискривления*, или *самоотклонения* пучка, а поперечное сечение и распределение освещенности на нем сохранятся неизменными при распространении пучка в нелинейной среде (см. упражнение 255).

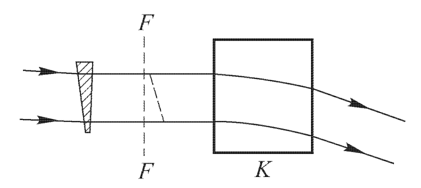


Рис. 41.2. Самоотклонение пучка с постоянным градиентом интенсивности

Если освещенность в сечении пучка изменяется немонотонно, то достаточно мощный пучок, как показывают опыты, «расслаивается» на более узкие пучки, оси которых проходят через точки с повышенными значениями освещенности. Это явление часто наблюдается при распространении лазерного излучения, не отличающегося высокой степенью пространственной когерентности.

§ 233. Самодифракция

Зависимость показателя преломления от освещенности обусловливает своеобразные и эффектные явления в условиях, типичных для двухлучевых интерференционных опытов. Пусть в толстой плоскопараллельной пластинке (рис. 41.3) лазерный пучок разделяется на два пучка, которые сводятся затем бипризмой Френеля в нелинейной

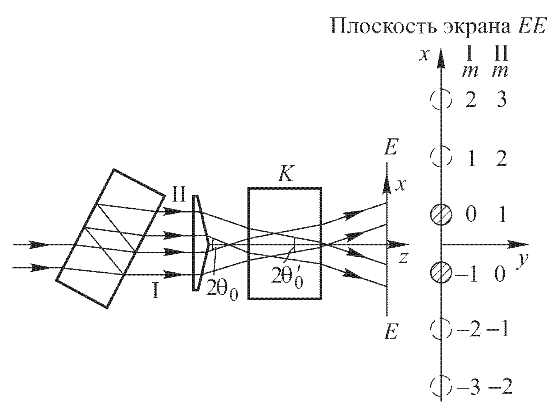


Рис. 41.3. Самодифракция света в схеме с бипризмой Френеля

среде K, например, в кювете с сероуглеродом. В области пересечения пучков можно наблюдать интерференционные полосы, однако непосредственно они нас не будут сейчас интересовать. Будем следить за освещенностью экрана EE, установленного на таком расстоянии, что на нем пучки уже не перекрываются. Если интенсивность пучков невелика, то на экране EE видны два пятна, показанные на правой части рис. 41.3 в виде заштрихованных кружков. При достаточно больших значениях интенсивности, на экране появляются два новых пятна, смещенные в направлении, перпендикулярном к ребру бипризмы. На рис. 41.3 им отвечают штриховые кружки, ближайшие к заштрихованным. Яркость новых пятен растет с увеличением интенсивности лазерного пучка, а при еще большей его мощности появляются еще более удаленные пятна. Замечательно, что расстояния между любыми соседними пятнами практически такие же, как между исходными. Если установить другую бипризму, с бо́льшим (или меньшим) преломляющим углом, то эквидистантность пятен сохраняется, а расстояние между соседними пятнами пропорционально увеличивается (или уменьшается).

Введем на пути одного из пучков полуволновую пластинку, в результате чего пучки станут поляризованы взаимно ортогонально. В этом случае никаких дополнительных пятен не наблюдается. Отрицательный результат получается и при смещении кюветы с нелинейной средой из области перекрытия пучков.

Описанная система пятен напоминает совокупность главных дифракционных максимумов, возникающих при прохождении исходных

пучков через дифракционную решетку. Такой решеткой могла бы, например, служить ультраакустическая волна, представляющая собой периодическую последовательность областей уплотнения и разрежения в жидкости и создающая тем самым периодическое изменение показателя преломления, т.е. объемную фазовую решетку. Дифракционные явления, протекающие в таких условиях, описаны в § 56. В нашем случае фазовая решетка создается самим светом.

Действительно, в области перекрытия пучков квадрат амплитуды поля можно записать следующим образом (см. § 13):

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos\left[\frac{4\pi}{\lambda}\,n_0x\sin\theta_0'\right],$$

где a_1, a_2 — амплитуды поля интерферирующих пучков, $2\theta_0'$ — угол между пучками внутри кюветы, x — координата, перпендикулярная ребру бипризмы. Благодаря зависимости показателя преломления от освещенности в кювете создается периодическая оптическая неоднородность, эквивалентная объемной фазовой решетке,

$$n = n_0 + n_2(a_1^2 + a_2^2) + \Delta n(x),$$

где введено обозначение

$$\Delta n(x) = 2n_2a_1a_2\cos\left[\left(\frac{4\pi}{\lambda}\,n_0\sin\theta_0'\right)x\right]. \qquad (233.1)$$

Период решетки равен

$$d = \lambda\frac{1}{2n_0\sin\theta_0'}. \qquad (233.2)$$

Далее можно рассуждать так: каждый из пучков дифрагирует на указанной решетке, в результате чего возникают новые пучки, и направления их распространения совпадают с направлениями на главные максимумы. Простые вычисления, в ходе которых следует применить формулы из § 46 и принять во внимание преломление на границе кюветы K, приводят к соотношениям для углов между осью z и направлениями распространения пучков, вышедших из кюветы (см. упражнение 256):

$$\sin\theta_{\mathrm{I}m} = (2m+1)\sin\theta_0, \quad \sin\theta_{\mathrm{II}m} = (2m-1)\sin\theta_0, \quad m = 0, \pm1, \pm2. \qquad (233.3)$$

Здесь углы $\theta_{\mathrm{I}m}$, $\theta_{\mathrm{II}m}$ соответствуют пучкам, дочерним по отношению к исходным пучкам I и II, $2\theta_0$ — угол между исходными пучками вне кюветы. Значение $m = 0$ отвечает исходным пучкам ($\theta_{\mathrm{I}0} = \theta_0$, $\theta_{\mathrm{II}0} = -\theta_0$). Из соотношений (233.3) следует, что угол $\theta_{\mathrm{I}m}$ совпадает с углом $\theta_{\mathrm{I}0m+1}$, т.е. дифракционные картины, получающиеся из-за дифракции двух начальных пучков I и II, сдвинуты друг относительно друга на расстояние, равное расстоянию между соседними максимумами, и перекрываются. Колонки цифр на рис. 41.3 дают значения порядков для пучков I и II. Если угол θ_0 достаточно мал, то синусы можно заменить их аргументами, и упомянутая выше эквидистантность пятен получает объяснение.

В случае ортогональной поляризации пучков интерференция между ними и периодическая неоднородность среды отсутствуют, и дополнительные пучки не могут образовываться, что и согласуется с опытом. Столь же понятен и отрицательный результат при смещении кюветы из области, в которой существуют интерференционные полосы.

Обсужденное явление получило название *самодифракции*, поскольку интерферирующие пучки сами создают дифракционную решетку в нелинейной среде.

Интересное и важное видоизменение самодифракции имеет место в оптических квантовых генераторах. Как было выяснено в § 228, 229, электромагнитное поле внутри резонатора имеет вид бегущих навстречу друг другу волн. Если коэффициенты отражения зеркал близки к 1, то бегущие волны обладают почти одинаковыми амплитудами и образуют, следовательно, стоячую волну. Квадрат ее амплитуды описывается функцией

$$A^2 = 4a^2 \cos^2 k_q z = 2a^2[1 + \cos 2k_q z]; \quad k_q = \frac{\pi}{L}\, q, \tag{233.4}$$

где q — целое число. Благодаря нелинейности среда становится неоднородной, а именно,

$$n = n_0 + 2n_2 a^2 + 2n_2 a^2 \cos 2k_q z, \tag{233.5}$$

причем период неоднородности равен половине длины волны $\lambda/2$. Нижний и верхний графики рис. 41.4 изображают функции (233.4) и (233.5) соответственно. Коэффициент нелинейности n_2 принят отрицательным, поскольку показатель преломления зависит от мощности вследствие эффекта насыщения (см. § 224). Воспользуемся теперь аналогией с отражением от решетки при скользящем падении. Рассмотрим одну из бегущих волн, образующих стоячую, например, волну, бегущую вправо. Каждый из периодов неоднородности аналогичен периоду решетки; поскольку период равен половине длины волны, то при дифракции бегущей волны появятся лишь главные максимумы нулевого и первого порядков, отвечающие прямо прошедшей волне и дифрагировавшей волне с противоположным направлением распространения. Последняя складывается с другой компонентой, образующей стоячую волну. Полученные выводы формально следуют из соотношений (233.3), если интерферирующие пучки полагать встречными, т.е. $2\theta_0 = \pi$; тогда физический смысл имеют лишь $m = 0$ и $+1$, -1 для $\theta_{\mathrm{II}m}$, $\theta_{\mathrm{I}m}$ соответственно.

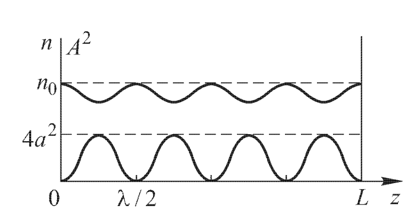


Рис. 41.4. Изменение квадрата амплитуды поля и показателя преломления вдоль оси лазера

Таким образом, в данном случае интерференции двух встречных волн нелинейность среды не приводит к образованию новых волн, но лишь к перераспределению их амплитуд.

Влияние периодической неоднородности можно уяснить, не прибегая к аналогии с отражением от дифракционной решетки. Каждый из периодов неоднородности можно уподобить тонкому слою, на границах которого происходит отражение света, аналогичное френелевскому отражению от плоскопараллельной пластинки; волны, отраженные от двух соседних слоев, сдвинуты по фазе относительно друг друга на 2π, так как толщина слоя равна $\lambda/2$. Поэтому все волны, отраженные от всех периодов неоднородности, оказываются синфазными и складываются по амплитуде. С изложенной точки зрения обсуждаемое отражение естественно назвать *самоотражением*.

Подход, основанный на аналогии с френелевским отражением, поучителен вот в каком отношении. Напомним, что отражение от границы раздела двух сред возникает вследствие различия как показателей преломления, так и коэффициентов поглощения (усиления). В частности, отражение от металлов объясняется, главным образом, второй причиной. Из сказанного легко сделать вывод, что самоотражение в активной среде лазера может обусловливаться модуляцией и показателя преломления, и коэффициента усиления. Как показывают более детальные исследования вопроса, самоотражение играет существенную роль в оптических квантовых генераторах.

Отражение света, происходящее из-за нелинейности среды и пространственного периодического изменения амплитуды поля, позволяет расширить наши представления о возможных способах реализации положительной обратной связи в квантовых генераторах. До сих пор мы полагали, что положительная обратная связь между полем излучения и активной средой, необходимая для превращения усиливающей системы в автоколебательную (см. § 225), осуществляется с помощью зеркал, отражающих волны обратно в резонатор. Рассмотренное выше нелинейное отражение света служит физической основой для иного способа реализации положительной обратной связи, применяющегося в некоторых лазерах. Пусть кювета K представляет собой активную среду (см. рис. 41.3). В направлении оси x имеет место периодическая неоднородность среды за счет нелинейных эффектов. Интерферирующими пучками I и II, создающими оптическую неоднородность, могут быть пучки возбуждающего излучения. Следовательно, в данном случае отражение будет происходить в результате модуляции коэффициента усиления активной среды. Спонтанное излучение среды, испущенное в направлении оси x, будет отражаться от неоднородности и возвращаться в активную среду, что и соответствует обратной связи. Для некоторых частот обратная связь будет положительной, и при выполнении пороговых условий возбудится генерация излучения в направлении оси x.

§ 234. Распространение группы волн в нелинейной среде

В отличие от строго монохроматической волны, распространение светового импульса (или группы волн) характеризуется двумя скоростями — фазовой и групповой. Световой импульс, согласно теореме Фурье, можно представить в виде суперпозиции монохроматических составляющих с несколько различающимися частотами. Фазовая ско-

рость описывает распространение фазы одной из этих составляющих, отвечающей средней частоте. Групповая же скорость определяет перемещение какой-либо характерной точки профиля волны, например, точки с максимальным значением амплитуды. Общие представления о фазовой и групповой скорости были обсуждены в § 125. Сейчас мы разберем вопрос о распространении группы волн в непоглощающей среде, принимая во внимание нелинейные эффекты.

Поле светового импульса можно записать в следующей форме:

$$E(z,t) = A(z-ut)\cos\left[\frac{\omega_0}{v}\,(vt-z)\right]. \tag{234.1}$$

Волновой фронт, отвечающий какому-либо значению фазы φ, определяется условием

$$\frac{\omega_0}{v}\,(vt-z) = \varphi, \tag{234.2}$$

т.е. он перемещается в пространстве со скоростью v. Аналогичным образом можно рассуждать относительно амплитуды $A(z-ut)$. Зафиксируем какое-нибудь значение ее аргумента $z-ut$, например 0; амплитуда будет иметь при этом вполне определенное значение. Следовательно, соотношение

$$z = ut \tag{234.3}$$

описывает перемещение в пространстве выбранной нами части профиля импульса. Нетрудно сообразить, что запись (234.1) означает смещение импульса с сохранением формы его профиля, как показано на рис. 41.5 для двух моментов времени. Величина u, называемая

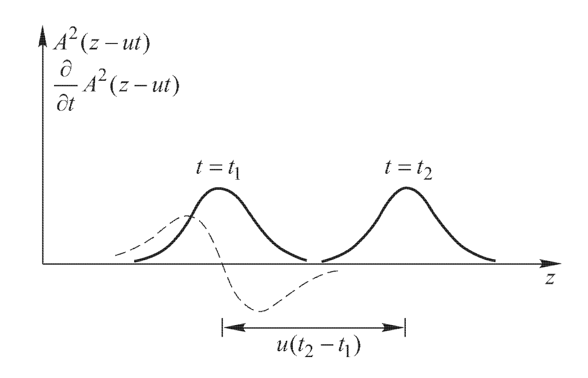


Рис. 41.5. Распространение группы волн

групповой скоростью, связана с фазовой скоростью формулой Рэлея (см. (125.2), (125.3))

$$u = v - \lambda\frac{dv}{d\lambda} = \frac{v}{1+\dfrac{\omega}{n}\,\dfrac{dn}{d\omega}}\,; \quad \lambda = \frac{2\pi c}{\omega n(\omega)}\,. \tag{234.4}$$

Ранее неоднократно подчеркивалось, что изменение амплитуды импульса со временем в какой-либо точке пространства с необходи-

мостью означает конечность ширины его спектра: если импульс направить в спектральный аппарат с подходящей разрешающей способностью, то на спектрограмме мы обнаружим излучение, сконцентрированное в некотором интервале частот $\Delta\omega$ около средней частоты ω_0, входящей в аргумент косинуса в выражении (234.1). Величина интервала частот (так называемая спектральная ширина импульса) связана с длительностью импульса T соотношением (см. § 21)

$$\Delta\omega T \gtrsim 2\pi. \tag{234.5}$$

Из вывода, проделанного в § 125, следует, что представление о группе волн или о световом импульсе, профиль которого не изменяется со временем, имеет физический смысл лишь при выполнении условия $\Delta\omega \ll \omega_0$. Этому неравенству с помощью соотношения (234.5) можно придать вид $T \gg 2\pi/\omega_0$. Другими словами, амплитуда $A(z-ut)$ должна изменяться значительно медленнее, чем $\cos\omega_0(t - z/v)$.

Согласно принципу суперпозиции, выполняющемуся при малых значениях амплитуды поля, спектр группы волн не может изменяться при ее распространении в среде. Действительно, группу волн можно представить в виде суперпозиции монохроматических слагаемых, амплитуды которых остаются неизменными во времени и в пространстве.

Выводы о неизменности профиля импульса и его спектра нарушаются, если мощность излучения достаточно велика. В самом деле, напомним записанную выше зависимость показателя преломления среды от амплитуды поля (см. (232.1)):

$$n = n_0 + n_2 A^2(z - ut). \tag{234.6}$$

Таким образом, в той части среды, где находится мощный импульс, показатель преломления оказывается зависящим от времени. Вместе с тем на примерах рассеяния света, дифракции на ультраакустической волне, отражения от движущегося зеркала и т.п. мы видели, что изменение оптических свойств во времени обязательно приводит к изменению спектрального состава излучения, распространяющегося в такой *нестационарной* среде. В случае рассеяния света была существенна нестационарность, обусловленная поступательным движением молекул или внутримолекулярными колебаниями, и в результате спектр рассеянного света отличался от спектра излучения, входящего в среду (дублет Мандельштама–Бриллюэна, комбинационное рассеяние света, см. § 160, 162). Разумеется, конкретный вид модификации спектра определяется законом модуляции свойств среды, но само изменение спектра вызвано только ее нестационарностью.

Главные особенности спектра импульса, прошедшего нелинейную среду, можно выяснить, анализируя его фазу

$$\begin{gathered}\varphi(t,z) = \omega_0 t - \frac{\omega_0}{c}\, zn = \omega_0\left(t - \frac{z}{c}\, n_0\right) - \Delta\varphi(t,z),\\ \Delta\varphi(t,z) = \frac{\omega_0}{c}\, zn_2 A^2(z - u_0 t).\end{gathered} \tag{234.7}$$

Предполагая $n_2 A^2 \ll 1$ (см. § 232), в аргументе амплитуды можно принять для групповой скорости ее значение u_0 при слабых полях. Согласно (234.7) зависимость фазы от времени обусловлена не только

членом $\omega_0 t$, но и квадратом амплитуды поля. Как и в других вопросах, связанных с анализом колебаний, добавка $\Delta\varphi$ к фазе будет существенна, если на длине l в направлении распространения в среде она достигнет или превысит величину порядка 2π, т.е. если

$$l \gtrsim l_{\text{фаз}} \equiv \frac{\lambda}{n_2 A_0^2}\,, \qquad (234.8)$$

где A_0 — максимальное значение амплитуды и, по аналогии с длиной самофокусировки, введено обозначение $l_{\text{фаз}}$ для длины, на которой нелинейная часть фазы становится равной 2π. Если, например, $\Delta n = n_2 A_0^2 = 10^{-5}$, то при $\lambda = 0{,}7 \cdot 10^{-4}$ см (рубиновый лазер) $l_{\text{фаз}} = 7$ см. В случае сероуглерода ($n_2 = 2 \cdot 10^{-11}$ СГСЭ) указанные значения достигаются при освещенностях 10^8 Вт/см^2.

Величина

$$\frac{\partial\varphi(t,z)}{\partial t} = \omega_0 - \frac{\omega_0}{c}\, z n_2 \,\frac{\partial}{\partial t}\,[A^2(z - u_0 t)] \equiv \omega(t) \qquad (234.9)$$

имеет смысл мгновенного значения средней частоты импульса. Если с помощью спектрального прибора регистрировать спектр импульса, прошедшего нелинейную среду, то его положение на спектрограмме будет изменяться во времени на величину, равную второму члену в соотношении (234.9). Пусть $A^2(z - u_0 t)$ — симметричная функция относительно точки, где она принимает максимальное значение; тогда ее производная будет антисимметричной (на рис. 41.5 производная $\partial A^2/\partial t$ изображена штриховой кривой), и спектр испытывает уширение в коротко- и длинноволновую стороны в равной мере. В противном случае спектр импульса приобретет несимметричный вид.

Для оценки по порядку величины числового значения нелинейного уширения спектра $\Delta\omega_{\text{нл}}$ можно заменить производную $\partial\varphi/\partial t$ отношением $\Delta\varphi$ к длительности импульса T:

$$\Delta\omega_{\text{нл}} \approx \frac{\Delta\varphi}{T} \approx \Delta\omega\,\frac{\Delta\varphi}{2\pi} = 2\pi\,\frac{l}{\lambda}\,\frac{n_2 A_0^2}{T}\,, \qquad (234.10)$$

причем мы воспользовались соотношением (234.5) и ввели ширину спектра $\Delta\omega$ импульса до его входа в нелинейную среду. В соответствии с (234.10) нелинейное уширение $\Delta\omega_{\text{нл}}$ значительно превосходит исходную ширину $\Delta\omega$, если $\Delta\varphi \gg 2\pi$.

До сих пор не принималась во внимание ограниченность поперечных размеров реальных пучков, и тем самым предполагалось, что на интересующих нас толщинах среды $l > l_{\text{фаз}}$ ни самофокусировка, ни дифракция еще не проявляются. Если самофокусировка и дифракция точно компенсируют друг друга, то поперечное распределение амплитуды импульса не изменяется по мере его распространения в среде, т.е. собственно к этому случаю и относятся сделанные выше выводы. Если значение мощности превышает пороговое, даваемое соотношением (232.4), то поперечное сечение пучка уменьшается благодаря самофокусировке, и уширение спектра будет протекать более сложным образом. Качественно ясно, что увеличение амплитуды поля, сопровождающее самофокусировку, вызовет еще большее уширение спектра. Следует иметь в виду, однако, что при огромной концентрации

энергии, имеющей место в случае сильно развитой самофокусировки, эффективно протекает и ряд других нелинейных процессов — вынужденное рассеяние Мандельштама–Бриллюэна, вынужденное комбинационное рассеяние и др.

§ 235. Основы теории нелинейной дисперсии

Анализируя самофокусировку, самодифракцию, уширение спектра импульса, мы пользовались выражением для показателя преломления

$$n = n_0 + n_2 A^2, \tag{235.1}$$

не конкретизируя микроскопических причин его зависимости от амплитуды световых колебаний, т.е. рассматривая коэффициент нелинейности n_2 в качестве феноменологической характеристики среды. Такой подход вполне правомерен и аналогичен описанию среды в линейной оптике показателем преломления n_0. Однако интерпретация эмпирических данных о n_2 и n_0 с молекулярной точки зрения чрезвычайно плодотворна и интересна, поскольку именно такого рода интерпретация и позволяет получать сведения о строении атомов, молекул, об их взаимодействии в тех или иных агрегатных состояниях вещества и т.п.

Согласно квантовой теории дисперсии (см. § 156) показатели преломления и затухания n, $\varkappa$ можно представить в виде

$$\begin{gathered} n^2(1-\varkappa^2) = 1 + 4\pi \sum (N_i - N_j)\alpha_{ij}(\omega), \\ n^2\varkappa = \sum (N_i - N_j)\chi_{ij}(\omega). \end{gathered} \tag{235.2}$$

Здесь N_i, N_j — заселенности энергетических уровней i, j; величины $\alpha_{ij}(\omega)$, $\chi_{ij}(\omega)$ определяют вклад в $n^2(1-\varkappa^2)$ и $n^2\varkappa$ от уровней i, j при единичной разности заселенности $N_i - N_j$, а суммирование производится по всем парам уровней. Из структуры соотношений (235.2), выведенных в предположении о малых значениях интенсивности поля, легко усмотреть два типа возможных причин, обусловливающих появление добавки $n_2 A^2$ к показателю преломления, а именно, влияние поля на разность заселенностей $N_i - N_j$ и на свойства каждого атома (т.е. на $\alpha_{ij}(\omega)$, $\chi_{ij}(\omega)$).

В § 157, 224 мы познакомились с причиной первого типа — с изменением разности заселенностей уровней, обусловленным поглощением, вынужденным испусканием и конечной продолжительностью возбужденных состояний. Если изменения заселенностей сравнительно невелики, то из соотношения (224.3) видно, что

$$N_i - N_j \propto 1 - \frac{u}{u_0}$$

и (235.2) превращается в (235.1) (ибо $u \propto A^2$). Как правило, данная причина особенно существенна, если частота излучения близка к частотам полос поглощения.

Другая причина изменения концентрации частиц связана с электрострикцией. Из курса электричества известно, что на диэлектрик,

помещенный в электрическое поле E, действует всестороннее давление, величина которого дается соотношением [1])

$$p = \frac{1}{8\pi}\, \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\, E^2,$$

$$E^2 = A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}\, A^2[1 + \cos 2(\omega t + \varphi)],$$

где ε и ρ — диэлектрическая проницаемость и плотность среды. В результате действия стрикционного давления изменяется плотность и, значит, показатель преломления среды на величину $\Delta n = p\,\partial n/\partial p$. Отбрасывая в E^2 член, колеблющийся со световой частотой, находим

$$n_2 = \frac{1}{8\pi}\, n_0 \rho \frac{\partial \rho}{\partial p} \left(\frac{\partial n_0}{\partial \rho}\right)^2. \qquad (235.3)$$

Значения n_2, вычисленные по этой формуле для некоторых жидкостей, приведены в первом столбце табл. 41.1.

Таблица 41.1

Значение коэффициента нелинейности n_2 для различных соединений

Вещество	$n_2 \cdot 10^{11}$ СГСЭ		Вещество	$n_2 \cdot 10^{11}$ СГСЭ	
	стрикция	ориентация		стрикция	ориентация
Сероуглерод CS_2	0,44	0,76	Четыреххлористый углерод CCl_4	0,21	0,016
Нитробензол $C_6H_5NO_2$	0,16	0,60	Гексан C_6H_{14}	0,18	0,010
Бензол C_6H_6	0,23	0,13	Этиловый спирт C_2H_5OH	0,11	0,005

Помимо стрикции, плотность может измениться в результате нагревания среды, вызванного поглощением излучения. Эта причина также приводит к зависимости показателя преломления от интенсивности света.

Поляризуемость $\alpha_{ij}(\omega)$, входящая в выражение для показателя преломления (235.2), представляет собой величину, усредненную по всем возможным ориентациям молекул. Если молекулы анизотропны, но различные ориентации молекул в отсутствие внешнего поля равновероятны, то среда в целом изотропна (газ, жидкость) и при малых значениях интенсивности свет не нарушает изотропности среды. В случае же большой мощности излучения электрическое поле волны оказывает ориентирующее действие на анизотропные молекулы, среда оказывается двоякопреломляющей и в показателях преломления для обыкновенной и необыкновенной волн появляются добавки,

[1]) См., например, И. Е. Тамм. Основы теории электричества.– М.: Физматлит, 2003.

пропорциональные в первом приближении квадрату амплитуды поля. Данное явление подобно эффекту Керра и более детально описано в § 152. Здесь мы ограничимся тем, что приведем вычисленные значения соответствующих коэффициентов нелинейности n_2 (см. второй столбец табл. 41.1).

Следует иметь в виду, что перечисленные причины, обусловливающие зависимость показателя преломления от мощности излучения, обладают разной степенью инерционности. В случае, например, стрикционного механизма нелинейности световое поле задает собственно силу, действующую на среду, и для возникновения неоднородности, т.е. смещения частиц, необходимо определенное конечное время. В конденсированной среде, следовательно, стрикция вызывает уплотнение в результате распространения упругой волны, и время, за которое устанавливается стационарное распределение плотности, по порядку величины определяется отношением радиуса a поперечного сечения пучка к скорости звука $v_{\text{зв}}$. Если принять $a = 0{,}25$ мм, $v_{\text{зв}} = 1{,}5$ км/с, то $a/v_{\text{зв}} \sim 10^{-7}$ с. Инерционность ориентационного (керровского) механизма нелинейности определяется временем поворота молекулы, которое по порядку величины равно 10^{-12} с (см. § 152, 161). Таким образом, в случае коротких лазерных импульсов (длительностью менее 10^{-7} с) основную роль будет играть керровский механизм. В случае импульсов с большой длительностью (более 10^{-7} с) относительную роль стрикционного и керровского механизма легко уяснить из сопоставления двух столбцов таблицы.

Перечисленные выше причины изменения показателя преломления связаны с воздействием поля световой волны на концентрацию и ориентацию молекул, т.е. на ее внешние степени свободы. Рассмотрим теперь влияние поля на поляризуемость молекулы. При выяснении этого вопроса будем исходить из простой классической модели, подробно обсужденной в § 156. Согласно этой модели, поляризация среды определяется смещением x электронов из их положений равновесия, причем

$$m\ddot{x} = eE(t) + F, \tag{235.4}$$

где $E(t)$ — напряженность электрического поля волны, F — сила, возвращающая электрон в положение равновесия (удерживающая сила). При малых значениях интенсивности света и, следовательно, при малых амплитудах колебаний электрона около положения равновесия можно считать, что F имеет в первом приближении характер квазиупругой силы, т.е.

$$F = -bx.$$

Данное приближение, использованное в § 156, оказывается недостаточным, если речь идет о больших амплитудах колебаний, возникающих в интересующем нас случае мощного излучения. В самом деле, квазиупругий характер возвращающей силы означает, что потенциальная энергия электрона параболически зависит от его смещения из положения равновесия

$$U(x) = \frac{1}{2}\,bx^2, \tag{235.5}$$

причем такой закон должен выполняться для любых значений x. Отсюда следовало бы, однако, что оторвать электрон от молекулы невозможно, тогда как опыт убеждает нас в конечности энергии ионизации молекул и атомов. Поэтому при достаточно больших значениях смещений x относительно положения равновесия должны существовать отклонения от закона (235.5).

Поскольку нас интересуют мощности излучения, не нарушающие целостность молекул, поправки к потенциальной энергии (235.5) можно считать сравнительно небольшими. Об этом говорит и тот факт, что для наблюдения самофокусировки и других явлений, описанных в § 232–234, достаточно, чтобы $\Delta n = n_2 A^2 \sim 10^{-5}$, а отношение нелинейной и линейной частей смещения электрона имеет такой же порядок величины. Следовательно, соотношение (235.5) можно рассматривать как первое приближение, и для анализа нелинейных оптических явлений нужно дополнить его слагаемыми с более высокими степенями смещения x:

$$U(x) = \frac{1}{2}\,bx^2 - \frac{1}{3}\,m\beta x^3 - \frac{1}{4}\,m\gamma x^4 - \ldots$$

Поскольку $F = -\partial U/\partial x$, уравнение движения электрона можно записать в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \beta x^2 - \gamma x^3 - \ldots = \frac{e}{m}\,E(t); \quad \omega_0^2 = \frac{b}{m}\,. \qquad (235.6)$$

Коэффициенты β, γ, ... конкретизироваться не будут, так как их значения, равно как и значения ω_0, определяются внутренним строением молекулы и могут быть вычислены только в рамках квантовой теории [1]).

Колебательная система, в которой удерживающая сила отличается от квазиупругой, называется *ангармонической*. Поэтому говорят, что эффекты, обусловленные членами βx^2, γx^3, ... в уравнении (235.6), связаны с *ангармонизмом* электронов молекулы.

Поскольку ангармонические члены βx^2, γx^3, ... имеют характер небольших поправок, уравнение (235.6) можно решать методом последовательных приближений: вначале это уравнение решается без ангармонических членов, и получаемое таким способом выражение для $x = x_0(t)$ подставляется в βx^2, γx^3, ..., после чего ищется решение уравнения

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{e}{m}\,E(t) + \beta x_0^2(t) + \gamma x_0^3(t) + \ldots$$

В случае монохроматического поля $E(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ указанные

[1]) В отличие от § 156, здесь не принимаются во внимание тормозящие силы, так как в качественном отношении они не изменяют выводов, вытекающих из (235.6).

вычисления приводят к следующему результату (см. упражнение 257):

$$x = \frac{e/m}{\omega_0^2 - \omega^2}\, A\cos(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}\beta\left(\frac{e}{m}\right)^2\left(\frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)^2\left[\frac{1}{\omega_0^2} + \frac{\cos 2(\omega t + \varphi)}{\omega_0^2 - (2\omega)^2}\right] + \\ + \frac{3}{4}\gamma\left(\frac{e}{m}\,\frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)^3\left[\frac{\cos(\omega t + \varphi)}{\omega_0^2 - \omega^2} + \frac{1}{3}\,\frac{\cos 3(\omega t + \varphi)}{\omega_0^2 - (3\omega)^2}\right] + \ldots \quad (235.7)$$

Отметим, прежде всего, что вынужденные колебания электрона описываются набором гармонических функций с частотами $j\omega$ ($j = 0, 1, 2, 3, \ldots$), кратными частоте вынуждающей силы, т.е. частоте поля. Оптические явления, обусловленные кратными гармониками в смещении электрона, будут рассмотрены в следующих параграфах. Здесь же следует обратить внимание на изменение поляризуемости молекулы по отношению к колебаниям с частотой ω. Из выражения (235.7) можно увидеть, что эта поляризуемость равна

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_2 A^2, \quad \alpha_0 = \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2}, \\ \alpha_2 = \frac{3}{4}\alpha_0\gamma\left(\frac{e}{m}\right)^2\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^3}. \quad (235.8)$$

Таким образом, вследствие кубической ангармоничности (член γx^3 в уравнении (235.6)) световое поле оказывает влияние на поляризуемость молекулы, причем ее изменение пропорционально квадрату амплитуды (или интенсивности) световой волны, что и обусловливает дополнительный вклад в величину $n_2 A^2$.

Значения электронной части коэффициента нелинейности n_2 сильно различаются в различных средах. В жидкостях, например, главную роль играют стрикционный и керровский механизм нелинейности, а электронная часть сравнительно невелика. В твердых телах ангармонизм может быть очень существен, в особенности в случае коротких лазерных импульсов, когда стрикционный механизм не проявляется вследствие инерционности.

Итак, мощное световое поле воздействует и на внешние, и на внутренние степени свободы молекул, изменяя характер соответствующих движений и обусловливая зависимость показателя преломления от интенсивности. Вообще говоря, электромагнитное поле влияет и на межмолекулярное взаимодействие. Последнее обстоятельство особо важно для металлов, ионных кристаллов, полупроводников, где взаимодействие между частицами среды очень велико и играет определяющую роль по отношению ко многим, не только нелинейным оптическим свойствам тела.

§ 236. Генерация кратных, суммарных и разностных гармоник

Явления преломления и отражения света с молекулярной точки зрения рассматриваются как результат интерференции падающей волны и вторичных волн, испускаемых молекулами среды благодаря

вынужденным колебаниям зарядов, индуцированных падающей волной (§ 135). В линейной оптике вынужденные колебания совершаются с частотой внешнего поля, вследствие чего падающая, отраженная и преломленная волны имеют одну и ту же частоту. Если принимать во внимание ангармоничность колебаний зарядов в молекулах среды, то, как было выяснено в § 235, индуцированный полем дипольный момент имеет слагаемые, отвечающие колебаниям с частотами, кратными частоте падающей на среду волны. Поэтому молекулы среды испускают волны и с кратными частотами, и нелинейная среда в целом создает излучение с частотами 2ω, 3ω и т.д. Это явление получило название *генерации кратных гармоник света*.

Генерация кратных гармоник впервые наблюдалась в 1961 г. (Франкен с сотр.) при распространении излучения рубинового лазера в кристаллическом кварце, дигидрофосфате калия и триглицинсульфате. Схема эксперимента, показанная на рис. 41.6, в принципиальном отношении очень проста. На плоскопараллельный слой *1* слева падает коллимированный или сходящийся пучок лазерного излучения. Из пластинки выходит излучение второй гармоники, показанное на рис. 41.6 сплошной линией. Это излучение отделяется от исходного фильтрами *2* или спектральными приборами и регистрируется подходящим приемником излучения *3* (фотографическая пленка, фотоумножитель). Особенно эффектен опыт с применением квантового генератора инфракрасного излучения, например, на неодимовом стекле ($\lambda = 1{,}06$ мкм). В этом случае из пластинки *1* выходит пучок ярко-зеленого света ($\lambda/2 = 0{,}53$ мкм).

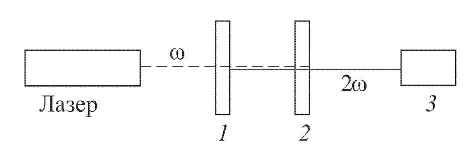


Рис. 41.6. Схема опыта по генерации второй гармоники лазерного излучения

Измерения показывают, что интенсивность второй гармоники резко зависит от угла падения лазерного пучка на пластинку. На рис. 41.7 точками показаны измеренные значения мощности $P_{2\omega}$ второй гармоники излучения рубинового лазера ($\lambda = 0{,}6943$ мкм, $\lambda/2 = 0{,}3472$ мкм) при использовании в качестве нелинейной среды пластинки из кристаллического кварца (толщина 0,75 мм). На оси абсцисс отложен угол падения φ. Резкие колебания интенсивности излучения с длиной волны $\lambda/2 = 0{,}3472$ мкм свидетельствуют о существенной роли интерференционных явлений.

Для анизотропных нелинейных сред оказывается чрезвычайно важной ориентация оптических осей относительно граней пластинки, угол падения исходного пучка и состояние поляризации последнего. На рис. 41.8 показан график мощности второй гармоники излучения гелий-неонового лазера ($\lambda = 1{,}15$ мкм) при использовании в качестве нелинейной среды пластинки одноосного кристалла дигидрофосфата калия (KDP). Аргументом служит угол между волновым вектором исходной волны и оптической осью кристалла. Максимальное значение мощности второй гармоники достигается в том случае,

когда угол θ между волновым вектором преломленной исходной волны и оптической осью кристалла равен $\theta_0 = 41{,}5°$. Оказывается, что зависимость $P_{2\omega}$ от угла $\theta - \theta_0 = \Delta\theta$ хорошо аппроксимируется функцией $[\sin(C\Delta\theta)/(C\Delta\theta)]^2$, где C — постоянный коэффициент (кривая на рис. 41.8). В отличие от рис. 41.7, в данном случае мощность

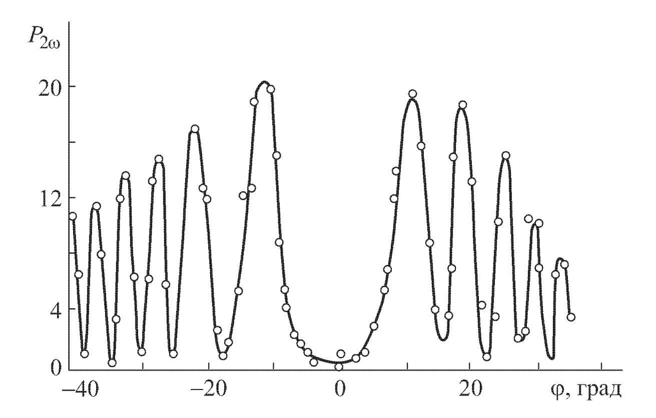


Рис. 41.7. Зависимость мощности $P_{2\omega}$ (произвольные единицы) второй гармоники излучения рубинового лазера от угла падения φ на пластинку кристаллического кварца

резко уменьшается в сравнительно малом интервале углов порядка (0°,05).

Отмеченные особенности генерации второй гармоники находят простое объяснение, основанное на представлении о сложении волн,

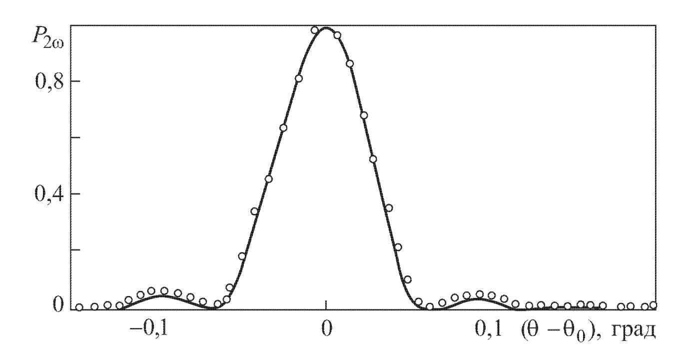


Рис. 41.8. Зависимость мощности $P_{2\omega}$ второй гармоники излучения гелий-неонового лазера от наклона кристалла KDP ($\theta = 41°{,}5$)

испускаемых диполями, индуцированными преломленной волной исходного излучения. Примем за ось Oz направление распространения

преломленной волны с частотой ω (рис. 41.9). Для диполей, расположенных в плоскости z', колебания с удвоенной частотой 2ω описываются, согласно соотношению (235.7), функцией [1])

$$A^2 \cos 2[\omega t + \varphi(z')] = A^2 \cos 2\omega \left[t - \frac{n(\omega)}{c}\, z'\right], \quad \varphi(z') = -\frac{2\pi}{\lambda}\, n(\omega) z', \tag{236.1}$$

где A — амплитуда исходной волны, $n(\omega)$ — показатель преломления для частоты ω.

Диполь, колеблющийся по закону (236.1), излучает вторичную волну с частотой 2ω; фаза вторичной волны в какой-либо точке z внутри пластинки отличается от фазы колебания (236.1) на величину, соответствующую разности хода $z - z'$:

$$2\omega \left[t - \frac{n(\omega)}{c}\, z'\right] - \frac{2\omega n(2\omega)(z - z')}{c} =$$
$$= 2\omega \left\{t - \frac{n(2\omega)}{c}\, z + [n(2\omega) - n(\omega)]\, \frac{z'}{c}\right\}, \tag{236.2}$$

где $n(2\omega)$ — показатель преломления для частоты 2ω. Полное поле с частотой 2ω в точке z есть сумма вторичных волн, испущенных ансамблем диполей, которые расположены между входной гранью пластинки и плоскостью z. Если показатели преломления для частот ω и 2ω одинаковы, т.е.

$$\Delta n \equiv n(2\omega) - n(\omega) = 0, \tag{236.3}$$

то фаза (236.2) не зависит от расположения диполя, все вторичные волны синфазны и амплитуда поля второй гармоники пропорциональна расстоянию z от входной грани, а интенсивность — квадрату z. Равенство (236.3), называемое условием *пространственной синфазности* [2]), соответствует, очевидно, максимально большой интенсивности второй гармоники, генерируемой в данной нелинейной среде при заданной мощности исходного излучения.

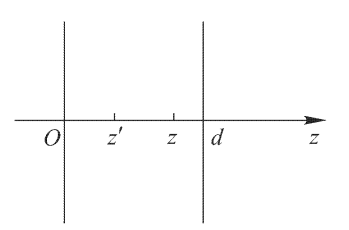


Рис. 41.9. К расчету интерференции вторичных волн при генерации второй гармоники

Показатель преломления зависит, однако, от частоты, и при переходе от ω к 2ω изменения n могут быть значительными. В общем случае $\Delta n \neq 0$, и амплитуда волны с удвоенной частотой дается вы-

[1]) Фазу $\varphi(z')$ не следует смешивать с углом падения φ на рис. 41.7.

[2]) Условие (236.3) называют также условием *волнового синхронизма* или условием *пространственного синхронизма*.

ражением

$$E_{2\omega} = g A^2 \int\limits_0^z \cos\left\{2\omega\left[t - n(2\omega)\,\frac{z}{c}\right] - 2\omega\Delta n\,\frac{z'}{c}\right\} dz' =$$

$$= A_{2\omega}\cos 2\omega\left\{t - [n(2\omega) + n(\omega)]\,\frac{z}{2c}\right\}; \quad (236.4)$$

$$A_{2\omega} = g A^2 z\,\frac{\sin w}{w}, \quad w = \frac{2\pi}{\lambda}\,z\Delta n = \frac{\Delta k\,z}{2}, \quad \Delta k = k(2\omega) - 2k(\omega),$$

где g — коэффициент пропорциональности. Амплитуда второй гармоники $A_{2\omega}$ содержит стандартный интерференционный множитель $w^{-1}\sin w$, отображающий частичное или полное гашение вторичных волн, испущенных различными точками среды. Величина w представляет собой разность фаз между вторичными волнами, которые испущены сечениями пластинки, отстоящими друг от друга на расстояние $z/2$. Если $w = \pi$, то волны от первой половины слоя толщины z полностью гасятся волнами от второй его половины, и амплитуда второй гармоники равна нулю. Полное гашение вторичных волн происходит и при w, кратном π.

На рис. 41.10 приведен график зависимости $|A_{2\omega}|$ от координаты z. При $z > d$ амплитуда поля определится ее значением на границе пластинки $z = d$. Максимальные значения амплитуды $A_{2\omega}$ достигаются при

$$z_m = l_{\text{ког}}(1 + 2m); \quad l_{\text{ког}} = \frac{\lambda}{4}\,\Delta n, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \quad (236.5)$$

и равны

$$|A_{2\omega}|_{\max} = g A^2 \frac{\lambda}{2\pi\Delta n}. \quad (236.6)$$

Толщина слоя $l_{\text{ког}}$, для которого разность фаз $w = \pi/2$, называется *длиной когерентности*. Согласно (236.6) максимально возможная амплитуда второй гармоники при $z = l_{\text{ког}}$ имеет такое же значение, как при выполнении условия пространственной синфазности и толщине пластинки, равной $\lambda/(2\pi\Delta n) = 2l_{\text{ког}}/\pi$.

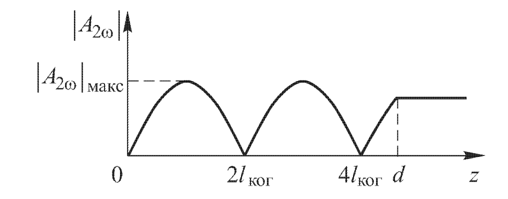


Рис. 41.10. Зависимость модуля амплитуды второй гармоники от расстояния z

Значение разности показателей преломления Δn несколько варьирует для разных материалов и изменяется с частотой. Для кристаллического кварца, например, $\Delta n = 0{,}025$ в случае $\lambda = 0{,}6943$ мкм и увеличивается в более коротковолновой части спектра. Если принять $\Delta n = 0{,}025$, то $l_{\text{ког}} = 10\lambda = 0{,}69 \cdot 10^{-2}$ мм, т.е. «эффективная» толщина оказывается чрезвычайно малой — порядка нескольких длин волн исходного излучения.

В случае наклонного падения на нелинейную пластинку соотношения (236.4) сохраняют силу, но толщину пластинки d в выражении для разности фаз w следует заменить на длину пути $d/\cos\psi$, проходимого волной вдоль направления ее распространения (ψ — угол преломления исходной волны). В свете сказанного легко объяснимы колебания мощности второй гармоники, изображенные на рис. 41.7: изменение угла падения φ приводит к изменению угла преломления, что, в свою очередь, изменяет разность фаз w. Расстоянию между двумя соседними минимумами отвечает изменение w на π; с помощью графика рис. 41.7 можно вычислить разность Δn, которая оказывается равной $\Delta n = 0{,}025$, что согласуется с хорошо известными значениями дисперсии показателя преломления.

Несмотря на дисперсию показателя преломления, можно добиться выполнения условия пространственной синфазности, если применить в качестве нелинейной среды анизотропные кристаллы. В анизотропной среде плоская волна с заданным направлением волнового вектора распадается на две волны, ортогонально поляризованные и распространяющиеся с различными, вообще говоря, фазовыми скоростями. Каждая линейно-поляризованная первичная волна индуцирует в среде совокупность диполей с характерным для данной волны пространственным распределением фаз. Вторичные волны, испускаемые этими диполями, в свою очередь разлагаются на ортогонально поляризованные волны с различными фазовыми скоростями, и удается так подобрать материал пластинки и направление распространения первичной волны, что для вторичных волн с одной из поляризаций выполняется условие пространственной синфазности.

Пусть, например, мы имеем дело с одноосным отрицательным кристаллом (см. гл. XXVI), т.е. показатель преломления обыкновенной волны n_o превышает показатель преломления необыкновенной волны n_e, причем различие между n_o и n_e больше изменения n_e при удвоении частоты, т.е. $n_o(\omega) > n_e(2\omega)$. При этом условии могут быть синфазными необыкновенные вторичные волны, возбуждаемые обыкновенной первичной волной. Действительно, поскольку показатель преломления увеличивается с ростом частоты, мы имеем неравенства

$$n_o(2\omega) > n_o(\omega) > n_e(2\omega).$$

Известно (см. гл. XXVI), что при изменении направления распространения показатель преломления необыкновенной волны изменяется в пределах от $n_e(2\omega)$ (перпендикулярно оптической оси) до $n_o(2\omega)$ (вдоль оптической оси). Следовательно, при каком-то промежуточном направлении осуществится равенство между показателями преломления обыкновенной первичной волны и необыкновенной вторичной волны. Для указанного направления выполняется условие пространственной синфазности и само оно называется *направлением синфазности* (или *синхронизма*). Согласно сказанному ранее, в этом направлении амплитуда второй гармоники принимает максимальное значение.

Для кристалла KDP и $\lambda = 1{,}15$ мкм направление синфазности образует с оптической осью кристалла угол θ_0, равный, согласно расчету, $41^\circ 35'$, что совпадает с результатами наблюдений (см. рис. 41.8). Отклонение от направления синфазности должно

уменьшать интенсивность второй гармоники в соответствии со множителем $[w^{-1}\sin w]^2$, причем физический смысл величины w по-прежнему отвечает разности фаз между волнами, испущенными слоями, отстоящими на половину толщины пластинки. Поскольку эта разность фаз в первом приближении линейно зависит от $\Delta\theta = \theta - \theta_0$, соотношение (236.4) объясняет ход графика, изображенного на рис. 41.8.

Согласно соотношению (236.4) амплитуда $A_{2\omega}$ волны с удвоенной частотой пропорциональна квадрату амплитуды падающей волны A и, следовательно, мощность излучения $P_{2\omega}$ с частотой 2ω пропорциональна квадрату мощности P исходного пучка. Специальные измерения показали, что указанная закономерность имеет место, но только в том случае, когда $P_{2\omega}$ составляет небольшую часть от P. Такое положение вполне естественно, так как энергия второй гармоники черпается из первичной волны и мощность последней уменьшается по мере углубления в среду. Теория вопроса приводит к выводу, что в идеальных условиях (исходный пучок строго параллельный, точно выполнено условие пространственной синфазности) практически всю мощность падающего излучения можно преобразовать в пучок с удвоенной частотой. Однако по ряду причин (неоднородность кристалла, его нагревание, конечная расходимость пучка и др.) этого достичь не удается, и на опыте получают отношение $P_{2\omega}/P$ порядка нескольких десятков процентов.

До сих пор речь шла о второй гармонике. Аналогичным образом происходит и генерация третьей гармоники: первичное излучение с частотой ω создает в нелинейной среде ансамбль диполей, колеблющихся и излучающих вторичные волны с частотой 3ω. Мощность третьей гармоники пропорциональна кубу мощности падающего света и фактору

$$d^2\left(\frac{\sin w'}{w'}\right)^2; \quad w' = \frac{3\pi}{\lambda}\,d[n(3\omega) - n(\omega)] = \frac{1}{2}\,d\,[k(3\omega) - 3k(\omega)],$$

описывающему интерференцию вторичных волн. Дисперсия показателя преломления $n(3\omega)-n(\omega)$ в интервале частот ω, 3ω еще больше, чем в случае второй гармоники $(\omega, 2\omega)$, что затрудняет генерацию третьей гармоники в изотропных средах и ограничивает выбор кристаллов, для которых можно выполнить условие пространственной синфазности. Главная трудность экспериментирования связана с малым значением поляризуемости на тройной частоте. Это обстоятельство вынуждает применять очень большие освещенности, часто приводящие к разрушению материала. Несмотря на перечисленные трудности, генерация третьей гармоники с выполнением условия синфазности наблюдается в исландском шпате ($CaCO_3$), обладающем значительным двойным лучепреломлением ($n_o - n_e = 0{,}172$ для D-линии натрия), а также в некоторых изотропных кристаллах (LiF, NaCl) и жидкостях. Генерация третьей гармоники наблюдалась и в газах.

Родственные нелинейные явления возникают и при распространении через нелинейную среду немонохроматического излучения. В этих условиях, помимо кратных гармоник, генерируется излучение, спектр

которого содержит суммы и разности частот исходного светового пучка. Для выяснения причины указанных явлений обратимся к уравнению движения (235.6) ангармонического осциллятора и предположим, что падающий свет представляет собой две плоские монохроматические волны с частотами ω_1, ω_2, волновыми векторами $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ и амплитудами A_1, A_2. Если принять в расчет только квадратичную ангармоничность (т.е. член βx^2 в (235.6)), то дипольный момент, индуцируемый в данном случае, имеет составляющие, пропорциональные выражениям (см. упражнение 257)

$$\begin{gathered} A_1 A_2 \cos\left[(\omega_1+\omega_2)t-(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)\mathbf{r}\right], \\ A_1 A_2 \cos\left[(\omega_1-\omega_2)t-(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\mathbf{r}\right]. \end{gathered} \tag{236.7}$$

Иными словами, в среде создается ансамбль диполей, колеблющихся с частотами $\omega_1 \pm \omega_2$ и имеющих постоянную фазу в плоскостях, перпендикулярных векторам $\mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2$. В направлениях $\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2$, $\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2$ среда должна генерировать, следовательно, излучение с частотами $\omega_1+\omega_2$, $\omega_1-\omega_2$ соответственно. Заметим, что скорость v пространственного изменения фазы диполей, например, с частотой $\omega_1+\omega_2$, равная

$$v = \frac{\omega_1+\omega_2}{|\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2|} = \frac{\omega_1+\omega_2}{\sqrt{k_1^2+k_2^2+2k_1k_2\cos\vartheta}},$$

зависит от угла ϑ между векторами $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, увеличиваясь с ростом ϑ. Поэтому условие синфазности для генерации суммарной гармоники не выполняется, если даже оно выполнено для кратных гармоник. Если же, применяя кристаллы, добиться синфазности для $\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2$, то для $2\mathbf{k}_1$ и $2\mathbf{k}_2$ синфазность будет отсутствовать. Подчеркнем, что несовпадение условий синфазности для различных процессов оказывается типичным, и это позволяет усиливать тот или иной процесс и подавлять остальные.

В среде с кубической ангармоничностью (член γx^3 в уравнении (235.6)) две указанные волны создают слагаемые дипольных моментов вида (см. упражнение 257)

$$\begin{gathered} A_1^2 A_2 \cos\left[(2\omega_1 \pm \omega_2)t-(2\mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2)\mathbf{r}\right], \\ A_1 A_2^2 \cos\left[(2\omega_2 \pm \omega_1)t-(2\mathbf{k}_2 \pm \mathbf{k}_1)\mathbf{r}\right], \end{gathered} \tag{236.8}$$

и будет происходить генерация излучения с частотами $2\omega_1 \pm \omega_2$, $2\omega_2 \pm \omega_1$, распространяющегося в направлениях $2\mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2$, $2\mathbf{k}_2 \pm \mathbf{k}_1$ соответственно. Синфазность интерферирующих вторичных волн легче всего получить для гармоник $2\omega_1-\omega_2$, $2\omega_2-\omega_1$. Если частоты ω_1, ω_2 различаются мало, то и разностные частоты $2\omega_1-\omega_2$, $2\omega_2-\omega_1$ близки к ω_1, ω_2 и соответствующие когерентные длины будут значительными даже в изотропных средах. Пусть, например, ω_1 соответствует рубиновому лазеру (14 400 см$^{-1}$), а излучение с частотой ω_2 получено в результате вынужденного комбинационного рассеяния в бензоле, причем ω_2 отличается от ω_1 на 990 см$^{-1}$. Если теперь направить обе указанные волны в кювету с жидкостью, то возникает излучение на

частоте 15 390 см^{-1} (длина волны 0,65 мкм). В этом случае длина когерентности

$$l_{\text{ког}} = \pi[k(2\omega_1 - \omega_2) - 2k_1 + k_2]^{-1}$$

приблизительно равна 0,7 мм (в качестве нелинейной среды также использовался бензол).

Явления генерации кратных, разностных и суммарных гармоник нашли многочисленные научно-технические применения. Ценность этих явлений для лазерной техники обусловлена тем, что удвоение частоты лазерного излучения или «смешивание» излучений двух лазеров в нелинейной среде позволяет получать мощный поток когерентного света в области спектра, отличной от исходной. Например, удвоение частоты излучения лазеров на красителях, генерирующих в видимой области спектра (см. § 231), обеспечивает когерентное излучение с плавной перестройкой частоты в ультрафиолетовой области. Особый интерес представляет смешивание инфракрасного излучения со светом мощных лазеров (рубинового или неодимового). Дело в том, что приемники инфракрасного излучения значительно уступают по чувствительности и инерционности приемникам, применяемым в видимой и ультрафиолетовой областях. В инфракрасной области очень плохо разработана фотография. Смешивание же излучения, например, с $\lambda = 4$ мкм и 0,694 мкм (рубиновый лазер) дает желтый свет с длиной волны 0,591 мкм, который можно регистрировать и визуально, и фотографически, и с помощью фотоумножителя. Таким способом удается регистрировать даже слабое тепловое излучение.

§ 237. Отражение волн в нелинейной оптике

При падении интенсивного излучения на границу раздела двух сред в отраженном свете наблюдаются волны не только с частотой падающего излучения, но и с кратными, разностными и суммарными частотами. Будем говорить о случае падения монохроматической плоской волны с частотой ω. Опыт показывает, что направления распространения отраженных волн с частотами ω и 2ω немного, но все же отличаются друг от друга, причем это отличие зависит от дисперсии показателя преломления среды, в которой распространяется падающая волна. Интенсивность второй гармоники в отраженном свете на несколько порядков меньше, чем в преломленной волне, и практически не зависит от степени выполнения условия пространственной синфазности. Как и в случае френелевского отражения, амплитуды отраженных волн с частотой 2ω зависят от угла падения и ориентации электрического вектора относительно плоскости падения. Наблюдается и аналог явления Брюстера: при некотором угле падения для пучка с поляризацией, параллельной плоскости падения, коэффициент отражения равен нулю.

Сам факт существования волны с удвоенной частотой вне нелинейной среды легко объяснить с помощью соображений, уже использовавшихся выше: ансамбль диполей, индуцированных первичной волной, испускает волны, «сумма» которых имеет конечное значение как в нелинейной среде, так и вне ее. Аналогичные соображения при-

влекаются в рамках молекулярной теории и для объяснения обычного отражения (см. гл. XXIII).

В свете сказанного легко понять малую величину интенсивности второй гармоники в отраженном свете. Вторичные волны, испущенные в направлении, противоположном направлению первичной волны (случай нормального падения), максимально рассогласованы по фазе, и эффективная толщина слоя, создающего отраженную волну, равна по порядку величины $\lambda/\{4\,[n(2\omega)+n(\omega)]\}$, вместо $\lambda/\{4\,[n(2\omega)-n(\omega)]\}$ для проходящей волны. Поэтому для отношения интенсивностей отраженной и преломленной волн второй гармоники имеем

$$\left[\frac{n(2\omega)-n(\omega)}{n(2\omega)+n(\omega)}\right]^2 \sim 10^{-4}\text{–}10^{-5},$$

что соответствует опытным данным. Высказанные соображения качественно объясняют, очевидно, и независимость интенсивности отраженного света с частотой 2ω от степени синфазности вторичных преломленных волн.

Остальные из упомянутых выше свойств второй гармоники в отраженном свете требуют более детального анализа. Количественное их описание основано на теории, аналогичной изложенной в гл. XXIII для френелевского отражения в линейной оптике. Согласно объясненному там общему методу, свойства отраженных и преломленных волн устанавливаются с помощью граничных условий, сводящихся к требованию непрерывности тангенциальных составляющих напряженности электрического и магнитного полей. Сами же напряженности записываются как суперпозиции волн, удовлетворяющих уравнениям Максвелла.

Пусть из линейной среды, обозначаемой в дальнейшем *1*, на границу раздела с нелинейной средой *2* падает монохроматическая плоская волна (частота ω), порождающая обычные отраженную и преломленную волны. Волновые векторы этих волн изображены жирными стрелками на рис. 41.11, из которого ясна и выбранная система координат. Тонкие стрелки соответствуют волновым векторам волн с частотой 2ω, и их смысл будет пояснен ниже.

В среде *1* поле с частотой 2ω представлено отраженной волной (ниже используется комплексная запись полей)

$$\mathbf{A}^r \exp\{-i\,[2\omega t - \mathbf{k}_{12}\mathbf{r}]\}; \quad \mathbf{k}_{12}^2 = \left[\frac{2\omega}{c}\,n_{12}\right]^2. \tag{237.1}$$

В среде *2* поле будем искать в виде суперпозиции двух волн

$$\begin{gathered}\mathbf{A}^d \exp[-i(2\omega t - \mathbf{k}_{22}\mathbf{r})] + \mathbf{B}\exp[-i(2\omega t - 2\mathbf{k}_{21}\mathbf{r})];\\ \mathbf{k}_{22}^2 = \left[\frac{2\omega}{c}\,n_{22}\right]^2, \quad \mathbf{k}_{21}^2 = \left[\frac{\omega}{c}\,n_{21}\right]^2, \quad n_{22}\equiv n_2(2\omega), \quad n_{21}\equiv n_2(\omega).\end{gathered} \tag{237.2}$$

Первые индексы у $\mathbf{k}$ и n соответствуют среде *1* или *2*, вторые — кратности частоты (например, $n_{12}\equiv n_1(2\omega)$, $\mathbf{k}_{21}$ — волновой вектор преломленной в среде *2* волны с частотой ω). Основание к такому выбору вида поля состоит в следующем. Уравнения Максвелла для поля с частотой 2ω представляют собой неоднородную систему уравнений, причем источником поля служит нелинейная часть поляризации сре-

ды, изменяющаяся по закону

$$\exp\{-2i(\omega t - \mathbf{k}_{21}\mathbf{r})\}. \tag{237.3}$$

Согласно теории линейных уравнений, общее решение неоднородной системы можно представить в виде суммы общего решения соответствующей однородной системы и частного решения неоднородной системы. Второй член в выражении (237.2), зависящий от времени и координат так же, как нелинейная поляризация среды, и содержащий показатель преломления n_{21} для частоты ω, служит решением неоднородной системы уравнений; поэтому вектор $\mathbf{B}$ известен — он выражается через нелинейную поляризацию среды и пропорционален квадрату амплитуды преломленной волны исходного излучения с частотой ω (см. упражнение 258). Первый же член в (237.2) — решение однородной системы, в него входит неизвестная пока амплитуда $\mathbf{A}^d$, подлежащая вычислению, и показатель преломления n_{22} среды *2* для частоты 2ω. Аналогичные выражения можно написать и для напряженности магнитного поля. Векторы $\mathbf{k}_{12}$, $2\mathbf{k}_{21}$, $\mathbf{k}_{22}$ изображены на рис. 41.11 тонкими стрелками.

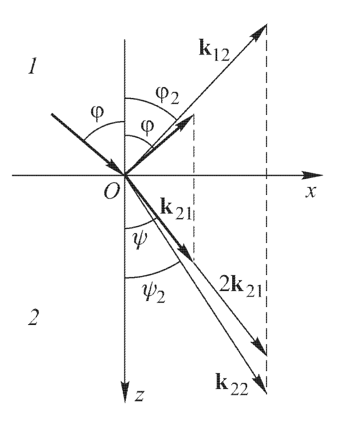


Рис. 41.11. Отражение и преломление волн на границе раздела между линейной (*1*) и нелинейной (*2*) средами

Смысл дальнейших рассуждений состоит в установлении связи неизвестных величин $\mathbf{A}^r$, $\mathbf{A}^d$, $\mathbf{k}_{22}$, $\mathbf{k}_{12}$ с известными $\mathbf{B}$, $\mathbf{k}_{21}$ на основе граничных условий. Подобным образом действуют и в линейной оптике (см. гл. XXIII), но в ней заданными величинами служили амплитуда и волновой вектор волны, падающей из среды *1*. В нелинейной же оптике отраженная и преломленная волны порождаются нелинейной поляризацией, и поэтому заданная величина входит в выражение для поля внутри преломляющей среды.

Любое из граничных условий сводится, очевидно, к обращению в нуль некоторых линейных комбинаций экспоненциальных функций, входящих в выражения (237.1), (237.2) и вычисляемых на границе раздела $z = 0$:

$$C_1 \exp(ik_{12x}x) + C_2 \exp(ik_{22x}x) + C_3 \exp(2ik_{21x}x) = 0.$$

В силу линейной независимости экспоненциальных функций, такое равенство выполняется тождественно для произвольных значений x в том и только в том случае, когда показатели всех трех экспонент одинаковы, т.е.

$$k_{22x} = k_{12x} = 2k_{21x}; \tag{237.4}$$

иными словами, должно выполняться равенство тангенциальных составляющих волновых векторов. Вертикальная штриховая прямая на рис. 41.11, соединяющая концы векторов $\mathbf{k}_{22}$, $2\mathbf{k}_{21}$, $\mathbf{k}_{12}$, отсекает на

оси Ox общую тангенциальную составляющую. Напомним, что аналогичные соотношения справедливы и для волновых векторов волн с частотой ω. Равенства (237.4) выражают геометрические законы отражения и преломления; их можно переписать с помощью углов, показанных на рис. 41.11:

$$n_{22}\sin\psi_2 = n_{12}\sin\varphi_2 = n_{21}\sin\psi = n_{11}\sin\varphi. \tag{237.5}$$

Последнее равенство в (237.5) — закон преломления для волны с частотой ω, $n_{11} \equiv n_1(\omega)$.

Если среда *1* обладает дисперсией ($n_{12} \neq n_{11}$), то угол отражения φ_2 для второй гармоники не равен углу падения φ:

$$\sin\varphi_2 = \frac{n_{11}}{n_{12}}\,\sin\varphi \tag{237.6}$$

и в случае нормальной дисперсии ($n_{12} > n_{11}$) имеем $\varphi_2 < \varphi$, как изображено на рис. 41.11. Таким образом, излагаемая теория объясняет один из фактов, отмеченных в начале параграфа. Точные измерения подтверждают закон отражения (237.6) и в количественном отношении. Поскольку разность $n_{12} - n_{11} = \Delta n_1$ относительно невелика, равенство (237.6) можно приближенно переписать в виде

$$\varphi_2 - \varphi \approx -\frac{\Delta n_1}{n_{11}}\,\operatorname{tg}\varphi. \tag{237.7}$$

Для воздуха $\Delta n_1 \sim 10^{-5}$, и различием между φ_2 и φ можно пренебречь. Если же поместить нелинейную среду в жидкость с большой дисперсией (бензол, сероуглерод), то $\Delta n_1 \sim 10^{-1}$ и при $\varphi = 45^\circ$ разность $\varphi_2 - \varphi$ составляет несколько градусов, т.е. вполне заметную величину.

Углы преломления ψ и ψ_2 первичной и вторичной волн также отличаются друг от друга вследствие дисперсии показателя преломления преломляющей среды:

$$\sin\psi_2 = \frac{n_{21}}{n_{22}}\,\sin\psi = \frac{n_{11}}{n_{22}}\,\sin\varphi. \tag{237.8}$$

В случае нормальной дисперсии ($n_{22} > n_{21}$) имеем $\psi_2 < \psi$, чему и соответствует расположение векторов на рис. 41.11.

Несовпадение векторов $\mathbf{k}_{22}$, $2\mathbf{k}_{21}$ означает, что в среде *2* существуют осцилляции амплитуды поля, вызванные интерференцией двух волн, распространяющихся в среде *2*. Принимая во внимание равенства (237.4), выражение (237.2) можно представить в виде

$$\left[\left(\mathbf{A}^d + \mathbf{B}\right)\exp\frac{i\Delta kz}{2} - 2i\,\mathbf{B}\sin\frac{\Delta kz}{2}\right]\exp\left\{-i\left[2\omega t - \frac{(\mathbf{k}_{22} + 2\mathbf{k}_{21})\mathbf{r}}{2}\right]\right\}, \tag{237.9}$$

где для разности z-компонент волновых векторов введено обозначение $\Delta k = k_{22z} - 2k_{21z}$. Принимая во внимание малость величины $\Delta n_2 = n_{22} - n_{21}$ и выражая k_{22z}, k_{21z} через угол ψ, находим

$$\Delta k = \frac{2\omega}{c}\left[\sqrt{n_{22}^2 - n_{21}^2\sin^2\psi} - n_{21}\cos\psi\right] \approx \frac{4\pi}{\lambda}\,\frac{\Delta n_2}{\cos\psi}\,. \tag{237.10}$$

Подстановка выражения (237.10) для Δk в $\sin(\Delta kz/2)$ приводит к результату, полученному в § 236 с помощью интуитивных соображений.

Таким образом, существование двух волн в среде *2* эквивалентно интерференции вторичных волн, испускаемых, согласно представлениям, изложенным в § 236, различными слоями нелинейной среды.

Применение граничных условий в полном объеме позволяет вычислить $\mathbf{A}^r$, $\mathbf{A}^d$. Расчет показывает, что амплитуда отраженной волны второй гармоники примерно в $(n_{22}+n_{21})/(n_{22}-n_{21})$ раз меньше, чем $|\mathbf{B}|$, что соответствует результатам измерений и качественным соображениям, приведенным в начале параграфа. Кроме того, $|\mathbf{B}|$ во столько же раз превышает $|\mathbf{A}^d+\mathbf{B}|$, так что в выражении (237.9) член с $\sin(\Delta kz/2)$ оказывается главным. Следовательно, по отношению к преломленной волне строгое рассмотрение, основанное на решении граничной задачи, оправдывает элементарный подход, примененный в § 236.

Наблюдения второй гармоники в отраженном свете представляют особый интерес в случае сильно поглощающих сред, например, металлов, так как позволяют исследовать их взаимодействие с мощным электромагнитным полем и в этих условиях, когда трудно работать с проходящей волной.

§ 238. Параметрические нелинейные явления

В § 236 было выяснено, что две плоские монохроматические волны с частотами ω_2, ω_3, распространяющиеся в среде с квадратичной нелинейностью, возбуждают поляризацию вида (236.7)

$$A_2A_3\cos\left[(\omega_3-\omega_2)t-(\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_2)\mathbf{r}\right], \tag{238.1}$$

изменяющуюся с частотой $\omega_3-\omega_2$ (предполагаем, что $\omega_3>\omega_2$). Направим в среду еще одну волну, обладающую именно такой частотой $\omega_1=\omega_3-\omega_2$,

$$A_1\cos(\omega_1t-\mathbf{k}_1\mathbf{r});\quad \omega_1=\omega_3-\omega_2. \tag{238.2}$$

Тогда нелинейная поляризация (238.1) будет усиливать или ослаблять поле на частоте ω_1. С другой стороны, возбудятся составляющие нелинейной поляризации вида

$$A_1A_3\cos\left[(\omega_3-\omega_1)t-(\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_1)\mathbf{r}\right],\ A_1A_2\cos\left[(\omega_1+\omega_2)t-(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)\mathbf{r}\right], \tag{238.3}$$

которые вызовут усиление или ослабление волн с частотами ω_2, ω_3 соответственно. Таким образом, распространение в нелинейной среде трех волн, частоты которых связаны соотношением

$$\omega_1+\omega_2=\omega_3, \tag{238.4}$$

сопровождается обменом энергией между ними, причем направление обмена определяется отношениями амплитуд и разностями пространственных частей фаз. Максимальный эффект возникает, очевидно, при выполнении равенства

$$\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2=\mathbf{k}_3, \tag{238.5}$$

которое обеспечивает сохранение соотношения между пространственными частями фаз во всем объеме среды и пространственное накоп-

ление эффекта обмена энергией между волнами. Соотношение (238.5) называют *векторным условием пространственной синфазности.*

Рассмотрим случай, когда одна из волн, наиболее высокочастотная (ω_3), имеет значительно бо́льшую амплитуду, чем две остальные. Тогда, очевидно, энергия волны *3* будет передаваться волнам *1* и *2*, т.е. будет происходить их усиление за счет энергии волны *3*. Это явление, открытое в 1965 г. (С.А. Ахманов, Р.В. Хохлов с сотр., Джердмейн, Миллер), называется *параметрическим усилением света* [1]).

Условие (238.5) нельзя выполнить в изотропных средах с нормальной дисперсией показателя преломления даже для случая однонаправленных волн. Тем более оно невыполнимо при различных направлениях векторов $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, $\mathbf{k}_3$. Сказанное вытекает из неравенств $|\mathbf{k}_3| > |\mathbf{k}_2| + |\mathbf{k}_1| > |\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_1|$, первое из которых легко доказать (см. упражнение 259), а второе самоочевидно. Однако в анизотропных кристаллах условию синфазности можно удовлетворить аналогично тому, как это было выяснено по отношению к генерации второй и третьей гармоник (см. § 236), если в качестве волн *1*, *2*, *3* использовать обыкновенные и необыкновенные волны. В случае, например, одноосного кристалла дигидрофосфата калия (KH_2PO_4) можно выполнить условия

$$\mathbf{k}_1^o + \mathbf{k}_2^o = \mathbf{k}_3^e, \quad \mathbf{k}_1^o + \mathbf{k}_2^e = \mathbf{k}_3^e, \tag{238.6}$$

где индексы o и e отмечают обыкновенные и необыкновенные волны. Для одноосного кристалла $LiNbO_3$, обладающего очень большой нелинейностью, можно удовлетворить только первому из этих условий.

Отметим, что эффективность параметрического усиления пропорциональна амплитуде возбуждающей волны, как это видно из выражений (238.1), (238.3), в которых фигурирует первая степень A_3. При мощности волны *3*, равной $5 \cdot 10^6$ Вт/см^2, коэффициенты усиления для KH_2PO_4 и $LiNbO_3$ имеют значения 0,05 см$^{-1}$ и 0,5 см$^{-1}$ соответственно.

В рамках квантовых представлений процесс передачи энергии волны *3* волнам *1*, *2* интерпретируется как «распад» фотона $\hbar\omega_3$ на два фотона $\hbar\omega_1$, $\hbar\omega_2$, причем соотношение (238.4) выражает закон сохранения энергии $\hbar\omega_3 = \hbar\omega_1 + \hbar\omega_2$, выполняющийся в каждом элементарном акте распада.

Опыт показывает, что распад фотона мощной волны происходит и в отсутствие волн *1*, *2*, т.е. самопроизвольно, спонтанно. Схема эксперимента показана на рис. 41.12. Параллельный пучок лазерного света, например от аргонового лазера ($\lambda = 0{,}5$ мкм), падает на кристалл ниобата лития. Выходящее из него излучение наблюдается на экране EE, расположенном в фокальной плоскости линзы L, так что окружности радиуса R в плоскости экрана отвечает угол $\theta = \operatorname{arctg}(R/f)$ между осью системы и направлением распространения света, выходящего из кристалла. В отсутствие кристалла на экране видна только одна

[1]) Происхождение названия связано с тем, что явление можно рассматривать как результат модуляции оптических параметров среды (показателя преломления, диэлектрической проницаемости) с частотой ω_3 вследствие нелинейного взаимодействия с мощной волной *3*.

яркая точка, соответствующая фокусировке лазерного пучка. В присутствии кристалла освещенной оказывается область экрана в виде круга с угловыми размерами порядка 10°, как схематически показано в правой части рис. 41.12. Центр круга освещен красным светом,

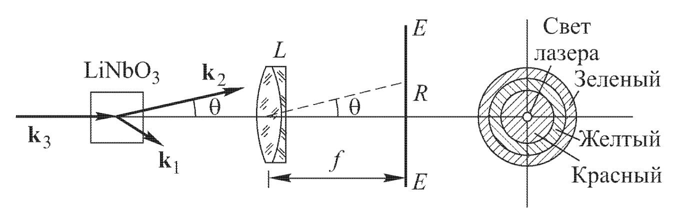


Рис. 41.12. Схема опыта по наблюдению параметрической люминесценции. Преломление на грани кристалла не принято во внимание

а по мере удаления от оси длина волны уменьшается и окраска постепенно переходит в желтую и зеленую. Измерение вариации длин волн вдоль радиуса круга показывает, что частота света как функция угла между осью и направлением распространения точно совпадает с теми значениями, которые диктуются векторным условием синфазности $\mathbf{k}_1^o + \mathbf{k}_2^o = \mathbf{k}_3^e$. Поскольку именно в этих направлениях должно происходить синфазное сложение вторичных волн, рождающихся при распаде фотона $\hbar\omega_3$, указанное совпадение служит убедительным доказательством параметрического происхождения выходящего из кристалла света. Частота другой слабой волны находится в инфракрасной области спектра, и она в данной установке, естественно, не регистрируется.

Описанное явление, обнаруженное в 1967 г., называется *параметрической люминесценцией* или *спонтанным трехфотонным параметрическим рассеянием света*.

В рамках квантовых представлений параметрическое усиление есть стимулированный аналог параметрической люминесценции — присутствие волн *1*, *2* увеличивает вероятность распада фотона $\hbar\omega_3$ в тем большей степени, чем больше интенсивность этих волн. Другими словами, параметрическое усиление и параметрическая люминесценция находятся в такой же связи, как вынужденное и спонтанное испускание фотона возбужденными квантовыми системами. Следует подчеркнуть, что существование спонтанного аналога у вынужденного радиационного процесса отнюдь не специфично для рассмотренных выше процессов, но представляет собой общий тезис квантовой теории излучения.

Параметрическое усиление служит физической основой для создания *параметрических генераторов света*. Принципиальная схема такого генератора показана на рис. 41.13. В резонатор, образованный плоскими зеркалами M_1 и M_2, помещается нелинейный кристалл K, вырезанный таким образом, что для волн, распространяющихся перпендикулярно зеркалам, выполняются векторные условия синфазности $\mathbf{k}_1^o+\mathbf{k}_2^o = \mathbf{k}_3^e$, либо $\mathbf{k}_1^o+\mathbf{k}_2^e = \mathbf{k}_3^e$. Для возбуждения параметрической генерации применяется излучение второй (или третьей) гармоники

рубинового или неодимового лазера, проходящее в направлении синфазности через зеркало M_1. Зеркала M_1, M_2 имеют высокие коэффициенты отражения для волн ω_1, ω_2, и вместе с тем зеркало M_1 должно

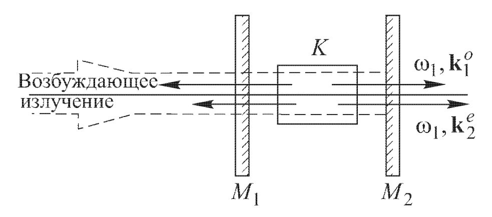


Рис. 41.13. Схема параметрического генератора света

быть прозрачным для возбуждающего излучения. При достаточно высоком уровне возбуждения параметрическое усиление превысит потери из-за неполного отражения от зеркал, поглощения в кристалле и других причин, и возникнет когерентное излучение с частотами ω_1, ω_2. Пороговые мощности возбуждающего излучения равны примерно нескольким МВт/см^2.

Изменение ориентации кристалла (или его температуры, или наложение на кристалл постоянного электрического поля) приводит к смещению частот, для которых выполняется условие синфазности в направлении максимальной добротности, перпендикулярном зеркалам, и в результате частоты генерируемого излучения ω_1, ω_2 изменятся. Таким образом, параметрические генераторы света позволяют получать мощное когерентное излучение с плавной перестройкой его частоты.

В описанных выше параметрических явлениях люминесценции, усиления и генерации света принимали участие фотоны трех частот ω_1, ω_2, ω_3. Известны и более сложные многофотонные параметрические процессы (четырех-, пяти-, шестифотонные и т.д.).

§ 239. Вынужденное комбинационное рассеяние света

В § 162 было выяснено, что в спектре рассеянного света существуют линии, отличающиеся по частоте от падающего излучения на величины, равные частотам ω_i внутримолекулярных колебаний. В случае сравнительно небольших освещенностей, характерных для источников некогерентного излучения, интенсивность комбинационного рассеяния чрезвычайно мала: поток света, рассеянного в 1 см^3, составляет 10^{-6}–10^{-7} часть возбуждающего потока даже для самых сильных линий ($\Delta\nu = \omega_i/(2\pi c) = 992$ см$^{-1}$ для бензола и 1345 см$^{-1}$ для нитробензола). Если же возбуждение осуществляется при освещенностях порядка 10^8–10^9 Вт/см^2, что вполне достижимо с помощью мощных импульсных лазеров, доля рассеянного потока сильно увеличивается и достигает десятков процентов. Такое увеличение интенсивности касается не всех, но только наиболее интенсивных линий комбинационного рассеяния. Помимо линий первого порядка с частотами $\omega \pm \omega_i$, появляются и линии более высоких порядков (частоты $\omega \pm 2\omega_i$, $\omega \pm 3\omega_i$).

Наконец, рассеяние приобретает отчетливо выраженный направленный характер.

Схема опыта показана на рис. 41.14. Пучок лазерного излучения проходит через рассеивающее вещество K и отфильтровывается светофильтром C, так что на экране EE наблюдается только рассеянный свет с измененной частотой. Распределение освещенности экрана схематически изображено в правой части рисунка. Вблизи осевой точ-

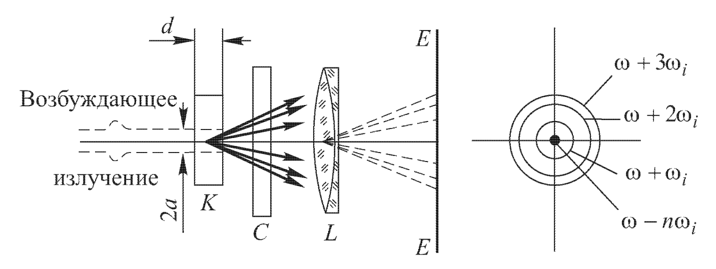


Рис. 41.14. Схема опыта по наблюдению за ВКР

ки, соответствующей направлению возбуждающего пучка, сосредоточено стоксово излучение ($\omega - n\omega_i$, $n = 1, 2, \ldots$). Антистоксовы компоненты ($\omega + n\omega_i$) располагаются в виде концентрических колец, радиус которых увеличивается с ростом смещения частоты. Антистоксовы компоненты наблюдаются только по ходу возбуждающего пучка, тогда как стоксовы компоненты распространяются и в противоположном направлении.

Отмеченные особенности комбинационного рассеяния при высоких уровнях возбуждения имеют место и в жидкостях, и в кристаллах. В случае газов отличие состоит лишь в угловом распределении, — антистоксово рассеяние происходит практически в направлении лазерного пучка, т.е. кольца не наблюдаются. Следует подчеркнуть, что при мощном возбуждении комбинационное рассеяние сопровождается, как правило, другими нелинейными явлениями, — самофокусировкой, вынужденным рассеянием Мандельштама–Бриллюэна, искажением спектра световых импульсов и др. Поэтому результаты наблюдений сильно зависят от экспериментальных условий (от длительности импульса возбуждения, степени и места его фокусировки, от распределения освещенности в сечении пучка и т.п.), и обрисованная выше картина охватывает лишь главные черты явления.

Основной опытный факт — увеличение доли рассеянного света на несколько порядков величины — получает объяснение, если принять во внимание общее положение квантовой теории излучения о существовании стимулированного аналога у любого радиационного процесса [1]). Комбинационное рассеяние, наблюдаемое при малых интенсивностях возбуждения, представляет собой спонтанное испускание фотона $\hbar\omega_s$ ($\omega_s = \omega - \omega_i$) при исчезновении фотона $\hbar\omega$ возбуждаю-

[1]) Это утверждение уже упоминалось в связи с параметрической люминесценцией и параметрическим усилением (см. § 238).

щего света. Поток Φ_s спонтанного комбинационного рассеяния, отнесенный к единице объема и суммированный по всем направлениям, пропорционален освещенности I вещества, создаваемой возбуждающим излучением

$$\Phi_s = CI, \tag{239.1}$$

где C — коэффициент пропорциональности, характеризующий рассеивающую способность вещества и имеющий размерность см$^{-1}$, так как $[\Phi_s] =$ Вт/см^3, $[I] =$ Вт/см^2. Согласно экспериментальным данным для наиболее интенсивных линий комбинационного рассеяния $C \approx 10^{-6}$–10^{-7} см$^{-1}$.

Стимулированный аналог спонтанного комбинационного рассеяния, называемый *вынужденным комбинационным рассеянием* (или, сокращенно, ВКР), также заключается в исчезновении фотона $\hbar\omega$ и испускании фотона $\hbar\omega_s$, но вероятность этого процесса пропорциональна плотности потока и возбуждающего (I) и рассеянного (I_s) излучения. Благодаря этому процессу, рассеянное излучение с частотой ω_s усиливается в рассеивающей среде по экспоненциальному закону, подобно усилению света в среде с инверсной заселенностью уровней в результате эйнштейновского вынужденного испускания (см. § 223).

Как и в последнем случае, ВКР удобно характеризовать коэффициентом усиления α_s рассеянного света на единице длины. Рассуждая по аналогии со случаем вынужденного испускания, коэффициент усиления можно выразить через спектральную плотность спонтанного комбинационного рассеяния света. Несложные вычисления приводят к следующему выражению (см. упражнение 260):

$$\alpha_s = \frac{3}{4\pi}\,\frac{\lambda_s^2 CI}{\Gamma\hbar\omega_s}, \tag{239.2}$$

где λ_s и Γ — длина волны и спектральная ширина линии комбинационного рассеяния. В случае рассеяния излучения рубинового лазера в бензоле ($\lambda = 694$ нм, $\lambda_s = 750$ нм, $\Gamma = 0{,}25 \cdot 10^{12}$ с$^{-1}$, $C = 10^{-6}$ см$^{-1}$, $I = 10^9$ Вт/см^2) оценка значения коэффициента усиления дает $\alpha_s = 20$ см$^{-1}$. Это означает, что при указанных условиях комбинационное рассеяние на длине $d = 1$ см усиливается в $\exp(\alpha_s d) = \exp(20) = 10^{8{,}6}$ раз, т.е. может стать сравнимым по интенсивности с возбуждающим излучением.

Таким образом, в результате вынужденного испускания фотонов $\hbar\omega_s$ интенсивность рассеянного излучения может возрасти на много порядков величины, что объясняет аномально большую интенсивность рассеянного света.

Подчеркнем, что значения интенсивности возбуждающего излучения, необходимые для отчетливого проявления усиления, достижимы лишь с мощными квантовыми генераторами. Поэтому ВКР экспериментально было обнаружено лишь в 1962 г. (Вудбёри, Нг) после создания лазеров с модулированной добротностью, хотя теоретически возможность усиления рассеянного излучения была ясна в 30-х годах. Однако ей не придавали серьезного значения, поскольку требуемые интенсивности возбуждения казались нереальными.

Все сказанное об усилении рассеянного света относилось к стоксовой компоненте. Антистоксово рассеяние есть процесс, обратный стоксовому, и для него имеет место не усиление, а ослабление интенсивности. Причина появления мощного антистоксова излучения иная, и для ее выяснения целесообразно исходить из классических представлений о природе комбинационного рассеяния, изложенных в § 162. Согласно последним комбинационное рассеяние возникает в результате модуляции поляризуемости молекул колебаниями их ядер. Рассмотрим, ради простоты, случай двухатомной молекулы и обозначим через ξ изменение расстояния между ядрами в сравнении с его равновесным значением. Дипольный момент молекулы, индуцированный полем световой волны, записывается в виде

$$p = (\alpha_0 + \mu\,\xi)E, \tag{239.3}$$

где α_0 — поляризуемость молекулы при равновесном положении ядер ($\xi = 0$), а член $\mu\,\xi$ отражает влияние смещений ядер на состояние электронной оболочки, на ее способность к поляризации. Если E — монохроматическое поле с частотой ω, то колебания ядер по гармоническому закону ($\xi \backsim \cos\omega_i t$) приводят к возникновению составляющих дипольного момента, колеблющихся с частотами $\omega \pm \omega_i$, что и вызывает излучение с частотами $\omega \pm \omega_i$, т.е. комбинационное рассеяние света.

Из общих законов механики известно, что взаимодействие двух систем (в данном случае электронной оболочки и ядер) всегда обоюдно, и, следовательно, изменение состояний ядер должно приводить к изменению колебаний электронной оболочки. Действительно, потенциальная энергия индуцированного диполя есть $U(\xi) = -(\alpha_0 + \mu\,\xi)E^2/2$, и со стороны поляризованной полем электронной оболочки на ядра действует сила $F = -\partial U/\partial\xi = \mu E^2/2$. Поэтому уравнение Ньютона, описывающее колебание ядер, имеет вид

$$\ddot{\xi} + \Gamma\dot{\xi} + \omega_i^2\xi = \frac{\mu}{2m}\,E^2, \tag{239.4}$$

где m — приведенная масса ядер, а величина Γ характеризует затухание колебаний и равна спектральной ширине линии комбинационного рассеяния. Таким образом, электронная оболочка молекулы не только испытывает модуляцию в результате колебаний ядер, но и сама, будучи поляризована полем световой волны, воздействует на ядра, вызывая увеличение амплитуды их колебаний.

Поле E в рассеивающей среде можно записать в виде

$$E = A\cos(\omega t + \varphi) + A_s\cos(\omega_s t + \varphi_s), \tag{239.5}$$

где первый член описывает возбуждающее, а второй — рассеянное излучение. Вынуждающая сила в уравнении (239.4), пропорциональная E^2, содержит составляющую, которая изменяется с частотой $\omega - \omega_s = \omega_i$ (резонансную по отношению к колебаниям ядер и играющую поэтому основную роль). Нетрудно рассчитать вынужденные колебания ядер, обусловленные резонансной частью силы (см. упражнение 261):

$$\xi = \xi_0\sin[\omega_i + \varphi - \varphi_s], \quad \xi_0 = \frac{\mu A A_s}{2m\Gamma\omega_i}\,. \tag{239.6}$$

Из этого выражения следует, что амплитуда колебаний ξ_0 пропорциональна AA_s т.е. поля возбуждающего излучения и стоксового рассеяния приводят к резонансной раскачке ядер молекулы. Индуцированные колебания ядер, в свою очередь, приводят к еще большей модуляции поляризуемости молекулы, к усилению стоксова излучения и возникновению у дипольного момента новых спектральных компонент. В самом деле, подставляя ξ из (239.6) в выражение (239.3), находим

$$p = (\alpha_0 + \mu\,\xi)E = \alpha_0 E + p_s + p_\omega + p_{as} + p_{ss}, \tag{239.7}$$

где введены обозначения

$$p_s = -\frac{1}{2}\,\mu\,\xi_0 A\sin(\omega_s t + \varphi_s), \quad p_\omega = \frac{1}{2}\,\mu\,\xi_0 A_s\sin(\omega t + \varphi),$$
$$p_{as} = \frac{1}{2}\,\mu\,\xi_0 A\sin[(2\omega - \omega_s)t + 2\varphi - \varphi_s],$$
$$p_{ss} = -\frac{1}{2}\,\mu\,\xi_0 A_s\sin[(2\omega_s - \omega)t + 2\varphi_s - \varphi].$$

Каждая из пяти составляющих дипольного момента p имеет простой физический смысл. Член $\alpha_0 E$ соответствует «линейной» поляризации среды, определяющей индукцию $D = (1 + 4\pi N\alpha_0)E$. Составляющая p_s, колеблющаяся с частотой ω_s, описывает усиление стоксового излучения: работа поля $E_s = A_s\cos(\omega_s t + \varphi_s)$ в единицу времени есть $W_s = \dot{p}_s E_s$, и ее среднее значение за период колебаний $2\pi/\omega_s$ равно

$$\overline{W}_s = -\frac{\mu^2 A^2 A_s^2}{8m\Gamma\hbar\omega_i}\,\hbar\omega_s.$$

Отрицательность значения $\overline{W}_s$ означает, очевидно, увеличение энергии поля E_s или его усиление, причем $\overline{W}_s$ пропорционально A_s^2 и A^2. Итак, член p_s описывает, в рамках классической теории, вынужденное комбинационное рассеяние, обсуждавшееся выше на квантовом языке.

Работа поля возбуждающей волны определяется членом p_ω и оказывается равной

$$\overline{W}_\omega = \frac{\mu^2 A^2 A_s^2}{8m\Gamma\hbar\omega_i}\,\hbar\omega.$$

Следовательно, возбуждающее излучение совершает положительную работу, которая частично и затрачивается на усиление стоксова рассеяния. Остальная часть работы, равная $\overline{W}_\omega + \overline{W}_s \propto \hbar(\omega - \omega_s) = \hbar\omega_i$, расходуется на возбуждение молекулы, т.е. на переход молекулы в возбужденное колебательное состояние.

Особенность составляющих дипольного момента p_{as} и p_{ss} состоит в том, что частоты их колебаний

$$2\omega - \omega_s = \omega + \omega_i = \omega_{as},$$
$$2\omega_s - \omega = \omega_s - \omega_i = \omega_{ss}$$

отличаются от частот поля, описываемого выражением (239.5): ω_{as} и ω_{ss} суть частоты антистоксова рассеяния и стоксова рассеяния второго порядка. Следовательно, возбуждающий свет и стоксово рассеяние (испытавшее чрезвычайно большое усиление), индуцируя колебания

ядер, образуют в среде ансамбль диполей, которые должны излучать волны с частотами ω_{as}, ω_{ss}. Этим и объясняется большая мощность первой антистоксовой и второй стоксовой компонент рассеянного света.

Помимо указанной, существует и другая причина появления второй стоксовой компоненты: первая стоксова компонента сама достигает большой мощности и начинает играть роль возбуждающего излучения, испытывая рассеяние с уменьшенной на ω_i частотой, т.е. с частотой $\omega_s - \omega_i = \omega - 2\omega_i = \omega_{ss}$. Этот процесс каскадного рассеяния особенно важен потому, что сопровождается усилением, аналогичным усилению первой стоксовой компоненты.

Нетрудно сообразить, что вынужденные колебания ядер, модулируя излучение второй стоксовой и первой антистоксовой компонент, порождают третью стоксову и вторую антистоксову компоненты и т.д. Процесс увеличения числа спектральных компонент рассеянного света ограничивается вследствие конечности запаса источника энергии, т.е. исходного лазерного пучка.

Направленность антистоксова рассеяния (см. рис. 41.14) объясняется фазовыми соотношениями между волнами, испускаемыми диполями p_{as}, расположенными в различных точках рассеивающей среды, т.е. представляет собой интерференционный эффект, аналогичный эффектам, рассмотренным на примерах излучения лазера (см. § 222), генерации гармоник (см. § 236) и параметрической люминесценции и усиления (см. § 238). Как и любой интерференционный эффект, результат сложения вторичных антистоксовых волн зависит от геометрических условий опыта. Примем, что усиление на толщине d рассеивающего слоя велико ($\alpha_s d \gg 1$, это необходимо для наблюдения ВКР). Пусть, кроме того, радиус возбуждающего пучка a меньше радиуса зоны Френеля с номером, равным $\alpha_s d$, т.е. $a^2 < \lambda d \alpha_s d$. При указанных условиях анализ фазы $2\varphi - \varphi_s$ диполя p_{as} показывает (см. упражнение 262), что вторичные антистоксовы волны синфазны для направлений излучения, образующих с волновым вектором возбуждающей волны угол, равный

$$\vartheta = \sqrt{\frac{2(k_s + k_{as} - 2k)}{k_{as}}}\,.$$

Благодаря дисперсии показателя преломления угол ϑ не равен нулю, и антистоксовы компоненты рассеяния имеют максимальную интенсивность вдоль образующих конуса с углом при вершине 2ϑ. В конденсированных средах угол ϑ равен нескольким градусам (для бензола $\vartheta = 2{,}0^\circ$, для нитробензола $\vartheta = 3{,}0^\circ$ при использовании рубинового лазера). В газовых средах показатель преломления мало отличается от единицы, дисперсия ничтожна, и направление синфазности для антистоксова рассеяния в соответствии с опытом практически совпадает с направлением распространения возбуждающего света.

Итак, основные результаты наблюдения вынужденного комбинационного рассеяния, перечисленные в начале параграфа, объясняются с помощью представлений об усилении стоксова рассеяния и об интерференции вторичных антистоксовых волн, возникающих в результате «раскачки» ядер молекул под действием возбуждающего и первого стоксова излучений.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Вывести закон отражения света по Ньютону и по Гюйгенсу.

2. Если свет от Солнца падает на экран через малое отверстие, то на экране получается изображение Солнца (светлый диск, а во время затмения — светлый серп) независимо от формы отверстия. Если же отверстие велико, то мы получаем изображение отверстия. Объяснить это и рассчитать соотношение между размером отверстия D и расстоянием h отверстия до экрана, при котором осуществляются первый и второй случаи (угловой диаметр Солнца $31',5 \approx 0{,}01$ радиана).

Ответ. $D \geqslant h/100$ — изображение отверстия, $D \ll h/100$ — изображение источника; при очень малых отверстиях необходимо учесть влияние дифракции.

3. Определить предельный угол, при котором наступает полное внутреннее отражение при переходе света а) из стекла в воздух; б) из стекла в воду (показатель преломления стекла 1,51, воды 1,33, воздуха 1,00).

Ответ. а) $r = \arcsin 0{,}66$; $r \approx 42^\circ$; б) $r = \arcsin 0{,}88$; $r \approx 62^\circ$.

4. Составить уравнение плоской волны, фронт которой распространяется вдоль линии, составляющей углы α, β, γ с осями координат.

Ответ. $s = a\cos\dfrac{2\pi}{T}\left(t - \dfrac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{v}\right)$.

5. Составить уравнение волны, излучаемой бесконечной нитью (цилиндрическая волна).

Ответ. $s = \dfrac{a}{\sqrt{r}}\cos\dfrac{2\pi}{T}\left(t - \dfrac{r}{v}\right)$.

6. Написать выражение для монохроматической волны в виде показательной функции (в комплексном виде) и выяснить физический смысл комплексной амплитуды.

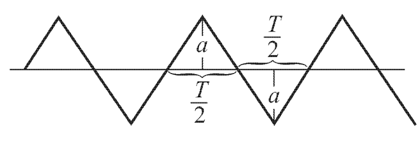


Рис. 1

7. Написать выражение простой периодической функции, изображенной на рис. 1, и разложить ее в ряд Фурье.

8. Почему в опыте с двумя камертонами мы говорим, что модулированное колебание *приблизительно* эквивалентно трем колебаниям, а в разобранном теоретическом примере говорим *точно* о трех монохроматических колебаниях, эквивалентных модулированному? (Обратить внимание на закон изменения силы звука первого камертона.)

Ответ. В опыте закон модуляции отличен от $a = A(1 + \cos 2\pi mt)$.

9. Опыт, аналогичный опыту с камертоном, можно осуществить с обычным частотомером переменного тока. Нормально городской переменный ток имеет 50 периодов. Поэтому, пропуская ток через такой частотомер, мы будем наблюдать отклонение язычка, соответствующее 50 периодам.

а) Какова реакция частотомера, если ток прерывается регулярно три раза в секунду? б) Какова реакция при нерегулярном прерывании или изменении силы тока? Проверить сделанные заключения на опыте.

Ответ. а) Вибрируют язычки 47, 50, 53; б) приходят в колебание и вновь замирают многие язычки.

10. Доказать, что яркость источника в данном направлении B_i численно равна отношению освещенности E площадки (расположенной перпендикулярно к данному направлению) к телесному углу Ω, под которым виден с этой площадки испускающий участок нашего источника, т.е. $B_i = E/\Omega$.

Следствие. Яркость источника не зависит от расстояния.

11. Определить освещенность площадки S, лежащей на расстоянии R от бесконечно большой светящейся плоскости и расположенной параллельно этой плоскости, если яркость плоскости по нормальному направлению есть B и она подчиняется закону Ламберта.

Ответ. $E = \pi B$.

Указание. Решить задачу обычным расчетом и на основании упражнения 10. Объяснить физически, почему в разбираемом случае освещенность не зависит от расстояния.

12. Пусть яркость Солнца $B = 1{,}2 \cdot 10^9$ кд/м^2. Определить освещенность, даваемую Солнцем на поверхности Земли (поглощением в атмосфере пренебречь).

Ответ. $E = 94\,000$ лк.

13. Вывести формулы (12.3) и (12.4) при сложении гармонических колебаний

$$s = s_1 + s_2 = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + a_2 \sin(\omega t + \varphi_2).$$

Указание. Использовать комплексную форму записи гармонического колебания

$$s = \mathrm{Im}\,\{a_1 \exp[i(\omega t + \varphi_1)] + a_2 \exp[i(\omega t + \varphi_2)]\} = \mathrm{Im}\, A \exp[i(\omega t + \theta)].$$

14. *Графический метод изображения гармонических колебаний* (рис. 2). Если вектор $\mathbf{a}_1$ вращается с угловой скоростью ω, начиная с положения, отсчитываемого углом φ_1 от оси Ox, то его проекция на ось Ox есть $s_1 = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$, т.е. изображает гармоническое колебание с амплитудой a_1 и начальной фазой φ_1. Показать, что сумма двух гармонических колебаний может быть найдена путем построения диагонали параллелограмма на векторах $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$, т.е. амплитуда результирующего колебания $A = OP$, а его начальная фаза $\theta = \angle POx$. Найти графически сумму нескольких гармонических колебаний, имеющих соответственно амплитуды и начальные фазы a_1, φ_1; a_2, φ_2; a_3, φ_3 и т.д. (рис. 3).

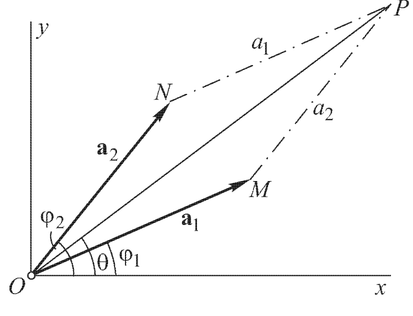


Рис. 2

Рис. 3

15. Могут ли колебания разного периода быть когерентными между собой?

Ответ. Нет, ибо разность фаз между ними непрерывно меняется.

16. При какой начальной разности фаз средняя линия (см. рис. 4.1, с. 60) будет линией нулевой интенсивности?

Ответ. При $\varphi = \pi$. Как осуществить на опыте такое расположение?

17. Показать, что для бизеркал Френеля источник S и два его мнимых изображения S_1 и S_2 лежат на окружности, центр которой O совпадает с точкой пересечения ребра бизеркал с плоскостью, перпендикулярной к этому ребру и проходящей через S.

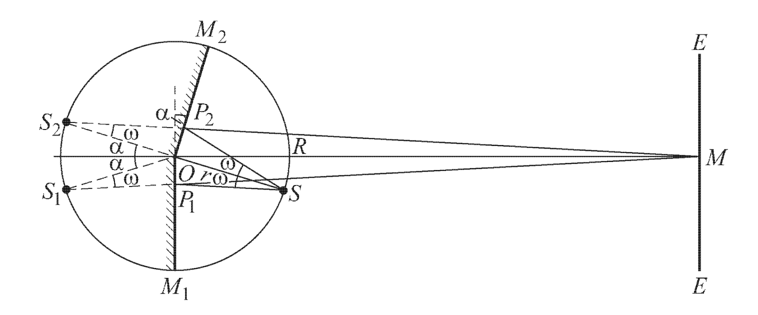


Рис. 4

Пользуясь этим построением, показать, что (рис. 4):

1) $\angle S_1OS_2 = 2\alpha$, если α — угол между зеркалами;

2) $2\omega = 2\alpha R/(r+R)$, где 2ω — апертура интерференции для центральной точки поля M, r — расстояние OS, R — расстояние OM; если $R \gg r$, то $2\omega = 2\alpha$;

3) $2w = 2\alpha \dfrac{r}{r+R}$, где $2w$ — угол схождения интерферирующих лучей для центральной точки поля M;

4) $S_1S_2 = 2l = 2r\alpha$;

5) ширина полосы $\mathscr{B} = \lambda \dfrac{r+R}{r \cdot 2\alpha}$.

Указание. Углы α, ω, w малы.

18. Бизеркала Френеля образуют угол, равный $1'$. Источник находится на расстоянии 10 см, а экран — на расстоянии 1 м от ребра бизеркал. Какова предельная ширина источника (щель, освещенная зеленым светом)?

Ответ. Около 0,4 мм.

19. Какова последовательность чередования цветов в опыте с бизеркалами Френеля, если источник посылает белый свет?

Ответ. Центральная полоса белая, цветные полосы — от фиолетового к красному; полосы высших порядков накладываются друг на друга.

20. Вывести формулы (22.2), (22.3).

Указание. Воспользоваться тождеством

$$\cos\left[\bar{\omega}\tau + \varphi(\tau)\right] = \cos\bar{\omega}\tau\cos\varphi(\tau) - \sin\bar{\omega}\tau\sin\varphi(\tau).$$

Замечание. Произведение $\gamma(\tau)\cos\left[\bar{\omega}\tau + \psi(\tau)\right]$ можно представить в виде

$$\gamma(\tau)\cos\left[\bar{\omega}\tau + \psi(\tau)\right] = \mathrm{Re}\left\{\left[c(\tau) + is(\tau)\right]\exp\left(i\bar{\omega}\tau\right)\right\}.$$

Комбинация $[c(\tau) + is(\tau)] \exp(i\bar{\omega}\tau)$ называется *комплексной степенью когерентности*; ее модуль совпадает с $\gamma(\tau)$, а аргумент — с $\bar{\omega}\tau + \psi(\tau)$.

21. Вычислить степень когерентности для пучков, состоящих из последовательности волновых цугов.

Комплексная степень когерентности (см. упражнение 20) определяется соотношением

$$[c(\tau)+is(\tau)] \exp(i\bar{\omega}\tau) = \exp(i\bar{\omega}\tau)\frac{1}{a^2 t} \int\limits_0^t a(t)a(t+\tau) \exp\{i[\varphi(t+\tau) - \varphi(t)]\}\, dt.$$

Пусть амплитуда постоянна, а цуги имеют одинаковые длительности. В этом случае фазу $\varphi(t)$ можно представить следующим образом:

$$\varphi(t) = \varphi_j, \quad jT \leqslant t \leqslant (j+1)T, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, N-1,$$

где φ_j — случайные числа. Область интегрирования $0, t = NT$ разбиваем на N интервалов длиной T каждый. В пределах j-го интервала фаза $\varphi(t)$ имеет постоянное значение, равное φ_j, а фаза $\varphi(t+\tau)$ принимает два значения, зависящие от соотношения между τ и T. Если $\tau < T$, то в интервале $jT < t < (j+1)T - \tau$ будем иметь $\varphi(t+\tau) = \varphi_j$, а в интервале $(j+1)T - \tau < t < (j+1)T$ получим $\varphi(t+\tau) = \varphi_{j+1}$. Поэтому

$$c(\tau) + is(\tau) = \frac{1}{NT} \sum_{j=0}^{N-1} \left\{ \int\limits_{jT}^{(j+1)T-\tau} dt + \int\limits_{(j+1)T-\tau}^{(j+1)T} \exp[i(\varphi_{j+1} - \varphi_j)]\, dt \right\} =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-1} \left\{1 - \frac{\tau}{T} + \frac{\tau}{T} \exp[i(\varphi_{j+1} - \varphi_j)]\right\}.$$

Если разность фаз $\varphi_{j+1} - \varphi_j$ принимает произвольные случайные значения и если $N \gg 1$, то суммой членов $\exp\{i(\varphi_{j+1} - \varphi_j)\}$ можно пренебречь. Следовательно,

$$s(\tau) = 0, \quad c(\tau) = 1 - \tau/T, \quad \tau < T.$$

Если $\tau > T$, то на всем интервале $jT < t < (j+1)T$ фазы $\varphi(t)$ и $\varphi(t+\tau)$ принимают различные значения (φ_j и φ_{j+1} при $T < \tau < 2T$; φ_j и φ_{j+2} при $2T < \tau < 3T$ и т.д.). Поэтому при $N \to \infty$ имеем $c(\tau) \to 0$, $s(\tau) = 0$.

Изменение знака τ приведет к уже полученным результатам, но τ нужно заменить на $-\tau$. Итак,

$$s(\tau) = 0, \quad c(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau|/T, & |\tau| < T, \\ 0, & |\tau| > T. \end{cases}$$

Пусть теперь N_1 цугов имеет длительность T_1, N_2 цугов — длительность T_2 и т.д. Тогда, при выполнении условия $N_k \gg 1$ получаем

$$c(\tau) = \frac{1}{N} \sum_k N_k \left(1 - \frac{|\tau|}{T_k}\right), \quad N = \sum_k N_k,$$

причем в сумме по k следует учитывать лишь те члены, для которых $T_k > \tau$. Результат суммирования зависит от доли цугов N_k/N с длительностью T_k.

Переходя от дискретного изменения T_k к непрерывному и полагая относительное число цугов с длительностью T в интервале $T, T + dT$ равным

$$\frac{T}{\overline{\overline{T}}}\,\exp\left(-\frac{T}{\overline{\overline{T}}}\right)\frac{dT}{\overline{\overline{T}}}$$

(распределение Пуассона), получим

$$c(\tau) = \int\limits_{|\tau|}^{\infty}\left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right)\frac{T}{\overline{\overline{T}}}\,\exp\left(-\frac{T}{\overline{\overline{T}}}\right)\frac{dT}{\overline{\overline{T}}} = \exp\left(-\frac{|\tau|}{\overline{\overline{T}}}\right).$$

Пусть теперь фаза φ постоянна, а амплитуда $a(t)$ есть случайная величина; тогда

$$c(\tau) = \frac{1}{\overline{\overline{a^2}}}\;\frac{1}{t}\int\limits_0^t a(t)a(t+\tau)\,dt.$$

Для последовательности цугов одинаковой длительности T амплитуду $a(t)$ можно представить в виде

$$a(t) = a_j, \quad jT < t < (j+1)T, \quad j = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Разобьем область интегрирования на интервалы с длительностью T и рассмотрим сначала случай $|\tau| < T$. С помощью рассуждений, аналогичных использованным выше, находим

$$c(\tau) = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\left[\left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right)a_j^2 + \frac{|\tau|}{T}\,a_j a_{j+1}\right]\Big/\overline{a^2}, \quad |\tau| < T.$$

При большом значении N суммирование по j практически эквивалентно усреднению

$$\frac{1}{N}\sum_j a_j^2 = \overline{a^2},$$

$$\frac{1}{N}\sum_j a_j a_{j+1} = \frac{1}{N}\sum_j (a_j - \bar{a} + \bar{a})(a_{j+1} - \bar{a} + \bar{a}) = (\bar{a})^2.$$

В случае $|\tau| > T$ в подынтегральной функции будут только члены $a_j a_{j+k}$, $k \neq 0$ и

$$\overline{a_j a_{j+k}} = (\bar{a})^2.$$

Итак,

$$c(\tau) = \begin{cases} \dfrac{(\bar{a})^2}{\overline{\overline{a^2}}} + \left[1 - \dfrac{|\tau|}{T}\right]\left(1 - \dfrac{(\bar{a})^2}{\overline{\overline{a^2}}}\right), & |\tau| < T, \\[2ex] \dfrac{(\bar{a})^2}{\overline{\overline{a^2}}}, & |\tau| > T. \end{cases}$$

Если изменения амплитуды и фазы происходят одновременно, то вместо $\overline{a_j a_{j+k}}$ будет фигурировать

$$\overline{a_j a_{j+k}\exp\left[i(\varphi_j - \varphi_{j+k})\right]} = 0.$$

22. Вывести формулу (22.11).

Указание. Исходить из выражения

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \left[I_1(\omega - \bar{\omega}) + I_2(\omega - \bar{\omega}) + 2\,\frac{I_1(\omega - \bar{\omega})}{I_1}\,\sqrt{I_1 I_2}\,\cos(\omega\tau) \right] d\omega,$$

используя формулы (22.10) и тождество

$$\cos\omega\tau = \cos[(\omega - \bar{\omega})\tau + \bar{\omega}\tau] = \cos\bar{\omega}\tau\cos(\omega - \bar{\omega})\tau - \sin\bar{\omega}\tau\sin(\omega - \bar{\omega})\tau.$$

23. Вычислить степень когерентности $\gamma(\tau)$ при доплеровском механизме возникновения немонохроматичности и максвелловском распределении атомов по скоростям.

Указание. Воспользоваться формулой Эйлера

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$$

и интегралом Пуассона

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Ответ.

$$\gamma(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(\omega - \bar{\omega})^2}{\Gamma^2}\right)\cos(\omega - \bar{\omega})\tau\,d\omega = \exp\left[-\left(\frac{\Gamma\tau}{2}\right)^2\right].$$

24. Вычислить степень когерентности колебаний в двух точках, освещаемых протяженным некогерентным линейным источником света.

Будем считать, что источник света состоит из светящихся точек, эквидистантно расположенных на отрезке длиной $2b$ (см. рис. 4.21). Каждая светящаяся точка посылает волну, которую в точке P_1 можно записать в виде

$$\frac{A}{d_{j1}}\,\cos(\omega t - kd_{j1} + \varphi_j), \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi c}{\lambda},$$

где A — постоянный множитель, d_{j1} — расстояние от j-й светящейся точки до P_1, φ_j — постоянная фаза. Суммарное колебание в точке P_1, создаваемое всем источником, равно

$$\mathscr{E}_1(P_1, t) = A\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{d_{j1}}\,\cos(\omega t - kd_{j1} + \varphi_j),$$

где N — число светящихся точек. Выражение для колебания $\mathscr{E}_2(P_2, t)$ получается из $\mathscr{E}_1(P_1, t)$ заменой d_{j1} на d_{j2} — расстояние от j-й светящейся точки до P_2. Дальнейшие вычисления удобно проводить, пользуясь комплексной формой записи колебаний (см. упражнение 23), а именно с помощью формулы

$$\cos x = \mathrm{Re}\,e^{ix}.$$

Тогда $\mathscr{E}_1(P_1,t)$ принимает вид

$$\mathscr{E}_1(P_1,t) = A\,\mathrm{Re}\,\exp(i\omega t)\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{d_{j1}}\ \exp[-i(kd_{j1}-\varphi_j)] =$$
$$= \mathrm{Re}\ a_1(P_1)\exp[i(\omega t+\psi_1)],$$
$$a_1(P_1)\exp[i\psi_1(P_1)] = A\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{d_{j1}}\ \exp[-i(kd_{j1}-\varphi_1)].$$

По определению (22.22) имеем

$$c_{12}(\tau)+is_{12}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{I_1I_2}}\ \overline{a_1(P_1)a_2(P_2)\exp(i[\psi_2(P_2)-\psi_1(P_1)])} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{I_1I_2}}\ A^2\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\frac{1}{d_{j1}d_{l2}}\ \exp(i[k(d_{l2}-d_{j1})+\varphi_l-\varphi_j]).$$

Поскольку разности фаз $\varphi_l-\varphi_j$ при $l\neq j$ принимают произвольные значения, то члены с $l\neq j$ дают пренебрежимо малый вклад и ими можно пренебречь. Будем считать, далее, что $d_{j1}\gg b$, $d_{j2}\gg b$, так что в знаменателе для всех j можно положить $d_{j1}=d_{j2}=d$. Наконец, I_1 и I_2 получаются из выражения для $c_{12}(\tau)$ при точке P_1, совпадающей с P_2, и оказываются равными

$$I_1 = I_2 = \frac{NA^2}{d^2}\,.$$

Вследствие сказанного имеем

$$c_{12}(\tau)+is_{12}(\tau) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\exp[ik(d_{j2}-d_{j1})]. \qquad (1)$$

Если d_{j2} и d_{j1} значительно больше, чем размеры источника $2b$ и расстояние $2l$ между точками P_1 и P_2, то

$$d_{j2}-d_{j1} = \frac{2l\,\Delta bj}{d}\,,$$

где $\Delta b = 2b/N$ — расстояние между соседними излучающими атомами. Поскольку $\Delta b\ll\lambda$, сумму по j можно заменить интегралом, вычисление которого дает

$$c_{12}(\tau) = \frac{\sin(2kbl/d)}{2kbl/d}\,, \quad s_{12}(\tau) = 0.$$

Отметим, что при получении соотношения (1) не использовались предположения о расположении точечных источников света и точек P_1, P_2, кроме большой величины d_{j2}, d_{j1}. Поэтому (1) имеет силу при произвольном неравномерном распределении источников, при расположении их на отрезке линии, участке какой-либо поверхности или в ограниченном объеме.

25. Вычислить отношение $\bar{I}^2/\overline{(I)}^2$ для распределения Рэлея.

Ответ.

$$\overline{I^2} = \int_0^\infty \frac{I^2}{\bar{I}}\ \exp\left(-\frac{I}{\bar{I}}\right)dI = 2(\bar{I})^2.$$

26. Как изменяется размер интерференционных колец при замене воздушной прослойки в эталоне Фабри–Перо на стеклянную ($n = 1{,}5$)?

Указание. При аналитическом методе решения следует принять во внимание преломление при выходе света из стекла.

Угловое расстояние между полосами в случае воздушной прослойки

$$\delta i = \frac{\lambda}{2d\sin i}\,.$$

Угловое расстояние между полосами в случае стеклянной прослойки

$$\delta i' = n\,\frac{\cos r}{\cos i}\,\delta r = n\,\frac{\cos r}{\cos i}\;\frac{\lambda}{2d\sin i}\,.$$

Ответ. Радиусы колец увеличиваются в отношении $\operatorname{tg} i/\operatorname{tg} r$.

27. Решить задачу 26 геометрически, находя изменение расстояния между мнимыми источниками (рис. 5).

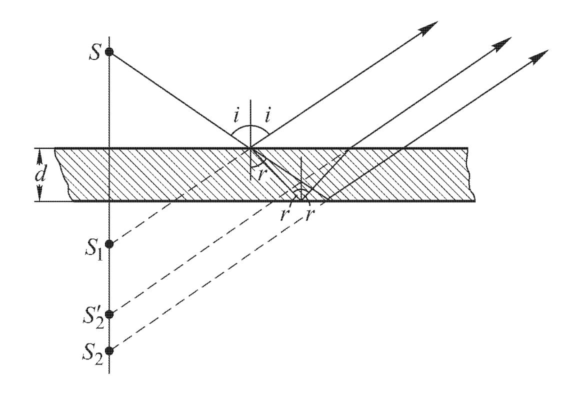


Рис. 5

Для воздуха $S_1S_2 = 2d$. Для стекла $S_1S_2' = 2d\dfrac{\operatorname{tg} r}{\operatorname{tg} i} < 2d$.

Ответ. Радиусы колец увеличиваются в отношении $\dfrac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} r}$.

28. Лучи, падающие под углом $i = 49°$ на пластинку интерферометра Жамена с толщиной $h = 2$ см и показателем преломления $n = 1{,}51$, дают максимум пятого порядка для $\lambda = 500$ нм. Определить угол между пластинками.

Ответ. $\varphi \approx 0{,}6$.

29. Как изменится интерференционная картина, создаваемая пластинкой Люммера–Герке из крона ($n = 1{,}50$), если одна поверхность ее будет погружена в сероуглерод ($n = 1{,}75$)?

Ответ. Картина сместится на $1/2$ полосы.

30. Показать, что поток энергии в стоячей волне равен нулю.

Указание. Использовать теорему Умова–Пойнтинга.

31. Рассмотреть детально, почему в проходящем и отраженном свете картины интерференции в тонких пленках дополняют друг друга (проследить разности фаз, например, для колец Ньютона, принимая во внимание потерю фазы на границе).

32. Две немонохроматические волны от независимых источников не дают интерференции. Однако каждую из них можно представить как совокупность монохроматических волн (метод Фурье). Каждая пара таких монохроматических волн одного периода способна дать устойчивую интерференционную картину. Объяснить, почему наши волны не дают интерференции, хотя все их компоненты попарно интерферируют. (Обратить внимание на результат интерференции двух пар компонент, близких по частоте.)

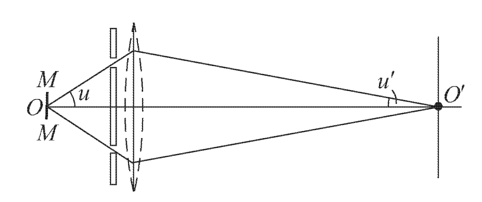


Рис. 6

33. *Опыт Шрёдингера.* Для наблюдения интерференции пучков, расходящихся под большими углами, Шрёдингер пользовался расположением, указанным на рис. 6. Источником служила накаленная волластонова нить MM диаметром $2d = 1$ мкм. Каков предельный угол u, при котором еще возможно наблюдение интерференции?

Ответ. Полосы смазываются при условии $2d \sin u > \lambda$, т.е. $u \approx 30°$.

34. Вывести из принципа Ферма закон отражения света от плоского зеркала и показать, что в данном случае время минимально.

35. Поверхность, представляющая геометрическое место точек A, для которых сумма оптических путей до двух сопряженных точек P и P' есть постоянная, носит название *апланатической.* Такой отражающей поверхностью является эллипсоид вращения по отношению к своим фокусам. Апланатическая преломляющая поверхность была указана Декартом (1637 г.): это — поверхность вращения, сечение которой (картезианский овал) плоскостью, проходящей через ось, определяется условием

$$nAP + n'AP' = \text{const}$$

для всех A (рис. 7).

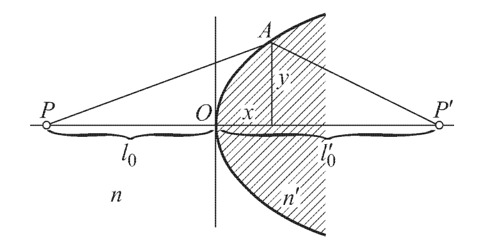


Рис. 7

Найти уравнение картезианского овала (параметрами задач являются расстояния $PO = l_0$ и $OP' = l_0'$ и показатели преломления сред n и n'). Указать на чертеже поверхности, для которых применимо требование минимума и максимума при формулировке теоремы Ферма.

36. Построить диаграмму расположения векторов $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{v}$ при отражении от границы стекло–вода, стекло–воздух и воздух–стекло.

37. При интерференции на клине с малым углом φ (рис. 8) можно достичь гораздо большей яркости, чем с бизеркалами Френеля. Почему?

Ответ. Апертура перекрывающихся пучков 2α определяется размерами клина и ее можно сделать большой; апертура интерференции определяется углом клина и равна 2φ, т.е. ее можно сделать малой, а следовательно, ширину источника большой.

38. При изготовлении бипризмы Френеля довольно трудно выполнить из стекла бипризму с углом при вершине, почти равным $180°$; поэтому

нередко обходят затруднение следующим образом: приготовляют бипризму из стекла ($n = 1{,}52$) с углом, заметно отличающимся от 180° (например, 170°), и дополняют прибор плоским стеклом, склеенным вместе с бипризмой так, что образуется полость (рис. 9). Эту полость заполняют бензолом ($n = 1{,}50$).

Рассчитать эквивалентную бипризму из стекла.

Ответ. $\alpha = 179^\circ 44'$.

39. Поместим линзу, сделанную из стекла, в жидкость, обладающую таким же показателем преломления и налитую в плоскую кювету (рис. 10). Пусть на кювету падает плоская волна. Нарисовать, пользуясь принципом таутохронизма, вид фронта волны по другую сторону кюветы.

40. Нарисовать приблизительный вид фронта волны (характер фронта --- плоский, выпуклый, вогнутый) для предыдущего упражнения в том случае, когда налитая жидкость обладает показателем преломления бóльшим, меньшим и равным показателю преломления вещества линзы.

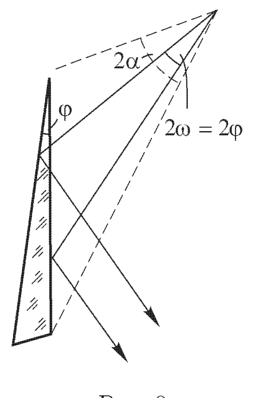


Рис. 8

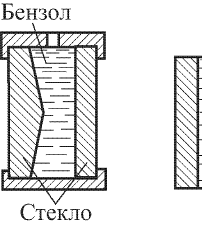


Рис. 9

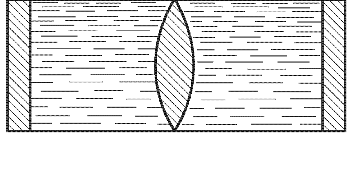


Рис. 10

41. Линза из крона ($n = 1{,}50$) лежит на пластинке, одна половина которой сделана из того же крона, а другая — из флинта с показателем преломления 1,70. Прослойки между линзой и пластинкой заполнены анилином ($n = 1{,}58$). Описать характер ньютоновых колец в данном расположении.

42. Осуществить опыт с тонкой пленкой (нефть на воде или мыльный пузырь) и проследить на опыте локализацию полос на поверхности пленки и изменение окраски при изменении угла наблюдения.

43. Рассчитать изменение видимости интерференционных полос в установке Френеля по мере увеличения ширины источника.

Указание. Изображение источника шириной $2b$ разбиваем на узкие полоски dx ($\ll\lambda$), каждая из которых может дать максимальную освещенность $I_0\,dx$. Для точки N на расстоянии h от центрального максимума M (рис. 11 *а*) освещенность, создаваемая участком dx у середины источника, определяется выражением

$$dE = I_0\,dx\left(1 + \cos\frac{4\pi l h}{\lambda D}\right) = I_0\,dx\left(1 + \cos\frac{2\pi h}{\mathscr{B}}\right),$$

где для краткости через $\mathscr{B}$ обозначено отношение $\lambda D/2l$ (ширина интерференционной полосы). Освещенность, создаваемая в N участком dx, расположенным влево от S_0 на расстоянии x, равна

$$dE = I_0\,dx\left(1 + \cos\frac{2\pi(h - x)}{\mathscr{B}}\right).$$

Для полной освещенности в точке N получим

$$E = \int_{-b}^{+b} I_0 \left(1 + \cos\frac{2\pi(h-x)}{\mathscr{B}}\right) dx = I_0 \cdot 2b + I_0 \,\frac{\mathscr{B}}{\pi}\, \sin\frac{2\pi b}{\mathscr{B}}\, \cos\frac{2\pi h}{\mathscr{B}}\,.$$

Первый член этой суммы дает для всего экрана (для любого h) постоянную освещенность (фон), а второй — периодически меняющуюся в зависимости от h (максимумы и минимумы). С ростом ширины источника $2b$ фон непрерывно растет, а величина максимумов не может превосходить $I_0\mathscr{B}/\pi$. Таким образом, с увеличением ширины источника контрастность непрерывно падает. Отношение

$$V = \frac{E_{\max} - E_{\min}}{E_{\max} + E_{\min}}$$

носит название *видимости* полос,

$$V = \frac{\mathscr{B}}{2\pi b}\,\left|\sin\frac{2\pi b}{\mathscr{B}}\right|.$$

По мере увеличения величины $2b$ видимость стремится к нулю, проходя через ряд максимумов и минимумов. Изменение видимости в зависимости от $2b/\mathscr{B}$ показано схематически на рис. 11 *б*.

44. Схема получения колец Ньютона изображена на рис. 12. Как изменятся радиусы колец при заполнении пространства *1–2* вместо воздуха веществом с бóльшим коэффициентом преломления, например, водой ($n = 1{,}33$)? (Опыт Ньютона.)

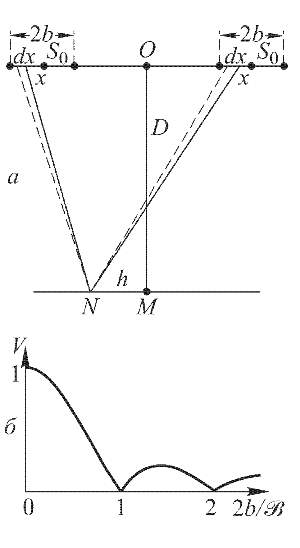


Рис. 11

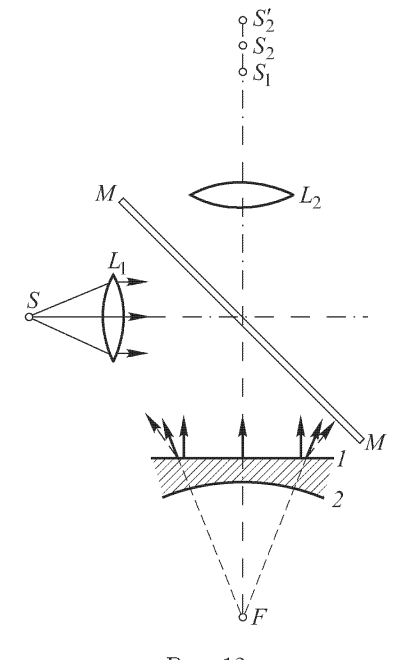


Рис. 12

Ответ. Радиусы соответствующих колец уменьшатся, так как уменьшается λ. Как согласовать этот ответ с ответами к задачам 26 и 27?

Указание. В случае воздушной прослойки кольца получаются при наложении волны, отраженной от *1* (параллельный пучок), и волны, отраженной от *2* (расходящийся пучок, исходящий из мнимого фокуса F выпуклого зеркала *2*). Линза L_2 дает два мнимых изображения источника S_1 (параллельный пучок, отраженный от *1*, собран в фокусе линзы L_2) и S_2 (изображение F). Размер колец определяется расстоянием S_1S_2. При заполнении пространства *1–2* водой лучи, отраженные от *2*, преломляясь в слое воды (рассеивающая линза), станут *более расходящимися*, и линза L_2 соберет их в точке S_2', так что $S_2'S_1 > S_2S_1$, следовательно, кольца станут мельче.

45. Какой вид будут иметь ньютоновы кольца, если пластина сделана из двух частей (крон $n=1{,}50$ и флинт $n=1{,}75$), линза — из крона ($n=1{,}50$), а пространство между ними заполнено сероуглеродом ($n = 1{,}62$) (рис. 13).

Ответ. Темные полукольца над кроном сойдутся со светлыми полукольцами над флинтом, и наоборот.

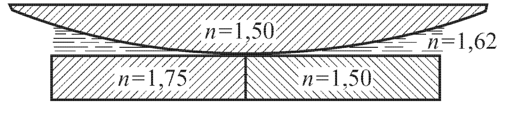


Рис. 13

46. Установить с помощью принципа взаимности, как меняются условия отражения и преломления при изменении порядка расположения сред (задача Стокса). Среды предполагаются непоглощающими.

Принцип взаимности: при обращении всех лучей, выходящих из системы, на обратные, падающий луч также обращается.

Указание (рис. 14). Пусть на границе I–II амплитудный коэффициент отражения равен ρ, коэффициент пропускания τ (для амплитуд), а на границе II–I — соответственно ρ' и τ'.

Рис. 14

Прямой ход: амплитуда падающего луча (EO) равна A, амплитуда отраженного (OB) равна $A\rho$, амплитуда преломленного (OC) равна $A\tau$.

Обращение: при падении света вдоль CO луч преломленный (вдоль OE) имеет амплитуду $A\tau\tau'$, луч отраженный (вдоль OD) — амплитуду $A\tau\rho'$, при падении света вдоль BO луч отраженный (вдоль OE) — амплитуду $A\rho^2$, луч преломленный (вдоль OD) — амплитуду $A\rho\tau$. По принципу взаимности

$$A\tau\tau' + A\rho^2 = A, \quad A\tau\rho' + A\rho\tau = 0,$$

т.е.

$$\rho = -\rho' \quad \text{и} \quad \tau\tau' = 1 - \rho^2.$$

Ответ. При изменении порядка расположения сред коэффициент отражения остается неизменным по величине и меняется по знаку, $\rho' = -\rho$ (фаза изменяется на π). Коэффициент пропускания изменяется: $\tau' = (1-\rho^2)/\tau$. То обстоятельство, что порядок расположения сред меняет τ при неизменном ρ, есть результат изменения сечения пучка при преломлении. Из зако-

на сохранения энергии нетрудно показать, что при $|\rho| = |\rho'|$ должно быть $\tau\tau' = (1 - \rho^2)$ (ср. также упражнение 191).

47. Принимая интенсивность падающего пучка за 1, вывести формулу распределения интенсивности в проходящем ($I_{\text{прох}}$) и отраженном ($I_{\text{отр}}$) свете при многократной интерференции на плоскопараллельной пластинке, полагая, что коэффициент поглощения $A = 0$, так что $T + R = 1$.

Ответ.

$$I_{\text{прох}} = \frac{T^2}{(1-R)^2} \, \frac{1}{1 + \dfrac{4R}{(1-R)^2} \, \sin^2 \dfrac{\psi}{2}} = \frac{1}{1 + \dfrac{4R}{(1-R)^2} \, \sin^2 \dfrac{\psi}{2}},$$

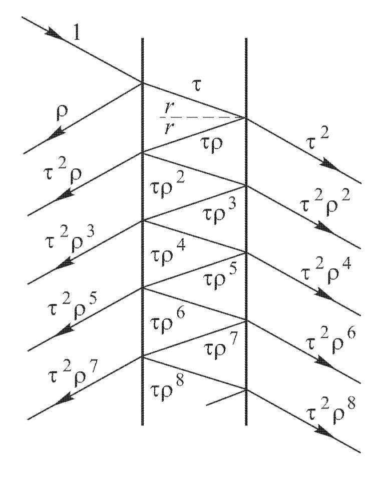


Рис. 15

$$I_{\text{отр}} = \frac{\dfrac{4R}{(1-R)^2} \, \sin^2 \dfrac{\psi}{2}}{1 + \dfrac{4R}{(1-R)^2} \, \sin^2 \dfrac{\psi}{2}}.$$

У к а з а н и е. Полагая коэффициент отражения для амплитуды равным ρ, а коэффициент пропускания — τ (коэффициент поглощения предполагается равным нулю, $\alpha = 0$), так что $R = \rho^2$ и $T = \tau^2$ и $R + T = 1$, найдем амплитуды проходящих (0, 1, 2, 3, ...) и отраженных ($0'$, $1'$, $2'$, $3'$, ...) лучей (рис. 15). В соответствии с этим световое колебание в проходящем пучке дается выражением $\tau^2\rho^{2k} \exp[i(\omega t - k \cdot 2\pi m)]$, где k — номер пучка ($k = 0, 1, 2, \ldots$), а m — порядок интерференции. Для отраженных пучков имеем $\tau^2\rho^{2k-1} \exp[i(\omega t - 2\pi m)]$, где $k = 1, 2, 3, \ldots$ Для нулевого отраженного пучка ($k = 0$) имеем $\rho \exp[i(\omega t + \pi)] = -\rho \exp(i\omega t)$ (учет потери полуволны по сравнению с проходящим пучком вследствие разницы в условиях отражения).

Итак, результирующее колебание:

для проходящего пучка

$$A = \sum_{k=0}^{k=\infty} \tau^2 \rho^{2k} \exp[i(\omega t - k \cdot 2nm)] = \frac{T}{1 - R\exp(-i \cdot 2\pi m)} \, \exp i\omega t,$$

для отраженного пучка

$$B = -\exp(i\omega t) \left\{ \rho - \tau^2 \sum_{k=1}^{k=\infty} \rho^{2k-1} \exp[-ik \cdot 2\pi m] \right\} =$$

$$= -\exp(i\omega t)\rho \, \frac{1 - (T + R)\exp(-i \cdot 2\pi m)}{1 - R\exp(-i \cdot 2\pi m)} = -\exp(i\omega t)\rho \, \frac{1 - \exp(-i \cdot 2\pi m)}{1 - \mathrm{Re}\,\exp(-i \cdot 2\pi m)}.$$

Переходя к интенспвностям, т.е. образуя $I_{\text{прох}} = AA^*$ и $I_{\text{отр}} = BB^*$, найдем:

$$I_{\text{прох}} = \frac{T^2}{1 + R^2 - 2R\cos 2\pi m} = \\ = \frac{T^2}{(1-R)^2}\,\frac{1}{1 + \dfrac{4R}{(1-R)^2}\,\sin^2\dfrac{\psi}{2}} = \frac{1}{1 + \dfrac{4R}{(1-R)^2}\,\sin^2\dfrac{\psi}{2}},$$

и

$$I_{\text{отр}} = R\,\frac{2[1-\cos 2\pi m]}{1 - 2R\cos 2\pi m + R^2} = \frac{\dfrac{4R}{(1-R)^2}\,\sin^2\dfrac{\psi}{2}}{1 + \dfrac{4R}{(1-R)^2}\,\sin^2\dfrac{\psi}{2}},$$

где $\psi = 2\pi m$. Отсюда $I_{\text{прох}} + I_{\text{отр}} = 1$ для любого направления (любого ψ или m), т.е. сумма интенсивностей проходящего и отраженного пучков равна интенсивности падающего в соответствии с принципом сохранения энергии, ибо мы пренебрегаем поглощением ($A = 0$).

Примечание. При выводе мы производили суммирование от 0 до ∞, т.е. принимали число интерферирующих пучков бесконечно большим. Это соответствует предположению о неограниченных размерах интерференционного прибора или допущению, что падение интенсивности складываемых пучков (зависящее от R) идет достаточно быстро, чтобы можно было считать пучки высоких порядков исчезающе слабыми.

48. Изобразить графически взаимное расположение $I_{\text{прох}}$ и $I_{\text{отр}}$ в зависимости от R при многократной интерференции (см. упражнение 47). С увеличением R общая доля отраженного света возрастает по сравнению с прошедшим, но так, что сумма $I_{\text{отр}} + I_{\text{прох}}$ остается постоянной и равной интенсивности падающего пучка (рис. 16).

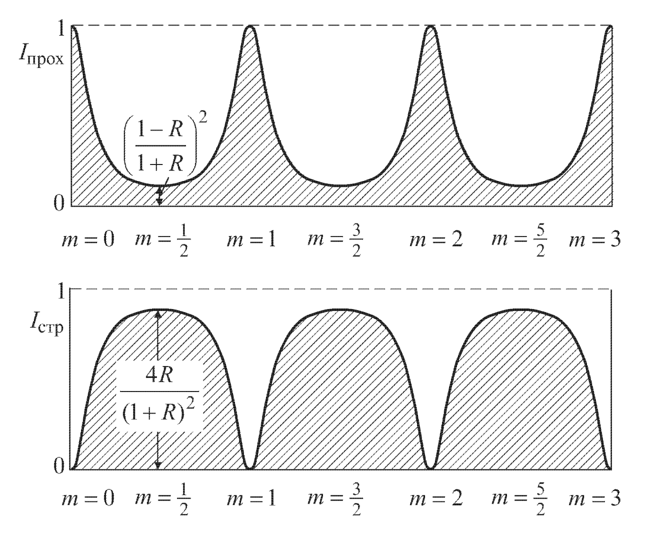


Рис. 16

49. Полосы разного порядка в пластинке Люммера–Герке располагаются по обе стороны пластинки. 1) Где лежат полосы высших порядков? 2) Как зависит ширина полосы от порядка интерференции, от длины волны, от толщины пластинки?

Ответ. 1) $m\lambda = 2h\sqrt{n^2 - \cos^2\varepsilon}$, где m — порядок интерференции, а ε — угол, составляемый выходящим лучом с поверхностью пластинки; таким образом, с увеличением порядка полосы удаляются от пластинки (ε растет).

2) $\Delta\varepsilon = \dfrac{\lambda\sqrt{n^2 - 1}}{2h\varepsilon}$, т.е. ширина полос увеличивается с длиной волны и уменьшается при увеличении толщины пластинки и порядка интерференции.

50. Полосы разного порядка в эталоне Фабри–Перо имеют вид концентрических колец. 1) Где лежат полосы высших порядков — ближе к центру или дальше от него? 2) Как зависит ширина полосы от порядка интерференции, длины волны, толщины эталона h?

Ответ. 1) $m\lambda = 2h\cos\varphi$, где φ — угол между выходящим лучом и нормалью к пластинке. Таким образом, с увеличением порядка $(+\Delta m)$ полосы приближаются к центру (φ убывает).

2) $\Delta\varphi = \dfrac{\lambda}{2h\sin\varphi}$, т.е. ширина полос увеличивается с длиной волны и увеличением порядка интерференции и уменьшается при увеличении толщины эталона.

51. Интерференционная картина наблюдается и при прохождении света сквозь тонкую пленку. При этом картина имеет вид, дополнительный к картине в отраженном свете (максимумы в местах минимумов и наоборот), цвета (в случае белого света) гораздо менее насыщенные (белесоватые). Показать ход интерферирующих лучей в проходящем свете и объяснить указанные особенности.

У к а з а н и е. Учесть многократное отражение; принцип сохранения энергии или потерю полуволны при каждом отражении; соотношение интенсивностей проходящего и отраженного света.

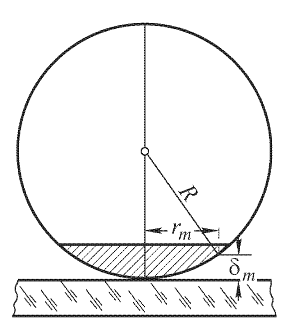
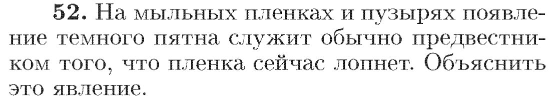


Рис. 17


52. На мыльных пленках и пузырях появление темного пятна служит обычно предвестником того, что пленка сейчас лопнет. Объяснить это явление.

У к а з а н и е. Найти интерференционное условие образования темного пятна.

53. Рассчитать радиус m-го темного кольца Ньютона (рис. 17).

Ответ. $r_m^2 = (2R - \delta_m)\delta_m \approx 2R\delta_m$ при $\delta m = m\lambda/2$, т.е. $r_m^2 = mR\lambda$.

54. Если смотреть на поверхность зеркала, покрытого мелкой пылью, то отчетливо видны интерференционные кольца в результате интерференции между лучами, рассеянными пылинкой, и ее отражением в зеркале. Каким образом возникает необходимая незначительная разность хода, несмотря на большую толщину зеркала? Почему этот опыт удается только с очень тонкой пылью?

Ответ. См. рис. 18; обратить внимание на величину апертуры интерференции (BSO) в этом случае.

55. *Отражение света от шероховатой поверхности* (рис. 19). При падении света на шероховатую поверхность получается неправильное и диффузное отражение. Однако если угол падения близок к 90°, то можно наблюдать зеркальное отражение (изображение) в матовой поверхности и притом в красноватых оттенках. Объяснить явление.

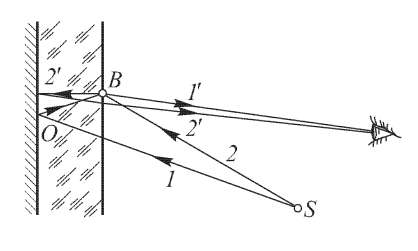


Рис. 18

Указание. Разность хода при правильном отражении от вершины и основания неровностей равна $2h\cos i$, где h — высота неровности, i — угол падения. Если $2h\cos i = m\lambda/2$, где m — нечетно, то в направлении правильного отражения света не будет, а он пойдет по другому направлению i'. При разнообразных h свет отражается по разнообразным направлениям i' (диффузно). Если $h\cos i \ll \lambda$, то условие $2h\cos i = m\lambda/2$ невозможно, и будет наблюдаться правильное отражение. Чем больше λ, тем большее h и меньшее i достаточно для этого. Отсюда следует, что поверхность зеркальна, когда h мало́ по сравнению с λ; для рентгеновских лучей λ — порядка атомных расстояний, и зеркальная полировка невозможна. Лишь при падении под очень малым скользящим углом удалось наблюдать зеркальное отражение рентгеновских лучей (Комптон, 1923 г., угол скольжения равен $10–20'$, $\lambda = 1{,}28$ Å).

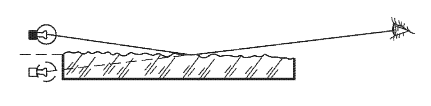


Рис. 19

56. *Прохождение света через матовую поверхность* (рис. 20). Плоская волна, проходя через матовую поверхность, становится диффузной (матовое стекло «непрозрачно»). Покрывая матовое стекло водой или, лучше, бензолом или глицерином ($n \approx 1{,}50$), просветляем его. Объяснить явление. При каких размерах (h) неровностей стекло будет матовым?

Указание. Рассмотреть разность хода при прохождении через неровности матового стекла.

Ответ. $h(n-1) > \lambda/2$.

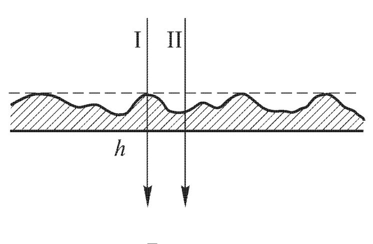


Рис. 20

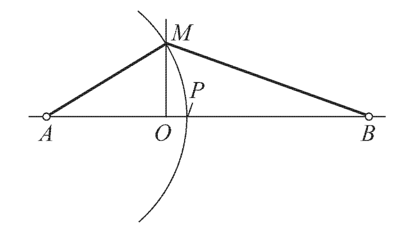


Рис. 21

57. Вычислить радиус центральной зоны Френеля для случая, изображенного на рис. 21, где $AP = a$, $PB = b$, $MB = b + \lambda/2$, $MO = r$.

Ответ. $r = \sqrt{\dfrac{ab}{a+b}\,\lambda}$. (Пренебречь членами с λ^2 по сравнению с λ.)

58. Вычислить радиус центральной зоны Френеля для случая плоской волны геометрически и как частное решение задачи 57.

Ответ. $r = \sqrt{b\lambda}$.

59. Разобрать задачу о зеркальном отражении и преломлении плоской волны на плоской границе по методу зон Френеля.

Указание. Разбить границу на плоские зоны шириной a, перпендикулярные к плоскости падения.

Если волна падает под углом φ, отражается в первую среду под углом ψ и проходит во вторую под углом χ, то для лучей, отраженных от границы зон, разность хода

$$\Delta_r = a(\sin\varphi - \sin\psi),$$

а для преломленных

$$\Delta_d = a(n_1 \sin\varphi - n_2 \sin\chi).$$

Можно всегда выбрать a так, чтобы $\Delta_r = \lambda$, т.е. чтобы волны, отраженные левой и правой половинами каждой зоны, взаимно уничтожались. Только для направления $\sin\varphi = \sin\psi$, т.е. $\varphi = \psi$, такой выбор ширины зоны невозможен. По этому направлению свет будет отражаться. Аналогично для преломленных волн единственное направление, по которому свет при любом разбиении поверхности на зоны не будет уничтожен, удовлетворяет условию $n_1 \sin\varphi - n_2 \sin\chi = 0$, т.е. закону преломления.

60. Рассчитать амплитуду колебания в точке B (см. рис. 21), обусловленную действием первой зоны Френеля.

Указание. Результирующая амплитуда пропорциональна площади первой зоны, которая согласно упражнению 58 равна $\pi b\lambda$. Но так как вторичные волны от разных участков первой зоны доходят до точки B с известной разностью фаз, то их действие, согласно рис. 8.8, уменьшается в отношении $2/\pi$.

Ответ. Амплитуда пропорциональна $2b\lambda$.

61. Рассчитать амплитуду элементарной вторичной волны Френеля–Гюйгенса.

Указание. a_0 пропорционально амплитуде A колебания, дошедшего до элемента ds, и площади этого элемента, т.е.

$$a_0 = cA\,ds.$$

Для определения коэффициента c сравним непосредственное действие плоской волны $A\sin(\omega t - \varphi)$ в точке B (см. рис. 21) и действие, рассчитанное по методу Френеля, когда в качестве вспомогательной поверхности выбран фронт плоской волны. Расстояние от P до B есть b.

1. Непосредственный расчет для точки B: $A\sin(\omega t - \varphi - kb)$, т.е. амплитуда в точке B должна равняться A и фаза $-(\varphi + kb)$.

2. Расчет по методу Френеля. Согласно (33.1) амплитуда в B примерно равна a_0/b (ибо $MB \approx b$), т.е. $cA\,ds/b$. Согласно упражнению 60 действие первой зоны с учетом ее площади и разности фаз от разных ее участков есть $cA \cdot 2b\lambda/b = 2cA\lambda$. Так как действие в точке B равно *половине* действия первой зоны, то искомая амплитуда в точке B есть $cA\lambda$.

Сравнение с непосредственным расчетом дает $cA\lambda = A$, т.е.

$$c = \frac{1}{\lambda}.$$

Итак, от каждого элемента ds идет сферическая волна

$$\frac{a_0}{r}\,\sin(\omega t - \varphi - kr) = \frac{A\,ds}{r\lambda}\,\sin(\omega t - \varphi - kr).$$

62. Определить разность хода параллельных лучей, отражающихся от плоского зеркала.

Ответ. Нуль.

63. Если круглое отверстие (например, ирисовая диафрагма) увеличивается таким образом, что размер его, ранее равнявшийся одной зоне, доходит до двух зон, то в соответствующей точке B освещенность значительно уменьшается, падая почти до нуля, хотя поток световой энергии через увеличившееся отверстие возрастает почти в два раза. Каким образом согласуются эти два факта?

Указание. Принять во внимание распределение энергии по всей дифракционной картине.

64. Пусть в опыте Араго–Пуассона источником света служит не точка, а маленькое светящееся тело, например, крестик. Будет ли в центре геометрической тени наблюдаться изображение источника или светлая точка?

Ответ. Изображение источника.

65. При разделении поверхности волны на кольцевые зоны мы пришли к выводу, что фаза, определенная по методу Френеля, отличается от истинной на $\pi/2$, а разбивая поверхность волны на меридианные лунки, мы сделали заключение, что различие в фазе между вычисленной и действительной волнами равняется $\pi/4$. Объяснить причину кажущегося расхождения.

Указание. При сравнении надо исходить из одного и того же начального направления вектора, обусловленного элементарным участком у полюса волны. В методе же лунок начальным направлением считают направление вектора, обусловленного действием меридиональной полоски. Нужно ввести соответствующую поправку, разбив полоску на зоны, аналогичные меридиональным.

66. *Теорема Бабине.* Экраны и отверстия называются дополнительными, если они совпадают по форме, размерам и расположению. Показать, что дифракционная картина, обусловленная дополнительными экранами и отверстиями, совпадает для всех точек фокальной плоскости, кроме области A, соответствующей изображению источника S в отсутствие дифракции.

Указание. Обратить внимание, что во всех областях, кроме A, господствует темнота, если волна ничем не ограничена, т.е. нет ни экранов, ни отверстий. Если в какой-либо точке амплитуда при наличии экрана есть α, а при наличии дополнительного отверстия есть β, то $\alpha + \beta = 0$.

67. Найти графически и аналитически амплитуду результирующего колебания при фраунгоферовой дифракции на щели при косом падении.

68. Определить значения угла φ, соответствующего максимумам амплитуд при дифракции Фраунгофера на одной щели.

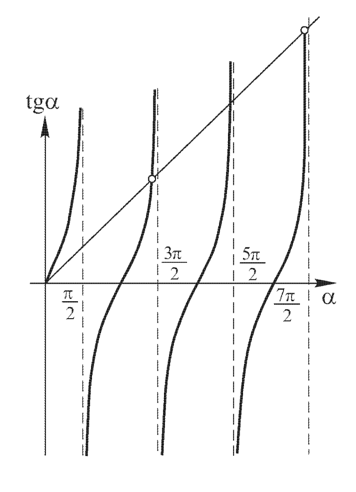


Рис. 22

Указание. Условие максимума приводит к трансцендентному уравнению $\operatorname{tg}\alpha = \alpha$, где $\alpha = (b\pi/\lambda)\sin\varphi$, решаемому графически (рис. 22)

и имеющему корни при

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 1{,}43\pi, \quad \alpha_3 = 2{,}46\pi, \alpha_4 = 3{,}47\pi, \quad \alpha_5 = 4{,}47\pi \ldots$$

69. Вычислить значения амплитуды и интенсивности при дифракции Фраунгофера на одной щели для значений $\alpha = (b\pi/\lambda)\sin\varphi$ через каждые 30° и построить соответствующие графики.

70. Найти углы φ, определяющие положения минимумов, если плоская волна падает на щель ширины b по направлению, составляющему угол ψ с нормалью к плоскости щели.

Ответ. $\sin\varphi = \sin\psi + m\lambda/b$, где m — целые числа.

71. При увеличении щели вдвое проходящий световой поток увеличится вдвое. С другой стороны, амплитуда при этом возрастает вдвое, так что интенсивность должна возрасти вчетверо. Как разрешается этот кажущийся парадокс?

Ответ. См. упражнение 63.

72. Рассчитать дифрагировавшую волну при гауссовом распределении амплитуды на плоском волновом фронте (см. рис. 9.8 *а*)

$$a(x, y) = a_0 \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2w_0^2}\right).$$

У к а з а н и е. Искомое поле определяется интегралом Френеля–Кирхгофа

$$s(x, y) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{a(x', y')}{r} \cos\left(\omega t - kr + \frac{\pi}{2}\right) dx'\, dy',$$

$$r = \sqrt{z^2 + (x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

Множитель $1/r$ следует заменить на $1/z$, а в аргументе косинуса положить приближенно

$$r \approx z + \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{2z},$$

представить косинус по формуле Эйлера

$$\cos\alpha = \frac{e^{\imath\alpha} + e^{-\imath\alpha}}{2}$$

и воспользоваться интегралом

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{\xi'^2}{2w_1^2} - \frac{(\xi - \xi')^2}{2w_2^2}\right] d\xi' = \sqrt{2\pi}\,\frac{w_1 w_2}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2}} \exp\left[-\frac{\xi^2}{2(w_1^2 + w_2^2)}\right].$$

Ответ.

$$s = \frac{2\pi}{k}\, a_0 \frac{w_0^2}{\sqrt{w_0^4 + (z/k)^2}} \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{2w^2}\right] \cos\left[\omega t - k\left(z + \frac{x^2 + y^2}{2R}\right) + \alpha\right],$$

$$R = z + \frac{(kw_0^2)^2}{z}, \quad w^2 = w_0^2 + \left(\frac{z}{kw_0}\right)^2, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{z}{kw_0^2}.$$

73. Показать, что если период решетки d соизмерим с шириной щели b, так что $d = nb$, то в спектре решетки исчезают все максимумы, номера которых кратны числу n.

74. Вывести формулу (46.1)

$$A = A_0 \frac{\sin\alpha}{\alpha} \frac{\sin N\beta}{\sin\beta}.$$

Указание. При выводе надо иметь в виду, что распределение амплитуд, определяемое действием одной щели (ширина щели $b \gg \lambda$), есть $A_0 \frac{\sin\alpha}{\alpha} = f(\alpha)$, где $\alpha = \frac{\pi b}{\lambda} \sin\varphi$, $f(\alpha)$ — медленно меняющаяся функция от φ, и при изменении φ в не очень широких пределах ее можно считать постоянной.

Для получения действия всей решетки надо суммировать действия отдельных щелей, принимая во внимание, что разность фаз от двух соседних щелей есть

$$\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\varphi = 2\beta.$$

Таким образом, действие n-й щели в точке с координатами x, z (ось y расположена вдоль штрихов решетки) выразится фактором

$$u_n = f(\alpha) \exp\left[i\{k(x\sin\varphi + z\cos\varphi) + n\Phi\}\right],$$

$$u = \sum_0^{N-1} u_n = f(\alpha) \exp\left[ik(x\sin\varphi + z\cos\varphi)\right] S,$$

где

$$S = \sum_0^{N-1} \exp(in\Phi) = \frac{1 - \exp(iN\Phi)}{1 - \exp(i\Phi)} = \frac{\exp(iN\Phi/2)}{\exp(i\Phi/2)} \frac{\sin(N\Phi/2)}{\sin(\Phi/2)}.$$

Множители, содержащие мнимые показатели, определяют фазу результирующей волны, а остальные — ее амплитуду, которая равна, таким образом,

$$f(\alpha) \frac{\sin(N\Phi/2)}{\sin(\Phi/2)} = A_0 \frac{\sin\alpha}{\alpha} \frac{\sin N\beta}{\sin\beta}.$$

Переходя к интенсивности, т.е. образуя $u \cdot u^*$, получим

$$I = u \cdot u^* = A_0^2 \frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2} \frac{\sin^2 N\beta}{\sin^2\beta}.$$

75. Пользуясь формулой распределения амплитуды (и интенсивности) в спектре дифракционной решетки $A = A_0 f(\alpha) \frac{\sin N\beta}{\sin\beta}$, где $f(\alpha)$ — медленно меняющаяся функция от φ и $\beta = \frac{\pi}{\lambda} d\sin\varphi$, найти расположение главных максимумов; добавочных минимумов; добавочных максимумов в спектре решетки; определить амплитуду и интенсивность добавочных максимумов; полуширину главного максимума; относительные интенсивности добавочных максимумов.

Ответ. Положение главных максимумов определяется из условий: $\sin\beta = 0$, $\sin N\beta = 0$, откуда $\beta = m\pi$, а $m = 0, 1, 2, \ldots$, т.е. $d\sin\varphi = m\lambda$. Положение добавочных минимумов определяется из условий: $\sin\beta \neq 0$, $\sin N\beta = 0$, откуда $\beta = \pi(m + p/N)$, где m — любое целое число, а

p пробегает значения 1, 2, ..., $(N-1)$ т.е. $d\sin\varphi = \lambda(m+p/N)$. Положение добавочных максимумов определяется из условия $\sin N\beta \approx 1$ (ибо $\sin\beta$ относительно медленно меняется с β). Отсюда $\beta \approx \pi(m+\mu/2N)$, где m — номер главного максимума ($m = 0, 1, 2, \ldots$) и μ — целое нечетное число от 3 до $(2N-3)$. Добавочные максимумы с $\mu = 1$ и $\mu = 2N-1$ не существуют, так как при этом $\sin\beta$ меняется относительно быстро (см. ниже).

Амплитуда добавочных максимумов пропорциональна $\dfrac{1}{\sin(\mu\pi/2N)}$, их интенсивность пропорциональная $\dfrac{1}{\sin^2(\mu\pi/2N)} \approx \dfrac{4N^2}{\pi^2\mu^2}$, ибо $\dfrac{\mu\pi}{2N}$ мало́ для небольших μ, т.е. вблизи главного максимума. Значение β^*, соответствующее половине интенсивности главного максимума ($\backsim N^2/2$), определяется условием $\dfrac{\sin^2 N\beta^*}{\sin^2\beta^*} = \dfrac{N^2}{2}$. Так как β^* мало́, то $\sin^2 N\beta^* = (N\beta^*)^2/2$. Численное решение этого трансцендентного уравнения дает $N\beta^* = 80° = 1{,}38$ рад. Величина $2\beta^*$ определяет ширину главного максимума на уровне половины интенсивности $2\beta^* = 2{,}76/N$ (рис. 23). Так как N очень велико, то главные максимумы весьма резки. Расстояние между точками, где функция $\sin N\beta/\sin\beta$ принимает максимальное значение и значение, равное половине максимального, есть $\beta^* = 1{,}38/N$, а расстояние между этой первой точкой и точкой, где данная функция первый раз обращается в нуль, есть $\pi N > 2\beta^* = 2{,}76/N$. Положению первого добавочного максимума ($\mu = 1$) соответствует $\beta = \dfrac{\pi}{2N} = \dfrac{1{,}5}{N}$. Таким образом, первый добавочный максимум ($\mu = 1$) *накрывается* соседним главным максимумом, а последний добавочный максимум ($\mu = 2N-1$) накрывается главным максимумом следующего порядка, т.е. 1-й и $(2N-1)$-й добавочные максимумы не наблюдаются и остается $(N-2)$ добавочных максимумов, расположенных между $(N-1)$ добавочными минимумами.

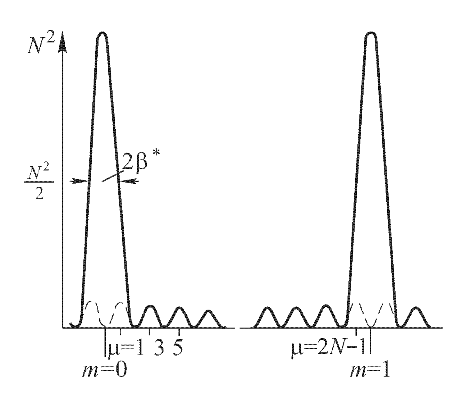


Рис. 23

Первый наблюдаемый добавочный максимум соответствует $\mu = 3$ и отстоит от вершины главного максимума на расстояние, соответствующее $\beta = \dfrac{3\pi}{2N} = \dfrac{4{,}7}{N}$. Его интенсивность составляет $4N^2/\pi^2\mu^2$, т.е. $4/9\pi^2$ от главного максимума (около $1/22 = 5\,\%$); относительная интенсивность следующего добавочного максимума ($\mu = 5$) есть $4/25\pi^2 = 1/62 = 1{,}6\,\%$ от главного максимума и т.д.

76. Рассмотреть дифракцию плоской волны, падающей нормально на синусоидальную решетку (Рэлей).

Указание. Если решетка расположена в плоскости xy и волна приходит по направлению z, то дифференциальное уравнение для волны E

имеет вид

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}\,.$$

Для синусоидальной волны частоты ω получим

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + k^2 E = 0, \tag{1}$$

где $k = \omega/v = 2\pi/\lambda$ — волновое число.

Решение линейного дифференциального уравнения (1) имеет вид

$$E = A\exp\left[i(ux - z\sqrt{k^2 - u^2})\right],$$

где A и u — произвольные функции. Решение это представляет собой совокупность плоских волн с амплитудами A, распространяющихся по направлениям, составляющим углы φ с осью z, причем $\sin\varphi = \pm u/k$ (ср. упражнение 4). Поскольку u — произвольная функция, то дифракционные волны могут, вообще говоря, распространяться по разным направлениям (единственное ограничение: $u \leqslant k$).

Общая задача о дифракции плоской волны на плоской границе (решетка) конкретизируется свойствами этой решетки. На поверхности $z = 0$ значение E в силу принципа Кирхгофа–Френеля имеет вид

$$E(x, 0) = f(x),$$

где $f(x)$ характеризует свойства решетки, т.е. ее воздействие на амплитуду и фазу проходящей волны. В случае синусоидальной решетки Рэлея с периодом d (вдоль x) и максимальным коэффициентом пропускания C имеем

$$f(x) = C\exp\left(i\,\frac{2\pi}{d}\,x\right).$$

Для выбранной нами решетки Рэлея мы можем определить A и u из условия $E(x,0) = f(x)$, т.е. $Ae^{iux} = C\exp\left(i\,\frac{2\pi}{d}\,x\right)$, откуда $A = C$ и $u = 2\pi/d$, где C и d заданы свойствами решетки Рэлея. Подставляя найденное значение u в выражение $\sin\varphi = u/k$, определяющее направление распространения дифрагировавших плоских волн, найдем

$$\sin\varphi = \frac{2\pi}{d}\,\frac{1}{k} = \frac{\lambda}{d} \quad \text{или} \quad d\sin\varphi = \lambda.$$

Таким образом, дифракция плоской монохроматической волны на синусоидальной решетке Рэлея дает спектр лишь 1-го порядка. Нулевой спектр, соответствующий $\varphi = 0$, и спектры высших порядков, для которых $\sin\varphi_m = \pm m\lambda/d$ $(m = 2, 3, \ldots)$, отсутствуют. Если $f(x) = C\sin\frac{2\pi}{d}\,x = \frac{C}{2i}\left[\exp\left(i\,\frac{2\pi}{d}\,x\right) - \exp\left(-i\,\frac{2\pi}{d}\,x\right)\right]$, то граничные условия $E(x,0) = f(x)$ удовлетворяются, очевидно, двумя волнами с $u = \frac{2\pi}{d}\,\frac{1}{k} = \frac{\lambda}{d}$ и $u = -\frac{\lambda}{d}$, т.е. такая решетка дает спектры 1-го и -1-го порядков (см. упражнение 78).

77. Показать, пользуясь результатами упражнения 76, что при $d < \lambda$ дифракционные спектры не образуются, и выяснить физический смысл этого факта.

Указание. При $d < \lambda$ имеем $\sin\varphi > 1$, т.е. нет направления, по которому могла бы распространяться дифрагировавшая волна. Из выражения $E = A\exp\left[i(ux + z\sqrt{k^2 - u^2})\right]$ следует, что при $\lambda > d$, т.е. при $u > k$, E имеет вид

$$E = A\exp\left[-z\sqrt{u^2 - k^2}\right]\exp(iux),$$

т.е. получается волна, амплитуда которой убывает вдоль z по закону $A\exp\left[-z\sqrt{u^2 - k^2}\right]$ и, следовательно, на достаточном расстоянии z становится сколь угодно малой (затухает вдоль z). Волна с конечной амплитудой распространяется лишь вдоль x в слое, достаточно тесно примыкающем к решетке.

78. Пользуясь результатами упражнения 76, рассмотреть дифракцию на произвольной одномерной периодической структуре.

Указание. Для периодической структуры с периодом d имеем

$$f(x) = \sum_m C_m \exp\left(im\,\frac{2\pi}{d}\,x\right),$$

где $m = 0$, $m = \pm 1$, $m = \pm 2$ и т.д. (теорема Фурье).

Для дифрагированных волн можно написать

$$E = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_m \exp\left\{i\left[xm\,\frac{2\pi}{d} + z\sqrt{k^2 - m^2\left(\frac{2\pi}{d}\right)^2}\,\right]\right\}.$$

Члены этого ряда для больших m ($m\cdot 2\pi/d > 2\pi/\lambda$) убывают экспоненциально в зависимости от z и при больших z не играют роли. Остаются только члены ряда с $m\cdot 2\pi/d \leqslant 2\pi/\lambda$. Это — плоские волны по направлениям φ_m, для которых $\sin\varphi_m = m\lambda/d$. Последнее соотношение — известная формула дифракции на периодической решетке. C_m дает амплитуду спектра m-го порядка и определяется характером периодической структуры (решетки).

79. Рассчитать условие наложения спектров высших порядков друг на друга. а) Зависит ли это от периода решетки? В каком порядке произойдет наложение спектров в случае видимых лучей (от $\lambda = 400$ нм до $\lambda = 800$ нм)? В каком порядке возможно перекрытие спектра ртутной лампы (яркие линии от $\lambda = 579$ нм до $\lambda = 253$ нм)?

Ответ. $k\lambda_1 = (k+1)\lambda_2$.

б) Каков максимальный порядок спектра для длины волны λ, если период решетки равен d?

Ответ. m равно целой части дроби d/λ.

80. Определить угловую дисперсию дифракционной решетки с периодом $d = 2$ мкм для второго порядка для $\lambda = 5000$ Å.

Ответ. $\delta\varphi/\delta\lambda = 0{,}4$ мин/Å.

81. Вычислить угловую дисперсию эталона Фабри–Перо, пластинки Люммера–Герке, эшелона Майкельсона, выразив ее через длину волны, толщину пластинки, показатель преломления материала пластинки. Зависит ли дисперсия эталона Фабри–Перо от расстояния между пластинками?

Ответ. Для пластинки Люммера–Герке $\dfrac{\delta r}{\delta\lambda} = \dfrac{m}{\sqrt{4d^2n^2 - m^2\lambda^2}}$.

82. Вывести выражение для разрешающей способности пластинки Люммера–Герке и других интерференционных спектральных аппаратов.

Ответ. $A = Nm$.

Для пластинки Люммера–Герке $A \approx \dfrac{L(n^2-1)}{\lambda}$, если пренебречь дисперсией стекла (L — длина пластинки, n — показатель преломления стекла).

83. Вывести выражение для области дисперсии пластинки Люммера–Герке и других интерференционных аппаратов.

84. Какими данными должна обладать дифракционная решетка, чтобы во втором порядке разрешить дублет натрия $D_1 = 589$ нм, $D_2 = 589{,}6$ нм?

Ответ. $N \geqslant 500$ штрихов.

85. Какую минимальную длину должна иметь пластинка Люммера–Герке, сделанная из стекла с показателем преломления $n = 1{,}5$, чтобы разрешить линию водорода $\lambda = 656{,}3$ нм, представляющую узкий дублет с расстоянием между компонентами $1{,}4 \cdot 10^{-9}$ см?

Ответ. Около 2,5 см.

86. Дифракционная решетка шириной в 3 см имеет период 3 мкм. Какова ее разрешающая сила во втором порядке? Какова разность различимых длин волн для зеленых лучей?

Ответ. $A = 20\,000$, $\delta\lambda \approx 1/4$ Å.

87. В опытах по дифракции рентгеновских лучей пучок падает на решетку с периодом 2 мкм под углом скольжения в $30'$ (угол скольжения — угол, составляемый направлением луча с плоскостью решетки). Угол дифракции для спектра третьего порядка получился равным $1{,}5^\circ$. Определить длину волны рентгеновских лучей.

Ответ. 1,78 Å.

88. а) Рассмотреть дифракцию на зонной решетке (пластинке).

Указание. Следует рассмотреть дифракционную картину первого, второго и т.д. порядков от различных элементов решетки и показать, что дифрагировавшие в данном порядке лучи от всех участков решетки пересекают нормаль в одной точке.

Фокусное расстояние m-го порядка $f_m = C/(2\lambda m)$, где C — постоянная величина, характеризующая решетку ($C = r_n^2/n$, где n — номер кольца и r_n — его радиус).

Обладает ли зонная решетка хроматической аберрацией?

б) Проследить аналогию между решеткой Рэлея и зонной пластинкой, пропускание которой изменяется вдоль ее радиуса по закону $\sin \dfrac{2\pi}{a}\, r^2$.

Указание. Вычислить амплитуду поля на оси зонной пластинки (падает плоская волна) с помощью принципа Гюйгенса–Френеля:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r_{\max}} \sin\left(\frac{2\pi}{a}\, r^2\right) \cos\left[k\left(R + \frac{r^2}{2R}\right)\right] r\, dr.$$

Интеграл вычисляется после замены переменной r на $\sqrt{\xi}$.

89. Стеклянная пластинка, на которой нанесена дифракционная решетка, сделана одной из стенок длинного ящика, наполненного водой. Составить формулу, определяющую направление на максимумы внутри воды.

Если часть решетки выступает из воды, то за решеткой можно получить два спектра, расположенных один под другим, один в воде, другой в воздухе. Как будут различаться эти спектры?

Ответ. Спектр в воздухе в 4/3 раза длиннее.

90. Проделать опыт с дифракцией лучей света, падающих под углом, близким к 90°, на миллиметровую линейку, и описать условия, при которых

удается наблюдать явление (удобно пользоваться миллиметровыми делениями, нанесенными на логарифмическую линейку, а в качестве источника света выбрать спираль газонаполненной лампы накаливания).

91. Импульс I слагается из двух синусоид: $y' = \sin\omega t$ и $y'' = 2\sin 3\omega t$. Импульс II слагается из $y' = \sin\omega t$ и $y'' = 2\sin(3\omega t + \pi/4)$.

Показать, что эти импульсы соответствуют одинаковому спектральному распределению энергии, но имеют разные формы. (Для простоты импульсы представлены суммой двух синусоид, а не бесконечной совокупностью близких по периоду синусоид.)

92. *Полосы Тальбота.* Если при наблюдении в трубу спектра, получаемого от дифракционной решетки, закрыть часть объектива трубы тонкой стеклянной или слюдяной пластинкой, то получается спектр, пересеченный темными полосами. Явление наблюдается, если пластинка вдвинута с красного конца спектра, и отсутствует, если пластинка вдвинута с фиолетового конца. Объяснить явление, исходя из рассуждений § 51 о роли решетки. Как нужно видоизменить условия опыта, чтобы внесение дополнительного слоя с фиолетовой стороны вызывало явление, а с красной стороны не вызывало?

У к а з а н и е. Внесение слоя толщиной h с показателем преломления n замедляет распространение света от прикрытой части решетки, внося дополнительную разность фаз пропорциональную $2\pi\dfrac{h(n-n')}{\lambda}$, где n' — показатель преломления среды. Эта разность фаз зависит от φ, и в спектре могут возникнуть интерференционные полосы. Замедление импульсов, идущих от нижней части решетки, или ускорение импульсов, идущих от верхней части решетки (см. рис. 9.30), позволяет отстающим импульсам догнать ушедшие вперед и ведет к образованию интерференционных полос. Обратные воздействия исключают встречу и интерференцию. Таким образом, результат зависит от знака $n - n'$ и положения вводимого слоя.

93. *Дифракционный опыт Гримальди* (1665 г.). Гримальди описал наблюденное им явление чередования света и тени при освещении двух рядом расположенных щелей светом Солнца (угловой диаметр Солнца равен $31' \approx 0{,}01$ рад. Каково должно быть расстояние ρ между щелями при этом расположении, чтобы могла возникнуть интерференция? (рис. 24; R — расстояние до Солнца.)

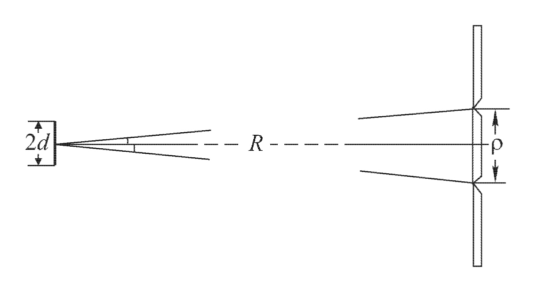


Рис. 24

Ответ. $\rho \leqslant 25$ мкм (расчет для зеленого цвета, $\lambda = 0{,}5$ мкм). Этот результат заставляет сомневаться в том, что Гримальди наблюдал в данном опыте дифракционные явления. Вероятно, наблюдавшиеся полосы имели субъективное происхождение (контраст).

94. *Дифракционный опыт Юнга.* В отличие от расположения Гримальди, Юнг использовал в качестве источника не Солнце, а сильно освещенную щель (см. § 16). Рассчитать допустимое расстояние между щелями B и C в опыте Юнга, считая, что расстояние от A до BC равно 1 м и отверстие A представляет собой изображение Солнца, причем солнечные лучи сконцен-

трированы линзой с фокусным расстоянием 10 мм (рис. 25), т.е. A имеет размеры 0,1 мм.

95. Какова будет разность хода между соответственными лучами от двух соседних щелей, дающих добавочные минимумы в случае трех щелей? четырех щелей? Какой вид имеет диаграмма амплитуд для этих случаев?

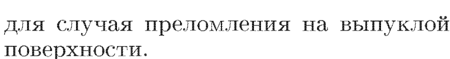
Ответ. Для трех щелей $\lambda/3$ и $2\lambda/3$; $4\lambda/3$ и $5\lambda/3$ и т.д.; треугольники; для четырех щелей: $\lambda/4$, $2\lambda/4$ и $3\lambda/4$; $5\lambda/4$, $6\lambda/4$ и $7\lambda/4$ и т.д.; квадраты.

96. Определить положение добавочных максимумов дифракционной решетки (период d, число штрихов N).

Ответ. $d\sin\varphi = (m + 1/2)\lambda/N$.

97. Вывести формулу

$$\frac{n_1}{a_1} - \frac{n_2}{a_2} = \frac{n_1 - n_2}{R}$$



для случая преломления на выпуклой поверхности.

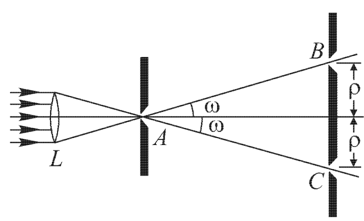


Рис. 25

Рассмотреть случай преломления на вогнутой поверхности, при котором изображение получается мнимым (выполнить построение и вывести формулу).

98. Получить из формулы

$$\frac{n_1}{a_1} - \frac{n_2}{a_2} = \frac{n_1 - n_2}{R}$$

формулу выпуклого и вогнутого сферических зеркал.

99. Где увидит глаз, находящийся в воздухе, монету, расположенную вертикально под ним под водой на глубине 1 м?

Указание. Применить формулу преломления на границе раздела двух сред.

Ответ. На глубине $h = 3/4$ м.

100. Найти главные плоскости для сферической поверхности.

Ответ. Из условий (см. (74.1))

$$V = \frac{n_1 a_2}{n_2 a_1} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{n_1}{a_1} - \frac{n_2}{a_2} = \frac{n_1 - n_2}{R}$$

найдем $a_1 = a_2 = 0$.

101. Исследовать формулу тонкой линзы

$$\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = (N - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

для случая выпуклых и вогнутых поверхностей линзы, воздушной линзы (пузырь) внутри воды, стеклянной линзы в воздухе и т.д., указав, в каких случаях линза собирательная и в каких — рассеивающая.

102. Исследовать формулу тонкой линзы

$$\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{1}{f},$$

выяснив взаимное расположение предмета и изображения и V, т.е. знак и величину поперечного увеличения (при $V = 1$, $a_1 = a_2 = 0$, т.е. главные плоскости тонкой линзы сливаются в плоскость, проходящую через линзу).

103. Обозначив расстояние источника от переднего фокуса через x_1 и расстояние изображения от заднего фокуса через x_2, вывести формулу тонкой линзы в форме, данной Ньютоном: $x_1 x_2 = -f^2$.

104. Согнем проволоку под углом $\pi - \varphi$. Точку сгиба O поместим на расстоянии $OK = 1$ от линии AB (рис. 26). Показать, что точки пересечений концов проволоки с AB суть сопряженные точки линзы с фокусным расстоянием $f = 1/\varphi$. Если вращать проволоку относительно O, то движения M и N представят собой движения источника и изображения относительно линзы, расположенной в OK. (Модель справедлива для таких углов φ, при которых $MO \approx MK$, т.е. MO может изображать параксиальный луч.)

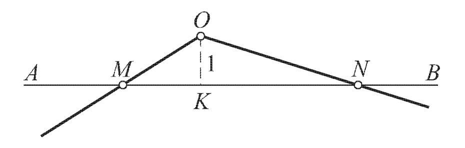


Рис. 26

105. Показать, что для линзы, по обе стороны которой среды различны $(n_1 \neq n_2)$, имеем $f_1/f_2 = -n_1/n_2$.

106. Вывести соотношения, определяющие сопряженные точки оптической системы (рис. 27) и ее поперечное увеличение:

$$x_1 x_2 = f_1 f_2, \quad \frac{f_1}{a_1} + \frac{f_2}{a_2} = 1, \quad \frac{f_1}{f_2} = -\frac{n_1}{n_2}, \quad V = -\frac{x_2}{f_2} = -\frac{f_1}{x_1}.$$

Введем следующие обозначения: $A_1F_1 = -x_1$; $A_1B_1 = y_1$; $F_1H_1 = -f_1$; $A_1H_1 = -a_1$; $\angle H_1A_1Q_1 = -u_1$; $F_2A_2 = x_2$; $A_2B_2 = -y_2$; $H_2F_2 = +f_2$; $H_2A_2 = +a_2$; $\angle H_2A_2Q_2 = +u_2$.

Выводы. 1) из подобия треугольников $F_1A_1B_1$ и $F_1H_1M_1$ и треугольников $F_2H_2M_2$ и $F_2A_2B_2$ имеем $-V = -y_2/y_1 = x_2/f_2 = f_1/x_1$; отсюда $x_1x_2 = f_1f_2$ или $f_1/a_1 + f_2/a_2 = 1$, ибо $x_1 = a_1 - f_1$ и $x_2 = a_2 - f_2$.

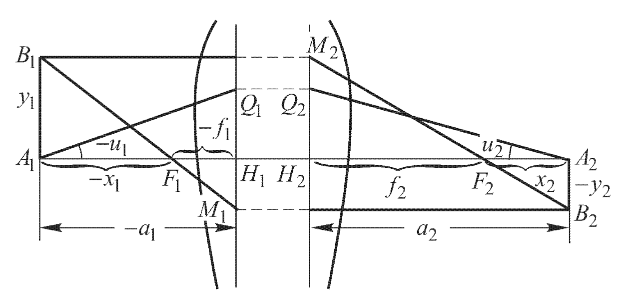


Рис. 27

2) Из треугольников $Q_1H_1A_1$ и $Q_2H_2A_2$ получим $a_1u_1 = a_2u_2$ (для параксиальных пучков); далее, учитывая соотношения $(1 - V) = a_2/f_2$ и $(1 - 1/V) = a_1/f_1$, находим $f_1y_1u_1 = -f_2y_2u_2$. Воспользовавшись соотношением Лагранжа $n_1u_1y_1 = n_2u_2y_2$ (см. § 74), находим $-f_1/f_2 = n_1/n_2$, т.е. отношение фокусных расстояний равно отношению соответственных показателей преломления крайних сред, взятому с обратным знаком.

107. Две толстые линзы (f_1 и f_2) расположены так, что оси их совпадают и расстояние между фокусами равно Δ. Определить фокусное расстояние f полученной сложной системы (рис. 28).

Ответ. $f = f_1f_2/\Delta$.

Указание. Луч SD, параллельный оси системы, выходит из нее по GF. Таким образом, точка F есть передний фокус системы; плоскость MM, пересекающая луч GF на высоте луча SD, есть передняя главная плоскость и H — главная точка. Для построения луча GF используем свойства главных точек составляющих систем (F_1, H_1, H_1', F_1', F_2, H_2, H_2', F_2'); в частности, лучи из точки C, лежащей в фокальной плоскости первой системы, должны выходить из этой системы параллельно друг другу, т.е. BF_1 параллельно GFA.

Итак, фокусное расстояние системы $f = HF$. Из чертежа найдем

$$f = AH\frac{f_1}{BH_1} = AH\frac{f_1}{CF_1'} = \frac{AH}{DH_2}\,\frac{f_1 f_2}{\Delta} = \frac{f_1 f_2}{\Delta}.$$

Аналогично для второго фокусного расстояния найдем

$$f' = -\frac{f_1' f_2'}{\Delta} = -\frac{f_1 f_2}{\Delta} = -f.$$

При $\Delta = 0$ получим $f = \infty$, т.е. телескопическую систему: параллельные лучи, проходя через эту систему, выходят вновь параллельным пучком.

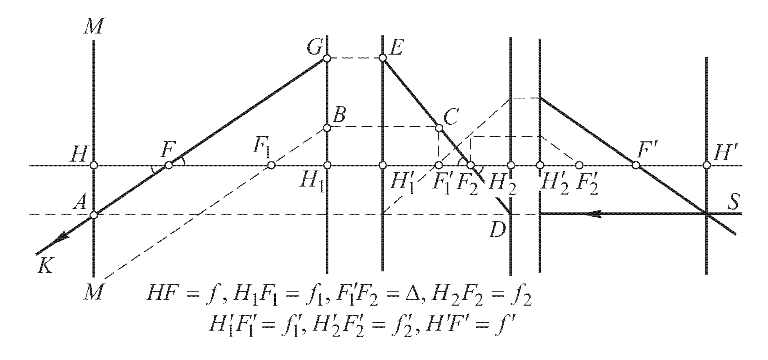


Рис. 28

При совпадении главных плоскостей H_1' и H_2, т.е. при $f_1' + \Delta - f_2 = 0$ и при условии, что $f_2' = -f_2$ (ср. упражнение 105), имеем

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'},$$

т.е. оптическая сила соприкасающихся линз равна сумме оптических сил составляющих.

Передний фокус F сложной системы сопряжен относительно первой линзы с точкой F_2 (луч F_2EGF). Расстояние x_F от F_1 до F находим с помощью формулы (79.1)

$$x_F = \frac{f_1 f_1'}{\Delta}.$$

Аналогично для расстояния x_F' от F_2' до F' имеем

$$x_{F'}' = -\frac{f_2 f_2'}{\Delta}.$$

Положения главных плоскостей H и H' относительно фокусов F_1 и F_2' соответственно определяются очевидными равенствами: $x_H = x_F - f$, $x'_{H'} = x'_{F'} - f'$.

Простейшим примером сложной системы является линза. Если принять за составляющие системы две преломляющие поверхности и воспользоваться формулами (72.1), то легко найти

$$f' = \frac{f_1' f_2'}{\Delta} = \frac{1}{(n-1)(1/R_1 - 1/R_2) + [(n-1)^2/n]d/R_1R_2},$$

где d — толщина линзы на оси. В отличие от формулы (77.1) для тонкой линзы, в знаменателе появился член, описывающий влияние толщины линзы. Выбрав d таким образом, чтобы $f' = \infty$, получаем из толстой линзы зрительную трубу (см. § 93).

108. Преломление на плоской границе вызывает астигматизм пучка.

а) Показать, что лучи, исходящие из одной точки (S), после преломления на плоской границе не имеют общей точки пересечения (рис. 29).

Указание. Найти расстояние точки пересечения двух симметричных лучей до границы и убедиться, что оно зависит от угла падения.

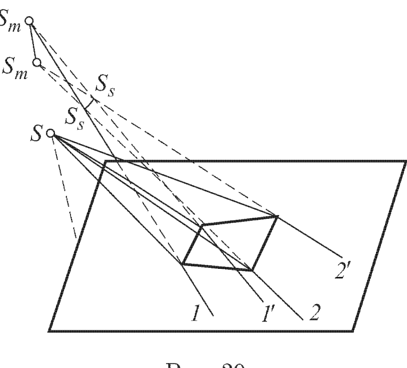


Рис. 29

б) Убедиться в появлении астигматизма при преломлении на плоской границе, рассмотрев пучок, падающий косо на плоскость. Обратить внимание на то, что угол расхождения между лучами, лежащими в плоскости, определяемой осью пучка и нормалью к поверхности (меридиональное сечение), изменяется сильнее, чем для лучей, лежащих в перпендикулярной плоскости (сагиттальное сечение).

109. Пользуясь тем, что для сферической поверхности есть пара апланатических точек, построить апланатическую линзу и указать для нее апланатические точки.

Ответ. Если P и Q — апланатические точки сферической поверхноси KL, то они же будут апланатическими точками линзы, ограниченной поверхностью KL и сферой MN, имеющей центром точку P.

110. Ширина пучка D', выходящего из трубы (телескопическая система), у́же, чем у поступающего в объектив D (рис. 30). Показать, что увеличение трубы равно

$$N = \frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{\text{диаметр пучка до трубы}}{\text{диаметр пучка после трубы}} = \frac{D}{D'} = \frac{\text{диаметр входного зрачка}}{\text{диаметр выходного зрачка}}.$$

Указание. Использовать рис. 30 и рассмотреть условие того, что лучи от центра и от края бесконечно удаленного предмета не дают разности хода, т.е. $(PM) = (N'P')$. Но $PM = D\sin\varphi$, $N'P' = D'\sin\varphi'$. Благодаря малости φ и φ' найдем

$$\varphi' D' = \varphi D.$$

111. Если параллельный пучок лучей падает на призму, стоящую не в положении минимального отклонения, то он по выходе имеет иную ширину. Таким образом, призма может явиться телескопической системой, дающей увеличение или уменьшение изображения. Рассмотреть, когда имеет место первый и когда — второй случай.

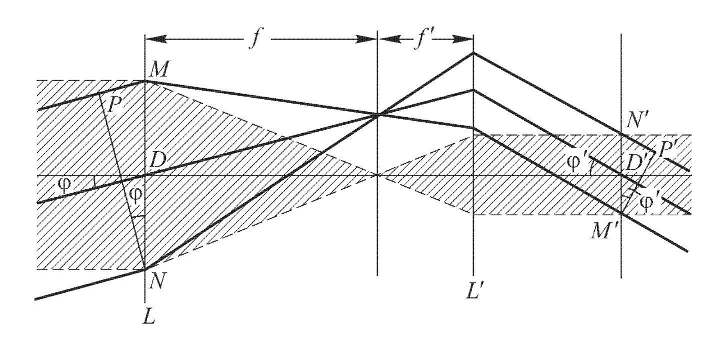


Рис. 30

112. *Преломление в призме.* При обозначениях, принятых в § 86, для отклонения луча при преломлении в призме имеем

$$D = (\alpha_1 + \alpha_2) - (\beta_1 + \beta_2) = (\alpha_1 + \alpha_2) - \varepsilon.$$

Найти условие минимального отклонения $\dfrac{\delta D}{\delta \alpha_1} = 0$, т.е. $|\alpha_1| = |\alpha_2|$ — входной и выходной лучи симметричны; следовательно, луч в призме параллелен основанию.

Показать, что при симметричном ходе лучей $n = \dfrac{\sin[(D+\varepsilon)/2]}{\sin(\varepsilon/2)}$.

Если преломляющий угол ε мал и лучи падают на призму под малым углом (α — мало), то $D = \varepsilon(n-1)$.

Указание. При малых α_1 и ε угол α_2 тоже мал. Следовательно: $\alpha_1 = n\beta_1$, $\alpha_2 = n\beta_2$. Отсюда $D = (n-1)(\beta_1+\beta_2) = \varepsilon(n-1)$.

113. Показать, что в призме Амичи (рис. 31) луч не будет отклоняться при соблюдении следующих условий:

$$\alpha_1 = 90^\circ, \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2} = \sqrt{\frac{n_1^2 - 1}{n_2^2 - n_1^2}}.$$

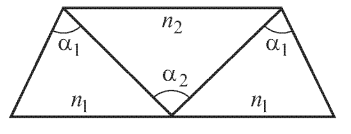


Рис. 31

Указание. Луч, проходящий без отклонения, входит и выходит из призмы параллельно основанию и идет симметрично относительно внутренней призмы.

Тройная призма Амичи построена из флинта (C-18) и крона (C-20) (см. табл. 1 в упражнении 114), так что луч F ($\lambda = 4861$ Å) не отклоняется. Рассчитать эту призму и вычислить угол расхождения (дисперсию) между лучами C ($\lambda = 6563$ Å) и G ($\lambda = 4341$ Å).

114. *Хроматическая аберрация и ахроматизм.* а) Хроматическую аберрацию линзы можно определить как вариацию фокусного расстояния

для разных длин волн, характеризуемых различием в показателе преломления: $\delta\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{\delta n}{n-1}\,\frac{1}{f}$. Если $\delta\left(\frac{1}{f}\right) = 0$, то линза ахроматична.

Показать, что условие ахроматизации сложной линзы, составленной из двух склеенных линз, есть

$$\frac{1}{\nu_1 f_1} + \frac{1}{\nu_2 f_2} = 0,$$

где

$$\nu_1 = \frac{n_1 - 1}{\delta n_1}, \quad \nu_2 = \frac{n_2 - 1}{\delta n_2}$$

(практически можно взять n_1 и n_2 для D-линии натрия, т.е. считать, что ν_1 и ν_2 — коэффициенты дисперсии наших стекол).

Указание. Использовать результаты упражнения 107.

Таблица 1

Характеристики оптических стекол

Название	Обозначения	n_D	ν	$n_F - n_C$	$n_F - n_D$	$n_{G'} - n_F$
Боросиликатный крон	C-20	1,5100	63,4	0,00805	0,00565	0,00451
Силикатный крон	C-7	1,5147	60,6	0,00849	0,00599	0,00481
Крон	C-12	1,5181	58,9	0,00879	0,00619	0,00499
Крон-флинт	С-49	1,5262	51,0	0,01032	0,00730	0,00598
Баритовый легкий крон	С-21	1,5302	60,5	0,00877	0,00617	0,00495
Баритовый крон	С-17	1,5399	59,7	0,00905	0,00637	0,00515
Баритовый крон	С-6	1,5726	57,6	0,00995	0,00702	0,00568
Легкий флинт	С-16	1,5783	41,7	0,01387	0,00988	0,00829
Тяжелый крон	С-24	1,6126	58,6	0,01046	0,00737	0,00593
Флинт	С-8	1,6129	36,9	0,01660	0,01184	0,01008
Флинт	С-3	1,6242	35,9	0,01738	0,01242	0,01060
Тяжелый флинт	С-18	1,7550	27,5	0,02743	0,01975	0,01730

Примечание. $\lambda_D = 5893$ Å, $\lambda_C = 6563$ Å, $\lambda_F = 4861$ Å, $\lambda_{G'} = 4341$ Å.

б) Дана симметричная двояковыпуклая линза из боросиликатного крона С-20 с фокусным расстоянием (для D-линии) $f_1 = 100$ мм. Рассчитать линзу из флинта (т.е. выбрать сорт стекла и указать радиусы поверхностей), которую можно наклеить на данную с тем, чтобы получить собирательную ахроматическую линзу с фокусным расстоянием, близким к 300 мм (вести расчет для $f = 300$ мм, выбрать по прилагаемой таблице наилучшим образом подходящий сорт стекла и подсчитать окончательно, какое получится f).

Ответ. $r_1 = -102$ мм, $r_2 = 635$ мм, $f = 292$ мм. Стекло: С-20 и С-16.

115. *Увеличение лупы.* Применяя формулу простой линзы, найдем: $\operatorname{tg}\varphi' = \frac{l'}{-a' + d} = \frac{l(f - a')}{f(d - a')}$, где φ' — угол зрения изображения; $\operatorname{tg}\varphi' = l/D$, где φ — угол зрения предмета, помещенного на расстоянии D от невооруженного глаза (рис. 32).

Увеличение $\mathscr{N}$ равно

$$\mathscr{N} = \frac{\operatorname{tg}\varphi'}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{D(f-a')}{f(d-a')};$$

при $a' = -\infty$ имеем $\mathscr{N} = D/f$, при $d - a' = D$ получим $\mathscr{N} = D/f + 1 - d/f$, т.е. увеличение несколько зависит от положения глаза (d). Когда глаз помещен вблизи главного фокуса ($d = f$), что практически имеет место, то $\mathscr{N} = D/f$.

116. Рассчитать угловую и линейную дисперсию спектрографа, снабженного тремя шестидесятиградусными призмами из стекла C-3 и имеющего камерную линзу с фокусным расстоянием $f = 250$ мм. Призмы поставлены на минимум отклонения для луча F. Дать расчет для нескольких длин волн. Построить расчетный график, откладывая по оси абсцисс расстояние между линиями, а по оси ординат — длину волны.

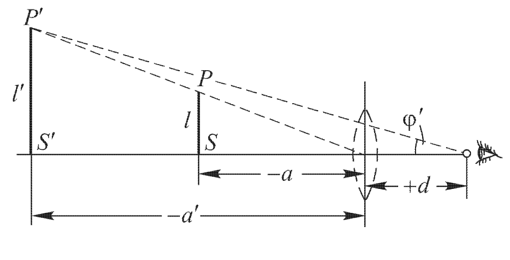


Рис. 32

117. Диаметр коллиматорного объектива $d = 50$ мм. Каковы должны быть размеры шестидесятиградусной призмы из C-18 и диаметр камерного объектива для полного использования светового потока, поступающего в прибор, если призма поставлена на минимум отклонения для луча F?

118. Вывести выражение для разрешающей силы объектива трубы по способу Аббе.

Указание. $\sin u = u$, $n = 1$. Условие разрешения $d = \lambda_0/u$ или $\varphi = \lambda_0/R$.

119. Показать, что в плоскости, сопряженной с предметом, дифракционная картина совпадает с фраунгоферовой.

Указание. Идеальную оптическую систему представить в виде двух подсистем, между которыми от каждой точки предмета идет параллельный пучок лучей (рис. 33). Располагая апертурную диафрагму в параллельных пучках, получаем схему наблюдения дифракции Фраунгофера.

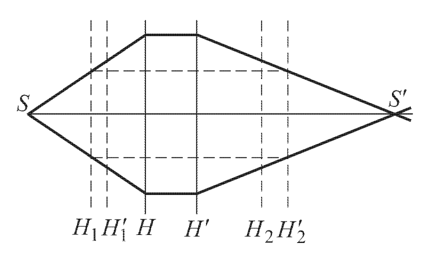


Рис. 33

120. Показать, что дифракционная картина в изображении двух когерентных точечных источников не имеет в центре минимума, если источники расположены на расстоянии, определяемом формулой (97.1).

121. Как выглядит изображение мелкой сетки (скрещенные решетки), если в фокальной плоскости объектива микроскопа поместить диафрагму в виде щели, проходящей параллельно вертикальным штрихам сетки? параллельно горизонтальным штрихам сетки? наклонно к тем и другим штрихам?

122. Какова разрешающая сила человеческого глаза при размере зрачка $R = 2$ мм (для зеленых лучей, $\lambda = 5500$ Å)? (Показатель преломления

среды глаза $n = 1{,}4$.) Определить предельный угол и сравнить его с пределом разрешения, обусловленным строением сетчатки глаза.

123. Определить разрешающую силу метрового объектива.

124. Почему применение окуляра трубы не может повысить ее разрешающую силу, несмотря на значительное увеличение, даваемое окуляром?

125. Как влияет увеличение диаметра объектива на размер дифракционного кружка и кружка рассеяния, обусловленного сферической аберрацией? (В современных хороших объективах отверстная ошибка исправлена настолько хорошо, что качество изображения определяется явлениями дифракции.)

126. Каковы должны быть призмы спектрографа, способного обнаружить нормальный эффект Зеемана в водороде в магнитном поле 10 000 Э?

127. Какова должна быть призма из крона C-12 (флинта C-18) для разрешения желтого дублета натрия (5890 Å и 5898 Å)?

128. Рассмотреть предыдущее упражнение для близких желтых линий ртути 5770 Å и 5791 Å.

129. Вывести условие когерентности освещения отдельных точек структуры с периодом d протяженным источником (угловой размер источника, определяемый с места расположения объекта, равен ψ).

Ответ. Если $\psi \ll \lambda/d$, то освещение когерентно.

Указание. Освещение когерентно, если *различие* в разности фаз световых волн, распространяющихся из *разных* точек источника и освещающих элементы структуры, мало́ по сравнению с 2π. Освещение структуры различными участками протяженного источника можно рассматривать как освещение системой плоских волн [1]), падающих на структуру по *разным направлениям* в зависимости от того, от какой точки источника они исходят. Все разнообразие направлений определяется угловыми размерами источника ψ. Каждая плоская волна создает в пределах элемента структуры колебания, различающиеся по фазе на $2\pi d\varphi_\imath/\lambda$, где $\varphi_\imath$ — угол, определяющий направление соответствующей плоской волны. Различия в разности хода, обусловленные размерами источника, составляют $\sum d\varphi_\imath = d\sum\varphi_\imath = d\psi$, а различие в разности фаз есть $(2\pi/\lambda)d\psi$.

130. Показать аналитически, что разность двух синусоид одинаковой частоты и амплитуды, но немного сдвинутых друг относительно друга по фазе, представляет собой синусоиду той же частоты, но с малой амплитудой; эта результирующая синусоида сдвинута по фазе почти на $\pi/2$ по отношению к исходным.

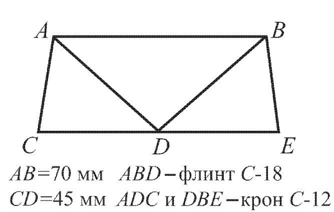


Рис. 34

131. Вычислить разрешающую силу призмы Резерфорда (рис. 34) для D-линии, т.е. $\lambda = 5890$ Å.

Указание. $A = b'\dfrac{dn'}{d\lambda} - 2b\dfrac{dn}{d\lambda}$.

132. Сравнить разрешающую силу и дисперсию нескольких призм из одного материала (C-3), установленных в положении минимума отклонения (рис. 35): 1) AEB с углом при E, равным 70°, и ACB с углом при C,

---

[1]) Волны, излучаемые отдельными точками источника и доходящие до структуры, можно считать плоскими, ибо $d \ll R$, где R — расстояние от структуры до любой точки источника.

равным 60°; 2) ACB и $A'CB'$ с $CA' = CA/2$; 3) ACB и пара призм MNP и $M_1N_1P_1$ с углами при N и N_1, равными 60°, и $MN = AC/2$.

133. Определить максимальный преломляющий угол трехгранных призм из C-3 и из C-18, для которых могут существовать минимумы отклонения.

Указание. Принять во внимание полное внутреннее отражение.

134. Прожектор снабжен зеркалом (вполне исправленным на сферическую аберрацию), имеющим фокусное расстояние $f = 100$ см и диаметр отверстия $D = 100$ см. Источником света служит кратер электрической дуги, который можно рассматривать как диск диаметром 4 мм, центр которого совмещен с фокусом зеркала. Яркость кратера 10^8 кд/м^2, излучение его подчиняется закону Ламберта.

Определить среднюю сферическую силу света источника и силу света на оси прожектора (экранирующим действием углей дуги можно пренебречь).

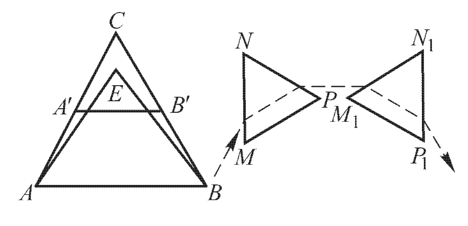


Рис. 35

135. Объективы коллиматора и камеры спектрографа имеют одинаковые диаметры, а их фокусные расстояния равны соответственно f_1 и f_2. При помощи конденсора достигнуто освещение щели, при котором объектив коллиматора полностью заполнен светом. Доказать, что светосила прибора зависит только от объектива камеры.

Доказательство. Яркость щели B, поток в приборе $\Phi = \pi B\sigma \sin^2 u = \pi B\sigma R^2/f_1^2$, площадь изображения щели $\sigma' = \sigma f_2^2/f_1^2$, освещенность $E = \pi BR^2/f_2^2$, т.е. зависит только от светосилы камерного объектива.

136. Во сколько раз возрастет освещенность, если свет от Солнца концентрируется линзой с относительным отверстием $d/f = 1/5$?

Ответ. Приблизительно в 400 раз.

137. Вывести выражение для *освещенности*, даваемой любой оптической системой на расстоянии l, в форме $E' = KBS/l^2$ (формула Манжена), где K — коэффициент пропускания оптической системы, S — площадь выходного зрачка системы, B — яркость источника.

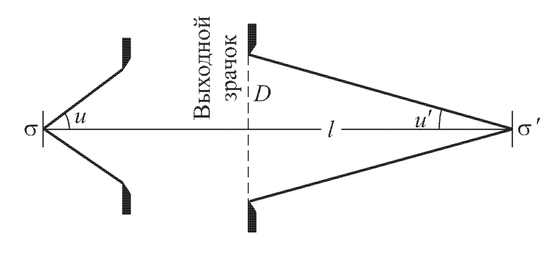


Рис. 36

Указание (рис. 36). Поток, падающий на изображение, равен $\Phi' = K\Phi = KB\sigma\pi \sin^2 u$; площадь изображения $\sigma' = \sigma \sin^2 u/\sin^2 u'$ (условие синусов). Для освещенности имеем

$$E' = KB\pi \sin^2 u',$$

где $\sin u' = D/2l$, т.е.

$$E' = K\,\frac{B}{l^2}\,\frac{\pi D^2}{4} = K\,\frac{BS}{l^2}\,,$$

где $S = \pi D^2/4$ — площадь выходного зрачка.

138. Определить освещенность, создаваемую прожектором с зеркалом диаметром $D = 2$ м, дуга которого имеет яркость $B = 10^9$ кд/м^2, на расстоянии $l = 1$ км при идеальной прозрачности ($K = 1$). (Использовать формулу Манжена, см. упражнение 137.)

Ответ.

$$E = \frac{\pi \cdot 10^9 \cdot 2^2}{4 \cdot 10^6} \approx 3 \cdot 10^3 \text{ лк.}$$

139. Почему турмалин, как и любое поляризационное приспособление, пропускает не более половины естественного света?

140. Описать явления, которые будут наблюдаться при вращении T_2 на рис. 16.1. Описать явления, которые будут наблюдаться при вращении S_2 на рис. 16.3.

141. Показать, что из закона Брюстера следует перпендикулярность луча, отраженного под углом Брюстера, и луча преломленного.

Указание. Использовать закон Брюстера и закон преломления.

142. Определить угол Брюстера при отражении от дна стеклянного сосуда, наполненного водой (сосуд сделан из крона с показателем преломления $n = 1{,}50$).

143. Как определить показатель преломления непрозрачного диэлектрика (например эмали)?

Указание. Воспользоваться законом Брюстера.

144. Составить стопу из фотографических пластинок, произвести с ней простые опыты по поляризации и описать их.

145. Попытаться определить поляризацию лучей Солнца, отраженных от поверхности воды. В какое время дня поляризация будет максимальной?

146. Описать, как меняются интенсивности I_o и I_e в опыте, описанном на с. 349. Указать, в частности, положения, при которых $I_o = 0$, или $I_e = 0$, или $I_o = I_e$.

147. Рассчитать апертуру призм, изображенных на рисунках 17.4 и 17.5 (см. § 108).

148. Рассчитать двоякопреломляющие призмы из исландского шпата (см. рис. 17.8), дающие угол между лучами в 5°.

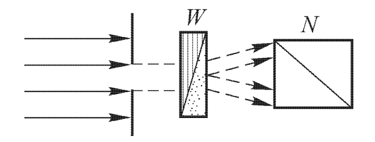
149. Какой угол расхождения дает призма, изображенная на рис. 17.8 *в*, если каждая из половин призмы имеет преломляющий угол 30°?

150. Ветровое стекло и фары автомашин сделаны из поляроида. Как должны быть расположены эти поляроиды, чтобы шофер мог видеть дорогу, освещенную светом его фары, и не страдал от ослепляющего действия фар встречных машин?

Ответ. В стекле и в фарах всех машин ставят поляроиды так, чтобы главная плоскость их составляла угол в 45° с горизонтом.

151. Простейший поляризационный фотометр устроен следующим образом (рис. 37). Свет через малое квадратное отверстие, стороны которого ориентированы по главным плоскостям призмы, показанной на рис. 17.8 *в*, падает на эту призму и затем рассматривается через николь. При подходящих размерах отверстия и поляризационной призмы через николь видны два соприкасающихся квадрата. При поворачивании николя соотношение освещенностей этих квадратов меняется.

а) При какой ориентации N относительно W оба квадрата одинаково освещены, если падающий свет естественный? если падающий свет поляризован вдоль одной из сторон квадратного отверстия? вдоль диагонали отверстия?



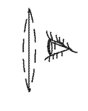


Рис. 37

б) Свет, частично поляризованный, с направлением поляризации вдоль одной из главных плоскостей призмы W падает на прибор. Какова степень поляризации (Δ), если равенство полей соответствует повороту николя на угол α относительно указанной плоскости призмы W?

Указание. Степень поляризации определяется как отношение разности интенсивностей (I' и I'') пучков, поляризованных в двух взаимно перпендикулярных направлениях, к полной интенсивности (I), т.е. $\Delta = (I' - I'')/I$.

Ответ. $\Delta = -\cos 2\alpha$.

Определить α, если степень поляризации равна 20 %.

152. Показатели преломления для различных длин волн в исландском шпате и кварце приведены в табл. 2.

Таблица 2

Показатели преломления в исландском шпате и стекле для разных длин волн

Длина волны λ, нм	Исландский шпат		Кварц	
	n_e	n_o	n_e	n_o
687 (красный)	1,484	1,653	1,550	1,541
656 (оранжевый)	1,485	1,655	1,551	1,542
589 (желтый)	1,486	1,658	1,553	1,544
527 (зеленый)	1,489	1,664	1,556	1,547
486 (голубой)	1,491	1,668	1,559	1,550
431 (сине-фиолетовый)	1,495	1,676	1,564	1,554
400 (фиолетовый)	1,498	1,683	1,568	1,558

Вычислить, какой толщины должны быть пластинки из кварца и из исландского шпата, для того чтобы они для разных длин волн служили четвертьволновой пластинкой.

153. Ввиду трудности изготовления столь тонких пластинок (см. упражнение 152) рационально применять пластинки, дающие разность хода, равную $(m + 1/4)\lambda$. Рассчитать такую пластинку из кварца для $\lambda = 589{,}3$ нм (желтый цвет), с тем чтобы ее толщина была около 1 мм. Как будет действовать такая пластинка на фиолетовые лучи ($\lambda = 400{,}0$ нм)?

154. Объяснить, в чем невыгодность применения толстых кристаллических пластинок в $\lambda/4$ (обратить внимание на дисперсию разности показателей преломления, т.е. на зависимость разности показателей преломления от длины волны).

155. Рассмотреть подробно вопрос о получении *левой* и *правой* круговой поляризации. Какого характера получится поляризация, если толщина

кристаллической пластинки такова, что она сообщает разность хода, равную $(3/2)\lambda$?

156. Подробно рассмотреть, что получится, если *естественный* свет падает на кристаллическую пластинку, в частности на пластинку в 1/4 волны; на пластинку в 1/2 волны?

157. Если при производстве опыта Юнга свет, проходящий через две щели, поляризуется во взаимно перпендикулярных плоскостях (например, с помощью соответствующим образом расположенных поляроидов), то интерференция не наблюдается. Этот известный опыт Араго–Френеля названные авторы видоизменили, расположив *после обеих щелей* кристаллическую пластинку, главные направления которой составляли угол в 45° с каждым из направлений поляризации обоих интерферирующих пучков. В результате образовались четыре волны одинаковой амплитуды, у которых попарно плоскости колебания совпадали (две волны — с колебаниями в первой главной плоскости кристаллической пластинки, две волны — с колебаниями во второй главной плоскости). Тем не менее интерференции не наблюдалось. Интерференционная картина не появляется и при рассматривании ее через николь любой ориентации. Это доказывает, что дело не сводится к образованию двух интерференционных картин с максимумами, смещенными на полполосы и поляризованными во взаимно перпендикулярных направлениях.

Объяснить наблюдение Араго–Френеля. Что необходимо сделать для наблюдения интерференции?

Ответ. Интерференция наблюдается, если свет, падающий на щели, предварительно сделать плоскополяризованным.

158. Френель обнаружил, что слабо преломляющая пластинка сернокислой извести не обнаруживает интерференционных цветов, хотя из нее выходят две волны с разностью хода около 2–3 длин волн. Объяснить явление.

П р и м е ч а н и е. Наблюдение Френеля стало исходным для постановки знаменитых опытов Френеля и Араго (см. § 109).

159. Изобразить схематически на чертеже характер поляризации света, вышедшего из компенсатора Бабине, при помощи стрелок, кружков и эллипсов, на которых обозначено направление колебаний.

Объяснить, в чем будет различие для красного и фиолетового света.

160. Какая картина наблюдается при прохождении *белого* эллиптически поляризованного света через компенсатор Бабине и николь?

161. Пользуясь таблицей, приведенной в упражнении 152, описать картину, наблюдаемую при прохождении плоскополяризованного света через кварцевый клин с углом при вершине $\alpha = 5'$.

Направление оси совпадает с ребром AA, расположенным вертикально. Плоскость поляризации падающего света составляет угол 45° с направлением оси кварца. Свет монохроматический, $\lambda = 589{,}0$ нм.

Дать схематический чертеж направлений колебаний в пучке, выходящем из клина, и рассчитать, на каком расстоянии будут лежать места правой круговой поляризации.

162. Описать различие в интерференционной картине, наблюдаемой в случае помещения между двумя скрещенными поляризаторами пластинки слюды и кучки случайно собранных тонких листков слюды, имеющих в совокупности ту же толщину, что и пластинка.

Ответ. Во втором случае («кучка пластинок») нет главных направлений.

163. Описать картину, которая должна наблюдаться в параллельных лучах при помещении между скрещенными николями пластинки, вырезанной из одноосного кристалла параллельно оптической оси. Что произойдет, если вращать пластинку? если вращать анализатор?

164. Компенсатор Бабине–Солейля устроен в виде плоскопараллельной пластинки и двух клиньев, вырезанных из кварца параллельно оси. Таким образом, клинья образуют в совокупности плоскопараллельную пластинку переменной толщины, причем в постоянной и переменных пластинках оптические оси направлены перпендикулярно друг к другу (рис. 38).

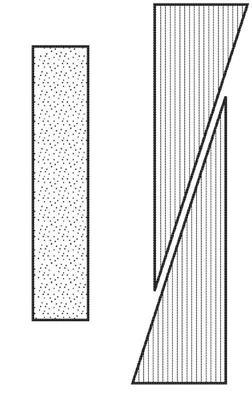


Рис. 38

Рассмотреть действие такого компенсатора. Какой вид будет иметь поле при расположении компенсатора Бабине–Солейля по схеме рис. 18.5?

Ответ. Степень эллиптичности будет одинакова по всему полю.

165. Возможно ли получение в белом свете интерференционной картины по схеме рис. 26.22 при любой толщине исландского шпата? Вычислить разность хода для пластинки исландского шпата, вырезанной параллельно оси, при толщине 5 мм. При каких толщинах возможно наблюдение интерференции с ртутной линией, для которой $\lambda/\Delta\lambda = 400\,000$?

166. Поляризационный монохроматор Вуда, основанный на явлении дисперсии показателей преломления, может быть осуществлен по схеме рис. 39. Поляризатор N_1 повернут на угол 45° относительно главных плоскостей кристалла K. При подходящей толщине кристалла две близкие линии выйдут из него поляризованными линейно и притом почти во взаимно перпендикулярных плоскостях. При соответствующем расположении N_2 одна из них будет почти полностью задержана, другая — пропущена (монохроматор). (В действительности монохроматор имеет более сложное устройство.)

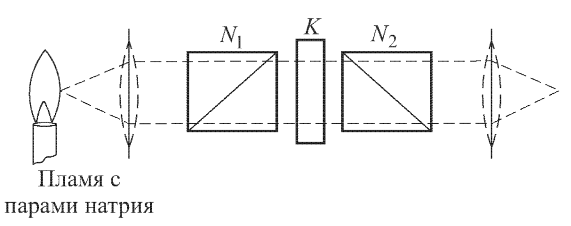


Рис. 39

а) Белый свет направляется через монохроматор Вуда на щель спектрографа. Как выглядит спектр? Какие изменения произойдут в спектре при повороте N_2 на 90°?

Ответ. Спектр состоит из чередующихся темных и светлых полосок; при повороте N_2 темные и светлые полоски обмениваются местами.

б) Рассчитать толщину кристалла K кварца или исландского шпата, позволяющего разделить две близкие желтые линии натрия $D_1 = 589{,}6$ нм и $D_2 = 589{,}0$ нм; показатели преломления приведены в табл. 3.

Таблица 3

Показатели преломления исландского шпата и кварца

Линия	Исландский шпат		Кварц	
	n_e	n_o	n_e	n_o
D_1	1,48654	1,65846	1,55338	1,54423
D_2	1,48652	1,65843	1,55335	1,54420

167. Какова будет последовательность цветных колец при наблюдении интерференции поляризованных лучей в сходящихся лучах (см. рис. 26.23)? Где теснее расположены кольца — в центре картины или ближе к периферии?

168. В предшествующем опыте между N_1 и N_2 помещена пластинка из исландского шпата толщиной $d = 1$ мм. Определить радиусы первого, третьего и десятого светлых колец для красного цвета ($\lambda = 687{,}0$ нм) и фиолетового ($\lambda = 400{,}0$ нм).

Что будет наблюдаться в том месте пластинки, где проходят лучи, пересекающиеся с осью под углом 30°? 45°? в случае монохроматического желтого света ($\lambda = 589{,}0$ нм) и в случае белого света?

169. Вычислить величину аберрации, вызываемой суточным движением Земли, для мест, широта которых φ равна 0°, 45° и 90°. Возможно ли наблюдение явления, если определение угла при установлении положения звезды можно выполнить с точностью до $0'',05$?

Ответ. $\operatorname{tg}\alpha = v/c$, где $v = 2\pi R\cos\varphi/T$; $R = 6400$ км — радиус Земли, $T = 24$ час — период вращения Земли.

170. Вычислить величину угла аберрации, если направление на звезду составляет угол ψ с направлением движения Земли.

Ответ. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{v}{c}\,\dfrac{\sin\psi}{1 + (v/c)\cos\psi} \approx \dfrac{v\sin\psi}{c}$, ибо $\dfrac{v}{c} \ll 1$.

171. Вывести формулы для определения скорости света по методу прерываний и по методу вращающегося зеркала, указав, какие данные необходимо знать из опыта для применения метода.

172. В одном из опытов Физо расстояние от колеса до зеркала было 10 км; колесо имело 720 зубцов и угловые скорости составляли при четырех последовательных исчезновениях соответственно 326, 457, 588 и 719 рад/с. Вычислить скорость света.

173. Вывести формулу Рэлея аналитически, исходя из рассмотрения импульса как суперпозиции *двух близких* по длине монохроматических волн с одинаковой амплитудой

$$J_1 = a\cos(\omega_1 t - k_1 x), \qquad \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega,$$

$$J_2 = a\cos(\omega_2 t - k_2 x), \qquad \frac{k_1 + k_2}{2} = k.$$

Указание. Фазовая скорость может быть определена как скорость наблюдателя, идущего вровень с неизменной фазой, т.е. из условия постоянства фазы ($v = \omega/k$); групповая скорость есть скорость наблюдателя, идущего вровень с неизменной амплитудой, т.е. определяется из условия постоянства амплитуды ($u = d\omega/dk$).

174. Вычислить групповую скорость для различных законов дисперсии:

1. $v = k(\text{const})$ (недиспергирующая среда, например звуковые волны в воздухе);

2. $v = k\lambda$;

3. $v = k\sqrt{\lambda}$ (волны, вызываемые на поверхности воды силой тяжести);

4. $v = k/\sqrt{\lambda}$ (капиллярные волны на поверхности воды);

5. $V = k/\lambda$ (волны при изгибании упругой пластинки).

175. Измерение дисперсии для сероуглерода дает
при $\lambda = 589{,}0$ нм $n = 1{,}629$;
при $\lambda = 527{,}0$ нм $n = 1{,}642$;
при $\lambda = 656{,}0$ нм $n = 1{,}620$.
Найти соотношение фазовой и групповой скоростей.

176. Показать, что касательная в точке A с абсциссой λ_0 к кривой $v = f(\lambda)$ (v — фазовая скорость) отсекает на оси ординат отрезок, равный групповой скорости для $\lambda = \lambda_0$ (графический метод Эренфеста) (рис. 40).

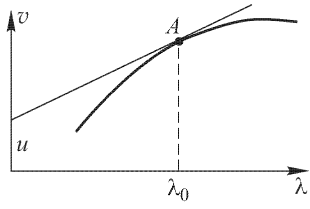


Рис. 40

177. С какой скоростью должен ехать автомобилист, чтобы спутать красный светофор с зеленым (анекдот о Вуде)?

178. Возможно ли наблюдение явления Доплера, если источник испускает сплошной спектр?

179. а) Возможно ли наблюдение явления Доплера на каналовых лучах, если имеется спектроскоп с призмой из тяжелого флинта (C-18) с длиной основания 5 см? Скорость каналовых частиц $v = 5 \cdot 10^7$ см/с.

б) Какую решетку надо иметь, чтобы наблюдать эффект Доплера на каналовых лучах указанной скорости?

180. Показать, что из (132.1) следуют формулы преобразования для системы K:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + (v/c^2)x'}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

181. *Опыт Саньяка.* Источник света A и наблюдающий прибор B расположены на диске, могущем вращаться (рис. 41). Свет от A, распространяясь по двум направлениям *1* и *2* и встречаясь в B, дает интерференционную картину. Если диск заставить вращаться с угловой скоростью ω, то возникает добавочная разность фаз и интерференционные полосы сместятся.

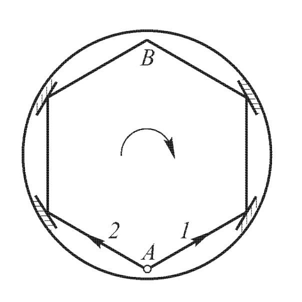


Рис. 41

а) Вывести формулу, позволяющую определить смещение интерференционных полос; б) рассчитать установку, обеспечивающую смещение на 1/4 полосы; в) каковы должны быть предельные размеры ($2S$) источника A в описанном опыте?

Ответ. а) Возникшая разность хода $\Delta = 2R \cdot 2\pi n\tau$, где R — радиус световой орбиты, n — число оборотов диска в секунду, $\tau = \pi R/c$ — время распространения света от A до B.

Итак, $\Delta = \dfrac{4\pi n}{c}\,\pi R^2 = \dfrac{4\pi n F}{c}$, где $F = \pi R^2$ есть площадь, обегаемая светом.

б) $\Delta = \lambda/4$, $nF = \dfrac{c\lambda}{16\pi} = 3$ м^2/с для $\lambda = 500{,}0$ нм, т.е. при скорости 1 оборот в секунду диаметр диска должен быть около 2 м; при скорости 10 об/с — 60 см.

в) $2S < 0{,}15$ мкм.

182. *Опыт Майкельсона–Гэля.* Майкельсон осуществил опыт Саньяка, использовав в качестве вращающегося диска Землю. Для устранения зависимости от температурных колебаний показателя преломления (рис. 42) свет распространялся в расположенном под землей четырехугольнике из эвакуированных труб.

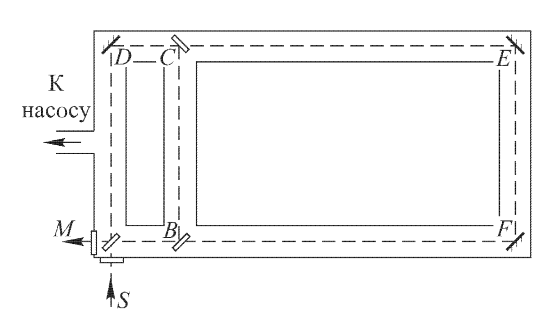


Рис. 42

а) Вычислить размер периметра труб, предполагая контур квадратным и принимая во внимание, что опыт производится на широте 40°.

б) Каким образом можно обойти затруднение, связанное с невозможностью изменять скорость вращения Земли?

Ответ. б) Используя обход по малому и большому контуру.

183. Определить напряженность магнитного поля световой волны, пренебрегая поглощением в атмосфере (например, на границе земной атмосферы, где солнечная постоянная равна 2 кал; солнечная постоянная определяет количество энергии за 1 мин на 1 см^2).

Ответ. $H_0 = 0{,}024$ Э.

184. Какова амплитуда напряженности магнитного поля световой волны в месте изображения Солнца при помощи объектива от аппарата ФЭД (с относительным отверстием $D:F = 1:2$)? (Угловой диаметр Солнца $\approx 1/100$ рад; поглощением в атмосфере можно пренебречь.)

Ответ. $H_0 = 0{,}024 \cdot 50 = 1{,}20$ Э.

185. Вывести формулы Френеля для магнитного вектора и исследовать вопрос о соотношении фаз падающей, отраженной и преломленной волн в зависимости от показателя преломления и угла падения.

186. Вычислить $r_\perp$ для угла Брюстера.

Ответ. $r_\perp = \dfrac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$.

187. Вывести выражение для степени поляризации проходящего света при падении под углом Брюстера.

Ответ. $\Delta = \dfrac{4n^2 - (1+n^2)^2}{4n^2 + (1+n^2)^2}$.

Вычислить степень поляризации при прохождении света под углом Брюстера в воду.

188. Угол между плоскостью колебания поляризованного света и плоскостью падения называется *азимутом* колебания.

Пусть на диэлектрик падает под углом φ плоскополяризованный свет с азимутом α так, что $E_{i\perp}/E_{i\parallel} = \operatorname{tg}\alpha$. При отражении и преломлении света произойдет поворот плоскости поляризации.

Объяснить явление и вычислить, пользуясь формулами Френеля, азимут преломленной волны β и азимут отраженной волны α.

Ответ.

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{\cos(\varphi-\psi)}{\cos(\varphi+\psi)}\operatorname{tg}\alpha, \quad \operatorname{tg}\beta = \cos(\varphi-\psi)\operatorname{tg}\alpha.$$

189. Определить степень поляризации света при прохождении под углом Брюстера через стопу из пяти стеклянных пластинок с показателем преломления 1,5.

190. Показать с помощью формул Френеля, что плотность лучистой энергии u (энергия единицы объема) пропорциональна квадрату показателя преломления среды.

Указание. Среда принимается недиспергирующей, так что групповая скорость (скорость энергии) совпадает с фазовой. Поток энергии сквозь площадку F, составляющую угол α с направлением скорости распространения энергии c, есть $W = Fcu\cos\alpha$. Плотность энергии пропорциональна квадрату амплитуды, так что $W_i = FckE_i^2\cos\alpha$ и $W_r = FckE_r^2\cos\alpha$.

При прохождении через границу имеем поток во второй среде

$$W_d = W_i - W_r.$$

Расчет особенно прост для нормального падения, а именно

$$W_d = W_i - W_r = FckE_i^2 - FckE_r^2 = FckE_i^2\left(1 - \frac{E_r^2}{E_i^2}\right).$$

Применяя формулы Френеля для нормального падения, найдем

$$W_d = FckD^2n = F\frac{c}{n}u_d, \quad \text{т.е.} \quad u_d = kD^2n^2.$$

191. Показать с помощью формул Френеля, что поток падающей энергии равен сумме потоков отраженной и преломленной (закон сохранения энергии).

Указание. Пользуясь результатами упражнения 190, рассмотреть *наклонное* падение отдельно для $\perp$-компоненты и для $\|$-компоненты, приняв во внимание соотношение *сечений* падающего, отраженного и преломленного потоков.

192. Рассчитать толщину и показатель преломления поверхностного слоя на стекле ($n = 1{,}5$), сильно снижающего отражение для лучей с $\lambda = 600{,}0$ нм при нормальном падении.

Указание. Интенсивности лучей, отраженных от верхней и нижней границ, должны быть близки между собой; разность хода должна составлять $\lambda/2$.

Ответ. $d = 125{,}0$ нм, $n \approx 1{,}2$.

193. Введение комплексных величин часто облегчает математическую трактовку вопросов, связанных с колебаниями и волнами. В основе лежит формула Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Действительная и мнимая части этого выражения в отдельности представляют собой тригонометрические функции, имеющие широкое применение в вопросах колебаний. Так как большинство математических операций легче производить с показательными функциями, чем с тригонометрическими, то рационально вести вычисления таким образом: ввести вместо косинуса или синуса показательную функцию, имея в виду использовать в

конце концов ее действительную (или мнимую) часть. С этой показательной функцией произвести необходимые вычисления и в конце вернуться (в случае необходимости) к тригонометрическим функциям, взяв действительную или мнимую часть.

Если $\varphi = \omega t$, то $e^{i\varphi} = e^{i\omega t}$ может изображать гармоническое колебание с периодом T ($\omega = 2\pi/T$), а $\exp[i(\omega t - kx)]$ — гармоническую волну, идущую вдоль оси x и обладающую длиной волны λ ($k = 2\pi/\lambda$).

Выражение $z = Ce^{i\omega t} = C\cos\omega t + iC\sin\omega t$ изображает «колебание» с амплитудой C.

а) Величина C может быть комплексной. В таком случае введение ее учитывает начальную фазу нашего колебания. Действительно, если $C = a + bi$, то можно написать $C = re^{i\delta}$, т.е. $z = r\exp[i(\omega t + \delta)]$, где r — обычная (действительная) амплитуда, а δ — начальная фаза. При этом

$$a = r\cos\delta, \quad b = r\sin\delta,$$

т.е.

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \operatorname{tg}\delta = \frac{b}{a}.$$

б) Если $C = a + ib$ — комплексное число, то сопряженное ему число $C^* = a - ib$. Показать, что квадрат действительной амплитуды r^2 (интенсивность) равняется произведению комплексной амплитуды (C) на сопряженную с ней (C^*):

$$CC^* = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = r^2.$$

в) Пусть «комплексная» амплитуда C имеет вид

$$C = \frac{a + ib}{A + iB}.$$

Показать, что действительная амплитуда $r = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{A^2 + B^2}}$, а фаза δ определяется соотношением

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{bA - aB}{aA + bB}.$$

г) Показать, что если $C = \dfrac{a + ib}{a - ib}$, то $r = 1$; $\operatorname{tg}\delta/2 = b/a$.

194. Показатель преломления алмаза равен 2,42, анатаса — 2,535 (для обыкновенного луча). Можно ли при однократном полном внутреннем отражении на этих материалах осуществить круговую поляризацию света? Рассчитать необходимую форму куска и дать полную схему опыта (пренебрегая двойным лучепреломлением).

Ответ. Для анатаса $\varphi_1 = 27°{,}5$ и $\varphi_2 = 35°{,}0$, для алмаза $\varphi_1 = \varphi_2 = 32°{,}7$.

195. Если опыт Мандельштама–Зелени производить с широко расходящимся пучком, так что углы падения будут больше или меньше предельного, то свет флуоресценции будет иметь различную интенсивность в разных участках пучка. Какие участки будут более интенсивными и почему? (Обратить внимание на толщину флуоресцирующего слоя.) Каков предельный угол в случае водного раствора флуоресцеина?

196. Показать, что в случае полного внутреннего отражения $|E_{r\perp}|^2 = |E_{i\perp}|^2$ и $|E_{r\parallel}|^2 = |E_{i\parallel}|^2$.

Указание. Использовать указания § 137 и упражнение 193, б).

197. Показать, что $\operatorname{tg}\frac{\delta_{\parallel}}{2} = \frac{\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}}{n^2\cos\varphi}$ и $\operatorname{tg}\frac{\delta_{\perp}}{2} = \frac{\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}}{\cos\varphi}$ и, следовательно, $\operatorname{tg}\frac{\delta_{\parallel}-\delta_{\perp}}{2} = \frac{\cos\varphi\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}}{\sin^2\varphi}$.

Указание. Придав формулам Френеля вид

$$\frac{E_{r\parallel}}{E_{\imath\parallel}} = \frac{\sin\varphi\cos\varphi - \sin\psi\cos\psi}{\sin\varphi\cos\varphi + \sin\psi\cos\psi}, \quad \frac{E_{r\perp}}{E_{\imath\perp}} = -\frac{\sin\varphi\cos\psi - \sin\psi\cos\varphi}{\sin\varphi\cos\psi + \sin\psi\cos\varphi},$$

использовать указания § 137 и упражнение 193, г).

198. Найти разность фаз δ_r падающей на металл и отраженной волн в случае нормального падения.

Указание. Придав выражению (141.3) вид $a + ib$, найдем

$$\operatorname{tg}\delta_r = \frac{b}{a} = \frac{2(n\varkappa)}{1 - n^2 - (n\varkappa)^2}.$$

199. Найти отношение интенсивностей $\Delta^2 = (E_d/E_i)^2$ и разность фаз δ_d падающей на металл и проходящей волн в случае нормального падения.

Указание. Использовав формулу (135.7), найти $E_d/E_\imath = \Delta\exp(i\delta_d)$.

Ответ. $\Delta^2 = \frac{4}{(n+1)^2 + n^2\varkappa^2}$, $\operatorname{tg}\delta_d = \frac{n\varkappa}{n+1}$.

200. Составить графики падающей, отраженной и преломленной волн (сдвиг фаз и соотношения амплитуд при нормальном падении для $n = 2$, $(n\varkappa) = 5$ и для $n = 2$, $(n\varkappa) = 0{,}1$).

Ответ. Для $n = 2$ и $(n\varkappa) = 0{,}1$ см. рис. 43.

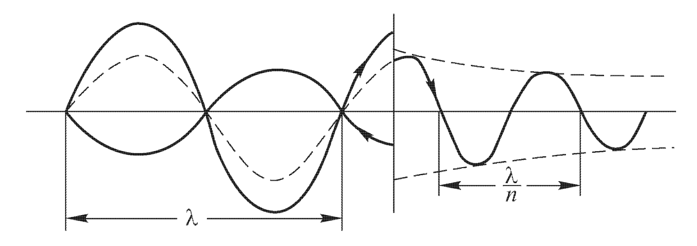


Рис. 43

201. Показать, что скорость фазы вдоль нормали q и скорость фазы вдоль луча v в анизотропной среде связаны соотношением $q = v\cos\alpha$, где α — угол между направлением нормали **N** и направлением луча **S**.

Указание. Построить два положения волновой поверхности, соответствующих двум бесконечно близким моментам времени, и найти из чертежа выражение для q и v.

202. Выполнить построение Гюйгенса для различных случаев падения плоской волны на одноосный кристалл; найти направления лучей и нормалей и волновых фронтов обыкновенного и необыкновенного лучей для следующих случаев.

а) Волна падает нормально на естественную грань. б) Волна падает нормально и под углом на пластинку, вырезанную перпендикулярно к оп-

тической оси. в) Волна падает нормально и под углом на пластинку, вырезанную параллельно оптической оси и расположенную так, что ось лежит в плоскости падения и перпендикулярно к ней.

Указание. При построении рационально преувеличивать различие в скоростях распространения обыкновенной и необыкновенной волн.

203. Определить число прерываний, осуществляемых установкой Керра, если она питается от генератора частоты $\nu = 10^7$ Гц, дающего импульсы с амплитудой напряжения 6000 В. Конденсатор Керра имеет длину $l = 5$ см, расстояние между пластинами 1 мм. В качестве жидкости взят нитробензол ($B = 2 \cdot 10^{-5}$ СГСЭ).

Указание. При расчете обратить внимание на то, что система Керра не пропускает света всякий раз, когда разность хода лучей в конденсаторе достигает целого числа длин волн.

Ответ. $1{,}6 \cdot 10^8$.

204. Каков будет вид интерференционной картины, наблюдаемой в спектрографе, скрещенном с интерферометром Жамена, если в одно из плеч интерферометра введена тонкая стеклянная пластинка?

Как изменится картина при увеличении толщины пластинки? Как изменится картина при употреблении стекла с большей дисперсией? при переносе пластинки из одного плеча в другое? при помещении одинаковых пластинок в разных плечах?

Указание. Уравнение k-й полосы при введении в одно плечо пластинки толщиной d с показателем преломления n, а в другое — толщиной d' с показателем преломления n' имеет вид $y = a[k\lambda + (n-1)d - (n'-1)d']$, причем n и n' — функции λ.

205. Какой вид будет иметь интерференционная картина (см. упражнение 204), если в одно плечо введена стеклянная пластина, а в другое — слой паров натрия?

Указание. Обратить внимание на очень быстрое изменение показателя преломления паров натрия вблизи полосы поглощения.

206. а) Вывести формулу Эйнштейна (160.2) для интенсивности рассеянного света.

б) Исходя из формулы Эйнштейна, вывести соответствующую формулу для газов, совпадающую с первоначальной формулой Рэлея:

$$I = I_0 \frac{\pi^2 V^2}{2\lambda^4 L^2} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial N}\right)^2 N\bigl(1 + \cos^2\theta\bigr) = I_0 \frac{\pi^2}{2\lambda^4} \frac{(\varepsilon - 1)^2}{N} \bigl(1 + \cos^2\theta\bigr).$$

в) Вывести формулу Рэлея для газов, рассматривая непосредственно флуктуацию числа частиц.

г) Отношения интенсивностей анизотропного, суммарного и изотропного рассеяния выразить через деполяризацию суммарного рассеяния (наблюдение под прямым углом к падающему пучку).

Указания. а) Исходить из формулы (160.1) и выражений, полученных в теории термодинамических флуктуаций:

$$\overline{(\Delta p)^2} = \frac{kT}{V^* \beta_S}, \quad \overline{(\Delta S)^2} = k c_p \rho V^*.$$

Воспользоваться термодинамическими соотношениями

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p}\right)_S = \left(\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_S \beta_S, \quad \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial S}\right)_p = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)_p \frac{T}{c_p \rho V^*}, \quad \beta_S = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_S$$

и приближенными равенствами

$$\left(\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_S \approx \left(\frac{1}{\sigma}\ \frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_p \approx \left(\rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T, \quad \sigma = \left(\frac{1}{V}\ \frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

(более подробно см.: И. Л. Ф а б е л и н с к и й. Молекулярное рассеяние света.– М.: Наука, 1965 г.).

б) Воспользоваться уравнением состояния идеального газа и соотношением

$$\varepsilon - 1 = \mathrm{const} \cdot N.$$

в) Записать $\Delta\varepsilon$ в виде $\Delta\varepsilon = \left(\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial N}\right)_T \Delta N$ и воспользоваться соотношением $\overline{(\Delta N)^2} = N$, где N — среднее число частиц в том объеме, для которого вычисляется флуктуация. Обратить внимание на совпадение формул для идеального газа и разбавленного раствора (160.3).

г) Принять во внимание, что изотропное рассеяние полностью поляризовано, а деполяризация анизотропной части рассеяния равна $6/7$.

207. Показать, что полное решение уравнения (156.7) с двумя произвольными постоянными имеет вид

$$r = \tilde{c}_1 \sin\omega_0 t + \tilde{c}_2 \cos\omega_0 t + \frac{e}{m}\ \frac{E_0 \sin\omega t}{\omega_0^2 - \omega^2}\,.$$

Первые два члена представляют *собственные* колебания электрона, третий — *вынужденные*. Во всех реальных задачах имеется некоторое, хотя бы слабое затухание, и поэтому первые два члена по истечении некоторого времени не будут играть роли (ср. упражнение 208, из которого ясно, что $\tilde{c} = Ce^{-kt}$). Поэтому решение задачи можно записать в виде

$$r = \frac{e}{m}\ E_0 \frac{\sin\omega t}{\omega_0^2 - \omega^2}\,.$$

208. Найти решение уравнения дисперсии при наличии затухания

$$m\ddot{r} + g\dot{r} + fr = eE_0 \sin\omega t.$$

(Ввести обозначения $g = m\gamma$ и $f = m\omega_0^2$.) Общее решение имеет вид

$$r = \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right)\left[c_1 \exp\left(i\omega_1 t\right) + c_2 \exp\left(-i\omega_1 t\right)\right] + \frac{e}{m}\ \frac{E_0 \exp\left(i\omega t\right)}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}\,,$$

где $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$ — «частота» собственного колебания затухающего электрона (практически $\omega_1 \approx \omega_0$, ибо $\gamma^2/4 \ll \omega_0^2$; так, например, для разреженного пара натрия $\omega_0 \approx 3 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$, $\gamma \approx 10^8$ с$^{-1}$).

а) По истечении какого времени t амплитуда собственных колебаний для Na уменьшится в 100 раз?

Начиная с того времени, когда можно пренебречь собственными колебаниями, решению можно придать вид

$$r = \frac{e}{m}\ \frac{E_0 \exp\left(i\omega t\right)}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}\,.$$

б) Комплексное выражение для r означает, что r сдвинуто по фазе относительно E.

Выразить r в виде $r = R\exp[i(\omega t + \delta)]$ и определить действительное значение амплитуды R и сдвиг фазы δ.

Ответ. $R = \dfrac{e}{m}\ \dfrac{E_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}}$, $\operatorname{tg}\delta = \dfrac{\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}$.

Таким образом, сдвиг фазы зависит от затухания γ и частоты ω; кроме того, наблюдается изменение фазы (скачком на π) при прохождении частоты вынуждающей волны через собственную частоту вибратора ($\omega = \omega_0$).

209. Найти выражение для комплексной диэлектрической проницаемости ε, исходя из комплексного значения для r.

Ответ. $\varepsilon = 1 + \dfrac{4\pi N(e^2/m)}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}$.

Соответствующий комплексный показатель преломления равен

$$n' = \sqrt{\varepsilon} = n(1 - i\varkappa),$$

причем мнимая часть его ($n\varkappa$) определяет затухание волны, так что

$$s = A_0 \exp\left(-\frac{2\pi}{\lambda_0}\ n\varkappa z\right) \exp\left[i \cdot 2n\left(\frac{t}{T} - \frac{zn}{\lambda_0}\right)\right],$$

т.е. свет распространяется в виде плоской затухающей волны (ср. § 141).

210. Найти выражения для определения n и $\varkappa$, исходя из данных упражнения 209.

Указание. Разделить действительную и мнимую части в выражении $\varepsilon = n^2(1 - i\varkappa)^2$.

Ответ.

$$n^2(1 - \varkappa^2) = 1 + \frac{4\pi N(e^2/m)(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}, \quad 2n^2\varkappa = \frac{4\pi N(e^2/m)\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2},$$

где $\gamma = g/m$.

211. Сравнить силы F_E и F_H, действующие на электрон со стороны электрической и магнитной составляющей световой волны обычной частоты и интенсивности (примем $\nu = 5 \cdot 10^{14}$ с$^{-1}$, $E = H \approx 1$ абс. ед.).

Указание. Уравнение движения электрона в первом приближении можно записать, не учитывая действия магнитной слагающей поля волны; действительно, расчет, проведенный в этом приближении, покажет, что действие магнитной составляющей ничтожно мало.

Ответ. $\dfrac{F_H}{F_E} \approx \dfrac{e}{m}\ \dfrac{H}{\omega} \approx 10^{-8}$.

212. Вывести закон поглощения плоской волны (закон Бугера), исходя из предположения, что в слое данной толщины dx поглощается определенная часть падающего света, т.е. что коэффициент поглощения k не зависит от интенсивности света (это допущение проверено на опыте в очень широком интервале интенсивностей С.И. Вавиловым).

Ответ. $dI/I = -k\,dx$, т.е. $I = I_0 e^{-kx}$.

213. Найти зависимость от расстояния r силы, действующей на электрон внутри положительно заряженной сферы (модель Дж. Дж. Томсона), исходя из закона Кулона.

Ответ. $F = -fr$.

214. Если задержать в белом свете область близ $\lambda = 550{,}0$ нм, то оставшийся свет приобретет фиолетовый оттенок, легко переходящий в красный или синий и потому именуемый чувствительным оттенком.

Бикварц Солейля представляет собой две пластинки правого и левого кварца определенной толщины, сложенные, как показано на рис. 44. Толщина их такова, что в параллельных николях они сообщают белому свету чувствительный оттенок.

а) Рассчитать толщину бикварца и объяснить его действие (при $\lambda = 555{,}0$ нм, $\alpha = 24°$).

б) Какая половина бикварца (D или G) сделается синей при введении правого вещества?

Ответ. а) 3,75 мм; б) D синеет, G краснеет.

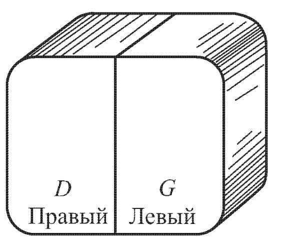


Рис. 44

215. Параллельный пучок плоскополяризованных лучей проходит через высокую трубку, наполненную слегка замутненным раствором сахара.

В случае белого света сбоку наблюдается ряд винтовых линий различной окраски.

Объяснить их происхождение. Как зависит величина шага винта от цвета? от концентрации раствора? Определить длину шага для желтых лучей (линия D_1) при концентрации раствора тростникового сахара 50 г/л ($[\alpha_D] = 67°$).

Указание. Возможность наблюдать эту поляризацию без анализирующего николя связана с тем, что в направлении колебания электрического вектора свет не рассеивается.

216. Описать картину, наблюдаемую в основном опыте Араго в белом свете. Как она меняется при вращении поляризатора? анализатора? кварца?

217. В кварцевых спектрографах призма вырезается так, чтобы свет в призме шел *вдоль* оптической оси (рис. 45 *а*). При этом все же наблюдается небольшое раздвоение линий. Для его устранения применяют призму Корню, составленную из двух половин, из правого и левого кварца (рис. 45 *б*). Объяснить явление и действие призмы Корню.

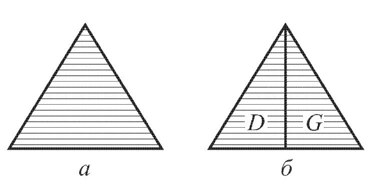


Рис. 45

218. Указать данные для спектрального аппарата (решетка, пластинка Люммера–Герке), необходимого для наблюдения эффекта Зеемана в водороде в поле, равном 10 000 Э.

219. Рассмотреть действие электрического поля E на гармонически колеблющийся электрон. (Для простоты рассмотреть случай, когда направление поля совпадает с направлением колебания.)

Ответ. В отсутствие поля $r = a\cos\omega_0 t$, где $\omega_0^2 = f/m$ (m — масса электрона, f — постоянная квазиупругой силы).

При наличии поля $r = \dfrac{eE}{m\omega_0^2} + b\cos\omega_0 t$, т.е. гармоническое колебание происходит с прежней частотой, но относительно нового положения равновесия, смещенного на величину, зависящую от величины наложенного поля.

220. Явление испускания света возбужденным атомом есть статистический процесс. Эго значит, что число атомов, излучающих за время dt, пропорционально этому времени (dt) и числу наличных возбужденных атомов n. Коэффициент пропорциональности α называется *вероятностью процесса*.

а) Определить число возбужденных атомов как функцию времени, полагая, что в начальный момент ($t = 0$) число их равно n_0.

Ответ. $n = n_0 e^{-\alpha t}$.

б) Определить среднюю продолжительность возбужденного состояния τ.

Указание. Число атомов, имеющих продолжительность возбужденного состояния от t до $t + dt$, равно $n_0 \exp(-\alpha t)\alpha\, dt$; общая продолжительность жизни этой группы есть $\alpha_0 t n_0 \exp(-\alpha t)\, dt$. Средняя продолжительность возбужденного состояния

$$\tau = \frac{\alpha \int\limits_0^\infty t n_0 \exp(-\alpha t)\, dt}{n_0} = \frac{1}{\alpha}.$$

221. Зеленое стекло при комнатной температуре сильно поглощает красные лучи, но не испускает их в заметном количестве. Стоит ли это в противоречии с законом Кирхгофа?

Ответ. Стекло должно излучать не больше, чем черное тело при *той же* температуре.

222. Суммарное излучение (без разложения по спектру) определяет испускательную способность тела $E_T = \int\limits_0^\infty E_{\nu,T}\, d\nu$.

а) Выразить полный поток энергии, испускаемый поверхностью $d\sigma$ во все стороны наружу.

Ответ. $E_T\, d\sigma$.

б) Интенсивность излучения (обозначим ее здесь через K) определяется так же, как в гл. III. Найти связь между E_T и K. Показать, что для случая черного излучения (когда K не зависит от направления, от φ) имеем $\varepsilon_T = \pi K$.

в) Плотность лучистой энергии u есть энергия, заключенная в единице объема. Найти связь между u и K в вакууме (скорость распространения энергии в вакууме равна c) для черного излучения (K не зависит от направления).

Указание. Интегрирование производить по всем направлениям.

Ответ. $u = \dfrac{K\, d\sigma\, \cos\varphi\, d\Omega}{d\sigma\, \cos\varphi \cdot c} = \dfrac{4\pi K}{c} = \dfrac{4\varepsilon_T}{c}$.

223. Стенки шаровой полости диаметра D отражают диффузно по закону Ламберта с коэффициентом диффузного отражения ρ. Каков должен быть диаметр отверстия d, чтобы полость можно было считать черным телом с точностью до 0,1 %?

Указание. Падающий поток, равный 1, при диффузном отражении с коэффициентом ρ превращается в поток ρ, равномерно распределенный по поверхности сферы диаметра D.

Ответ. Коэффициент поглощения стенок полости $A \approx 1 - \rho\dfrac{\pi d^2}{4\pi D^2} = 0{,}999$; при $\rho = 0{,}4$ получим $d \approx D/10$; при $\rho = 1$ (белая диффузно рассеивающая стенка) $d \approx D/16$.

224. Закон Стефана–Больцмана пишут в виде $\varepsilon_T = \sigma T^4$ или $u = aT^4$, где u — плотность энергии. Определить постоянную a (числовое значение и размерность), зная σ.

Ответ. $a = 4\sigma/c$.

225. Объяснить, исходя из закона Кирхгофа, тот факт, что при испускании имеет место частичная поляризация, зависящая от угла испускания.

Указание. При косом падении отражательная способность зависит от характера поляризации; следовательно, и поглощательная способность зависит от угла падения и характера поляризации.

226. Показать, что *любое* вещество (в том числе и газ), имеющее на единицу толщины слоя испускательную способность $E_{\nu,T}$ и поглощательную способность $A_{\nu,T}$, в бесконечно толстом слое излучает как абсолютно черное тело.

Ответ. Полное излучение $= \int\limits_0^\infty E \exp(-Ax)\,dx = \dfrac{E}{A} = \varepsilon_{\nu,T}$.

227. При изучении закона Стефана–Больцмана измеряется поток, направляемый из отверстия черного тела при помощи линзы L на термоэлемент. Нагревая термоэлемент вместо излучения током так, чтобы достичь того же стационарного состояния, оценивают количество энергии, приносимой за 1 с потоком излучения.

Рассчитать мощность, поглощаемую термоэлементом, если отверстие черного тела есть квадрат со стороной 4 мм, расположенной перпендикулярно к оси линзы. Линза (диаметр 40 мм, фокусное расстояние 40 см) отображает отверстие на термоэлемент в натуральную величину; потери на отражение и поглощение в линзе равны 9 %, потери на отражение от термоэлемента — 1 %. Температура черного тела $T = 1000$ K.

Ответ. $16{,}2 \cdot 10^{-4}$ Вт.

228. Из опыта найден вид функции $\varepsilon_{\nu,T}$ для температуры $T = 1000$ K. Построить график для $T' = 2000$ K.

Ответ. Каждая точка первого графика $(\nu, \varepsilon_{\nu,T})$ преобразуется в точку нового графика $(\nu', \varepsilon_{\nu',T'})$ при помощи соотношений

$$\nu' = \nu\,\frac{T'}{T} \quad \text{и} \quad \varepsilon_{\nu',T'} = \varepsilon_{\nu,T}\left(\frac{T'}{T}\right)^3.$$

229. Показать, что из закона Вина следует закон Стефана–Больцмана.

Ответ. $\varepsilon_{\nu,T} = c\nu^3 f\left(\dfrac{\nu}{T}\right)$, $\varepsilon = \int\limits_0^\infty \varepsilon_{\nu,T}\,d\nu = cT^4 \int\limits_0^\infty F(\xi)\,d\xi = \sigma T^4$, где $\sigma = c\int\limits_0^\infty F(\xi)\,d\xi$ — постоянная величина.

230. Вывести из формулы Планка закон Стефана–Больцмана и вычислить постоянную σ.

Указание.

$$\varepsilon = \int\limits_0^\infty \varepsilon_{\nu,T}\,d\nu = 1{,}0823\,\frac{12h\pi}{c^2}\left(\frac{kT}{h}\right)^4 = \sigma T^4,$$

где $\sigma = 1{,}0823\,\dfrac{12\pi k^4}{c^2h^3}$.

При интегрировании использовать соотношение

$$\int\limits_0^\infty \nu^3 \exp\left[-n\,\frac{h\nu}{kT}\right] d\nu = 6\,\frac{k^4T^4}{h^4}\,\frac{1}{n^4}, \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Ответ. $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-12}$ Вт $\cdot$ см$^{-2} \cdot$ K^{-4}.

231. Записать закон излучения Планка для $\varepsilon_{\lambda,T}$.

Ответ. $\varepsilon_{\lambda,T} = 2\pi hc^2\lambda^{-5}\dfrac{1}{\exp(hc/kT\lambda)-1} = c_1\lambda^{-5}\dfrac{1}{\exp(c_2/\lambda T)-1}$,
где

$$c_1 = 2\pi hc^2 = 3{,}740\cdot 10^{-12}\ \text{Дж}\cdot\text{см}^2\cdot\text{с}^{-1},\quad c_2 = \frac{hc}{k} = 1{,}4387\ \text{см}\cdot\text{К}.$$

232. Вывести из формулы Планка закон смещения Вина $T\lambda_{\text{макс}} = b$ и вычислить постоянную b.

Указание. Задача сводится к решению трансцендентного уравнения

$$\frac{\xi\cdot e^{\xi}}{e^{\xi}-1} = 5,$$

корень которого $\xi_0 = 4{,}965$.

Ответ. $b = T\lambda_{\text{макс}} = ch/k\xi_0 = 0{,}2898$ см·К.

Исходя из формулы Планка, найти λ^*, соответствующее $\nu_{\text{макс}}$, и сравнить его с $\lambda_{\text{макс}}$ закона Вина. Произвести сравнение для $T = 5000$ К.

Указание. Задача сводится к решению трансцендентного уравнения $\dfrac{\xi\cdot e^{\xi}}{e^{\xi}-1} = 3$, корень которого $\xi_0 = 2{,}821$.

Ответ. $\dfrac{\lambda^*}{\lambda_{\text{макс}}} = \dfrac{4{,}965}{2{,}821} = 1{,}759.$

При $T = 5000$ К

$$\lambda_{\text{макс}} = 579{,}0\ \text{нм},\quad \lambda^* = 1019{,}0\ \text{нм} = 1{,}019\ \text{мкм}.$$

233. Вин для черного излучения нашел формулу

$$\varepsilon_{\lambda,T} = c_1\lambda^{-5}\exp\left(-\frac{c_2}{\lambda T}\right).$$

а) Показать, что для малых длин волн или низких температур (малое λT) формулы Вина и Планка совпадают.

б) Определить, для какого значения λT расхождение формул не превосходит 1 %.

Указание. Вычислить таблицу значений $r = \dfrac{\varepsilon_{\text{Планк}}}{\varepsilon_{\text{Вин}}}$ для разных λT.

Ответ.							
λT =	2000	2500	3000	3500	4000	5000	мкм·град
r =	1,0008	1,003	1,008	1,017	1,028	1,056	

234. Доказать, что показания радиационного термометра не зависят от расстояния до источника, если соблюдены условия, указанные в тексте.

Указание. Вычислить поток, падающий на приемник, и показать, что он равен $BS\Omega$, где B — яркость источника, S — площадь приемника, Ω — телесный угол, определяемый параметрами аппарата.

235. Найти соотношение между истинной температурой T и радиационной температурой T_r.

Ответ. $Q_T = \dfrac{\sigma T_r^4}{\sigma T^4}$, т.е. $T = \dfrac{1}{\sqrt[4]{Q_T}}\cdot T_r$.

236. Определить температуру поверхности фотосферы Солнца, зная, что солнечная постоянная равна 1,95 кал/мин·см^2, и принимая, что испускание Солнца близко к черному телу ($Q_T \approx 1$). Радиус Солнца $r = 6{,}955\cdot 10^{10}$ см. Расстояние до Солнца $l = 1{,}495\cdot 10^{13}$ см.

Ответ. $T = 5760$ К.

237. Установить соотношение между истинной и цветовой температурой тела, зная монохроматическую испускательную способность его Q_λ для двух длин волн $\lambda_1 = 4700$ Å и $\lambda_2 = 6600$ Å:

$$Q_{\lambda_1} = \frac{E_{\lambda_1,T}}{\varepsilon_{\lambda_1,T}}, \quad Q_{\lambda_2} = \frac{E_{\lambda_2,T}}{\varepsilon_{\lambda_2,T}}.$$

Цветовая температура $T_c(\lambda_1, \lambda_2)$ есть приближенно температура черного тела, для которого красно-синее отношение равно такому же отношению для измеряемого тела с истинной температурой T, т.е.

$$\frac{E_{\lambda_1,T}}{E_{\lambda_2,T}} = \frac{\varepsilon_{\lambda_1,T_c}}{\varepsilon_{\lambda_2,T_c}}.$$

Пользуясь упрощенной формулой Планка (формула Вина), найдем

$$\frac{1}{T_c} - \frac{1}{T} = \frac{\ln(Q_1/Q_2)}{c_2(1/\lambda_1 - 1/\lambda_2)}.$$

Оценить ошибку, допускаемую при применении формулы Вина для температур до 1000 К (см. упражнение 233).

238. Вывести соотношение между яркостной и истинной температурой.

Указание. Пользуясь упрощенной формулой Планка (формулой Вина), найдем, что

$$Q_\lambda = \frac{B_{\lambda_1,T}}{B^0_{\lambda_1,T}} = \exp\left[\frac{c_2}{\lambda}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{S_\lambda}\right)\right].$$

Здесь B^0 — яркость черного тела, B — яркость изучаемого тела. По определению яркостной температуры $B_{\lambda,T} = B^0_{\lambda,S_\lambda}$.

239. Вычислить, как изменяется интенсивность излучения черного тела вблизи $\lambda = 500{,}0$ нм при изменении температуры от 1000 до 1100 К. Выразить это возрастание как пропорциональное n-й степени температуры и определить n.

Указание. Использовать формулу Вина $\varepsilon_{\lambda,T} = c_1\lambda^{-5}\exp\left(-\frac{c_2}{\lambda T}\right)$; оценить расхождение с формулой Планка.

Значения постоянных: $c_1 = 3{,}70 \cdot 10^{-12}$ Вт·см^2, $c_2 = 14\,380$ мкм·К.

Ответ. $n \approx 30$.

240. Проверить расчетом, что яркость желтого излучения черного тела возрастает *вдвое* при изменении температуры от 1800 до 1875 К.

241. Вероятность излучения показывает, какая часть имеющихся налицо возбужденных атомов n испустит свет за время dt. Если число таких атомов обозначить через dn, то вероятность α, по определению, равна $\alpha = -\frac{dn}{n}\frac{1}{dt}$ или $dn = -\alpha n\,dt$, причем знак минус означает, что за время dt число возбужденных атомов уменьшается на dn (высвечивается).

1) Исходя из данного определения вероятности высвечивания, найти закон изменения числа возбужденных атомов с течением времени.

Ответ. Из уравнения $dn = -\alpha n\,dt$ следует, что $n = n_0 e^{-\alpha t}$, где n_0 — число возбужденных атомов в начальный момент ($t = 0$).

2) Зная закон высвечивания, определить среднее время жизни возбужденного атома.

Указание. Среднее время жизни есть $\tau = \frac{1}{n_0}\int\limits_0^\infty \alpha n_0 t e^{-\alpha t}\,dt$.

Ответ. $\tau = 1/\alpha$.

242. Воспользовавшись данными табл. 38.1 (см. § 205), построить график (205.5), отложив по оси абсцисс N, по оси ординат $1/m^2$ в подходящем масштабе. Какой вид будет иметь график? Определить с помощью этого графика n и R.

Ответ. График — прямая линия; $n = 2$, $R = 109\,700$.

243. Вычислить энергию электрона, обращающегося около протона по круговой орбите радиуса a.

Ответ. $E = -e^2/2a$.

Объяснить смысл отрицательного значения энергии.

244. Вывести выражение для частоты обращения электрона по круговой орбите около протона

$$\omega^2 = \left(\frac{1}{T}\right)^2 = \frac{2E^3}{\pi^2 \mu e^4}\,.$$

Использовав для энергии состояния выражение $E_n = \dfrac{hRc}{n^2}$, вычислить частоту обращения электрона на 2-й и 3-й орбитах и сравнить с частотой, соответствующей по теории Бора переходу с 3-й орбиты на 2-ю.

245. Рассчитать потенциал возбуждения атома натрия, испускающего волну длиной $\lambda = 589{,}0$ нм.

246. Какова температура одноатомного газа, средняя кинетическая энергия молекул которого достаточна для того, чтобы возбудить атом ртути и заставить его испускать резонансную линию с $\lambda = 185{,}0$ нм?

247. Определить заселенности N_m, N_n уровней m, n атома, принимая во внимание вынужденное испускание и поглощение, обусловленные взаимодействием с монохроматическим полем, частота которого соответствует переходу $m \to n$. Вычислить также поглощенную (излученную) мощность и коэффициент поглощения (усиления).

Ответ:

$$\frac{N_m}{g_m} - \frac{N_n}{g_n} = \frac{N_{m0}/g_m - N_{n0}/g_n}{1 + b_{mn}u/\sigma}\,,$$

$$q = \hbar\omega g_m b_{mn} u \left(\frac{N_m}{g_m} - \frac{N_n}{g_n}\right) = \hbar\omega g_m b_{mn} u\, \frac{N_{m0}/g_m - N_{n0}/g_n}{1 + b_{mn}u/\sigma}\,,$$

$$\alpha = \frac{\lambda^2}{4}\, g_m a_{mn} \left(\frac{N_m}{g_m} - \frac{N_n}{g_n}\right) = \frac{\lambda^2}{4}\, g_m a_{mn} \frac{N_{m0}/g_m - N_{n0}/g_n}{1 + b_{mn}u/\sigma}\,.$$

Здесь введены обозначения

$$\frac{1}{\sigma} = \left[\frac{1}{g_m W_m} + \frac{1}{g_n W_n}\left(1 - \frac{A_{mn}}{W_m}\right)\right] g_m,$$

a_{mn}, b_{mn} — спектральные плотности первого и второго коэффициентов Эйнштейна, g_m, g_n — статистические веса уровней m, n; W_m, W_n — скорости затухания состояний m, n; A_{mn} — первый коэффициент Эйнштейна для перехода $m \to n$; N_{m0}, N_{n0} — заселенности при $u = 0$.

У к а з а н и е. Исходить из уравнений

$$W_m N_m = W_m N_{m0} + (b_{nm} N_n - B_{mn} N_m) u,$$

$$W_n N_n = W_n N_{n0} + A_{mn}(N_m - N_{m0}) + (b_{mn} N_m - B_{nm} N_m) u.$$

248. Выразить поток Φ излучения, выходящего из лазера, через энергию, запасенную в среде и способную перейти в энергию излучения в результате вынужденных переходов.

Ответ. $\Phi = q_{\max} SL - c u_0 f S$.

Указание. Использовать соотношения (224.1), (225.6)–(225.8), а также связь между коэффициентом усиления и спектральной плотностью второго коэффициента Эйнштейна

$$\alpha(\omega) = \frac{\hbar\omega}{c}\, g_m b_{mn}(\omega) \left(\frac{N_m}{g_m} - \frac{N_n}{g_n} \right).$$

249. Определить собственные волновые числа эталона Фабри–Перо.

Ответ. $k_q = \frac{\pi}{L}\, q$, $q = 1, 2, \ldots$

Указание. Представить в комплексном виде падающую волну $A \exp(ik_1 z)$, волну внутри эталона $B \exp(ikz) + C \exp(-ikz)$ и волну, прошедшую через него, $D \exp(ik_1 z)$. Если обозначить через t_1, t_2 и ρ_1, ρ_2 амплитудные коэффициенты пропускания и отражения зеркал эталона, то система уравнений для нахождения амплитуд B, C, D имеет вид

$$\begin{gathered} B = \rho_1 C + t_1 A, \\ C \exp(-ikL) = \rho_2 B \exp(ikL), \\ D \exp(-ik_1 L) = t_2 B \exp(ikL) \end{gathered} \tag{1}$$

(начало координат помещено на первом зеркале, ось Oz перпендикулярна к плоскости зеркал).

Решая эту систему уравнений, можно получить коэффициенты отражения и пропускания эталона (см. упражнение 47). Если положить $A = 0$, то система уравнений (1) определяет собственные решения задачи. При $A = 0$ система (1) однородна, и ненулевые решения возможны только в том случае, когда ее детерминант равен нулю. Это условие дает уравнение относительно k

$$\rho_1 \rho_2 \exp(2ikL) = 1,$$

имеющее решение лишь при комплексном k

$$k = k' + ik'' = \frac{\pi}{L}\, q - i\, \frac{1}{L}\, \ln \frac{1}{\rho_1 \rho_2}.$$

Мнимая часть k'' определяет изменение амплитуд в пространстве.

250. Вычислить положение z_0 сечения с минимальным радиусом и величину этого радиуса a_0 для гауссова пучка, два волновых фронта которого совпадают с двумя соосными зеркалами, обладающими фокусными расстояниями f_1, f_2 и расположенными в точках z_1, z_2 общей оси. Проанализировать полученные формулы для различных соотношений между f_1 и f_2 ($f_1 = f_2$, $f_1 \to \infty$, $f_1 < 0$, $f_2 > 0$ и т.п.).

Ответ.

$$z_0 = z_1 + \frac{L}{2}\, \frac{2f_2/L - 1}{(f_1 + f_2)/L - 1}, \tag{1}$$

$$a_0^2 = \frac{\lambda L}{4\pi} \sqrt{\frac{(2f_1/L - 1)(2f_2/L - 1)(2(f_1 + f_2)/L - 1)}{[(f_1 + f_2)/L - 1]^2}}. \tag{2}$$

Указание. Из соотношения (228.1) и условий задачи следуют два уравнения

$$\begin{gathered} 2f_2 = z_2 - z_0 + \frac{(a_0^2 k)^2}{z_2 - z_0}, \\ -2f_1 = z_1 - z_0 + \frac{(a_0^2 k)^2}{z_1 - z_0}, \end{gathered}$$

относительно искомых величин z_0, a_0. С помощью параметров

$$g_1 = 1 - \frac{L}{2f_1}, \quad g_2 = 1 - \frac{L}{2f_2} \tag{3}$$

соотношения (1), (2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} z_0 &= z_1 + L\,\frac{g_2(1-g_1)}{g_1+g_2-2g_1g_2}, \\ a_0^2 &= \frac{\lambda L}{2\pi}\sqrt{\frac{g_1g_2(1-g_1g_2)}{(2g_1g_2-g_1-g_2)^2}}. \end{aligned} \tag{4}$$

Из (4) вытекает следующее условие существования решения:

$$0 < g_1g_2 < 1,$$

или, в прежних обозначениях,

$$0 < \left(1 - \frac{L}{2f_1}\right)\left(1 - \frac{L}{2f_2}\right) < 1. \tag{5}$$

251. Вычислить разность частот, отвечающих двум боковым волнам с индексами m, n, отличающимися на 1. Сравнить с $\Delta\omega$, соответствующей изменению на 1 аксиального индекса q.

Ответ. $\omega_{m,n,q} \approx \omega\left[1 + \dfrac{\theta_{m,n}^2}{2}\right]$, $\quad \theta_{m,n}^2 \ll 1$, $\quad \omega = \dfrac{\pi c}{L n_{\text{ср}}}\,q$,

$$\begin{aligned} \omega_{m+1,n+1,q} - \omega_{m,n,q} &= \omega\left[\left(\frac{\lambda}{a}\right)^2(2m+1) + \left(\frac{\lambda}{b}\right)^2(2n+1)\right] = \\ &= \Delta\omega\left[\frac{\lambda L}{a^2}\,(2m+1) + \frac{\lambda L}{b^2}\,(2n+1)\right], \quad \Delta\omega = \frac{\pi c}{L n_{\text{ср}}}. \end{aligned}$$

252. Установить зависимость дифракционных потерь от величин m, n, $\sqrt{\lambda L}/a$, $\sqrt{\lambda L}/b$ для резонатора с плоскими зеркалами размером ab.

Указание. После распространения волны на длину L за пределы второго зеркала может проникнуть лишь та часть энергии, которая проходит через полосу вдоль периметра исходного волнового фронта с шириной порядка $\sqrt{\lambda L}$. Принимая зависимость энергии от координат вида

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{a}\,mx\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{b}\,ny\right), \tag{1}$$

дня полной энергии находим

$$\int_0^a\int_0^b \sin^2\left(\frac{\pi}{a}\,mx\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{a}\,my\right)dx\,dy = \frac{ab}{4}.$$

Энергия, сконцентрированная в указанной полосе, равна

$$2b\int_0^{\sqrt{\lambda L}}\sin^2\left(\frac{\pi}{a}\,mx\right)dx + 2a\int_0^{\sqrt{\lambda L}}\sin^2\left(\frac{\pi}{b}\,ny\right)dy \approx \frac{2\pi^2}{3}\left(\frac{m^2}{a^2}\,b + \frac{n^2}{b^2}\,a\right)(\lambda L)^{3/2},$$

причем синусы заменены аргументами. Следовательно, для относительных потерь имеем

$$f \infty m^2\left(\frac{\sqrt{\lambda L}}{a}\right)^3 + n^2\left(\frac{\sqrt{\lambda L}}{b}\right)^3. \quad (2)$$

Коэффициент пропорциональности, согласно строгим расчетам, равен 1,03.

Полученное соотношение справедливо, если синусы можно заменить аргументами, т.е. если

$$\pi\,\frac{\sqrt{\lambda L}}{a}\,m \ll 1,$$

$$\pi\,\frac{\sqrt{\lambda L}}{b}\,n \ll 1.$$

Тот же результат (2) получается и при раздельном анализе дифракции Френеля для каждой плоской волны, образующей стоячую волну (1). При сложении дифракционных картин от плоских волн следует принять во внимание противоположность их фаз.

253. Определить зависимость излучения лазера от времени при возбуждении N типов колебаний, эквидистантно расположенных в шкале частот и обладающих одинаковыми амплитудами.

Ответ. $s = NA\,\dfrac{\sin(N\Delta\omega/2)}{\sin(\Delta\omega/2)}\,\cos\left(\omega_0 + \dfrac{N-1}{2}\,\Delta\omega\right)t.$

Указание. В сумме

$$s = A\sum_{j=0}^{N-1}\cos(\omega_0 + j\Delta\omega)t$$

использовать комплексное представление тригонометрических функций.

254. Вывести формулу (232.3).

Указание. Воспользоваться соотношениями

$$P = 2\pi\int_0^a S(r)r\,dr; \quad S(r) = \frac{cn_0}{8\pi}\,A_0^2\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right).$$

255. Определять кривизну ρ луча в пучке с линейной зависимостью освещенности от координаты в поперечном сечении. Вычислить угол θ отклонения и смещение пучка Δx в слое толщины l.

Ответ. $\rho = \dfrac{n_2A_0^2}{2an_0}$; $\theta = \dfrac{n_2A_0^2 l}{2n_0 a}$; $\Delta x = \dfrac{n_2A_0^2}{n_0}\,\dfrac{l^2}{4a}$.

Указание. Воспользоваться выражением для кривизны луча $\rho = \dfrac{d}{dx}\,(\ln n)$; полагать $\theta \ll 1$.

256. Вывести формулы (233.3).

Указание. Применить формулу решетки

$$n_0 d(\sin\theta_m - \sin\theta_0') = k\lambda; \quad d = \frac{\lambda}{2n_0\sin\theta_0'}$$

и закон преломления

$$n\sin\theta' = \sin\theta.$$

257. Вычислить дипольный момент ангармонической молекулы, индуцированный монохроматическим полем

$$E(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

и полем, состоящим из двух монохроматических волн

$$E(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Ответ.

$$p = \frac{e^2/m}{\omega_c^2 - \omega^2}\, E(t) \left[1 + \frac{3\gamma}{4}\, \frac{(e/m)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^3}\, A^2\right] + \frac{\beta}{2} \left(\frac{e}{m}\, \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)^2 \times \\ \times \left[\frac{1}{\omega_0^2} + \frac{\cos 2(\omega t + \varphi)}{\omega_0^2 - (2\omega)^2}\right] + \frac{\gamma}{4} \left(\frac{e}{m}\, \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)^3 \frac{\cos 3(\omega t + \varphi)}{\omega_0^2 - (3\omega)^2}, \quad (1)$$

$$p = p_1 + p_2 + \frac{\beta e^3}{m^2}\, B_1 B_2 \left[\frac{\cos(\Phi_1 - \Phi_2)}{\omega_0^2 - (\omega_1 - \omega_2)^2} + \frac{\cos(\Phi_1 + \Phi_2)}{\omega_0^2 - (\omega_1 + \omega_2)^2}\right] + \\ + \frac{3\gamma e^4}{4m^3} \left\{B_1^2 B_2 \left[\frac{2\cos\Phi_2}{\omega_0^2 - \omega_2^2} + \frac{\cos(2\Phi_1 - \Phi_2)}{\omega_0^2 - (2\omega_1 - \omega_2)^2} + \frac{\cos(2\Phi_1 + \Phi_2)}{\omega_0^2 - (2\omega_1 + \omega_2)^2}\right] + \right. \\ \left. + B_1 B_2^2 \left[\frac{2\cos\Phi_1}{\omega_0^2 - \omega_1^2} + \frac{\cos(2\Phi_2 - \Phi_1)}{\omega_0^2 - (2\omega_2 - \omega_1)^2} + \frac{\cos(2\Phi_2 + \Phi_1)}{\omega_0^2 - (2\omega_2 + \omega_1)^2}\right]\right\}. \quad (2)$$

Величины p_1, p_2 в (2) получаются из p (см. (1)) заменой ω, A на ω_1, A_1 и на ω_2, A_2 соответственно.

В (2) введены обозначения

$$B_{1,2} = \frac{A_{1,2}}{\omega_0^2 - \omega_{1,2}^2}, \quad \Phi_{1,2} = \omega_{1,2} t + \varphi_{1,2}.$$

258. Найти плоские монохроматические (частота 2ω) волны, являющиеся решением уравнений Максвелла,

$$[\mathbf{kE}] = \frac{2\omega}{c}\, \mathbf{H}, \quad [\mathbf{kH}] = -\frac{2\omega}{c}\, \varepsilon(2\omega)\mathbf{E} - \frac{2\omega}{c} \cdot 4\pi \mathbf{P}_{\text{нл}}$$

с нелинейной поляризацией

$$\mathbf{P}_{\text{нл}} = \mathbf{e} P_0 \exp[-2i(\omega t - \mathbf{k}_{21}\mathbf{r})];$$

$\mathbf{e}$ — единичный вектор вдоль $\mathbf{P}_{\text{нл}}$. При отыскании частного решения неоднородной системы $\mathbf{k}$ считать равным $2\mathbf{k}_{21}$.

Ответ. $\mathbf{E} = \mathbf{A}^d \exp[-i(2\omega t - \mathbf{k}_{22}\mathbf{r})] + \mathbf{B} \exp[-2i(\omega t - \mathbf{k}_{21}\mathbf{r})]$,

$$\mathbf{k}_{22}^2 = \left(\frac{2\omega}{c}\right)^2 \varepsilon(2\omega), \quad \mathbf{B} = -\frac{4\pi}{\varepsilon(2\omega)}\, \frac{k_{22}^2 \mathbf{e} - 4\mathbf{k}_{21}(\mathbf{k}_{21}\mathbf{e})}{\mathbf{k}_{22}^2 - 4\mathbf{k}_{21}^2}\, P_0;$$

$\mathbf{A}^d$ — произвольный постоянный вектор.

259. Проверить справедливость неравенства

$$k_3 > k_2 + k_1, \quad k_j = \frac{\omega_j}{c}\, n_j, \quad n_j = n(\omega_j)$$

при условиях

$$\omega_3 = \omega_2 + \omega_1 > \omega_2 > \omega_1, \quad n_3 > n_2 > n_1.$$

Ответ. Неравенство эквивалентно

$$(n_3 - n_2)\omega_3 > 0 > -(n_2 - n_1)\omega_1.$$

260. Выразить коэффициент усиления для стоксова вынужденного комбинационного рассеяния через интегральную (по частотам и углам) мощность спонтанного комбинационного рассеяния.

У к а з а н и е. Рассуждаем по аналогии со случаем индуцированного испускания при переходах атома между состояниями m и n. Согласно формулам (223.3) и (211.15) имеем соотношения

$$\alpha(\omega) = \frac{\lambda^2}{4}\, a_{mn}(\omega)(N_m - N_n), \quad q_{mn}^{\text{спонт}}(\omega) = \hbar\omega a_{mn}(\omega) N_m,$$

с помощью которых можно выразить $\alpha(\omega)$ через $q_{mn}^{\text{спонт}}(\omega)$:

$$\alpha(\omega) = \frac{\lambda^2}{4\hbar\omega}\left(1 - \frac{N_n}{N_m}\right) q_{mn}^{\text{спонт}}(\omega).$$

Полученная связь между коэффициентом усиления и спектральной плотностью спонтанного испускания является общей для всех радиационных процессов (в том числе и для комбинационного рассеяния), причем под m, n следует понимать состояния, начальное и конечное для рассматриваемого процесса.

В случае стоксова комбинационного рассеяния начальным состоянием m служит невозбужденное колебательное состояние, конечным n — возбужденное. Если $\hbar\omega_\imath \gg kT$, то $N_n/N_m \ll 1$ и член N_n/N_m можно опустить. Принимая во внимание поляризованность и анизотропию комбинационного рассеяния (линейно-поляризованное возбуждающее излучение) и предполагая лорентцову форму контура спектральной линии, можно прийти к соотношению

$$\alpha_s = \frac{3}{4\pi}\,\frac{\lambda_s^2}{\hbar\omega_s}\,\frac{\Phi_s}{\Gamma} = \frac{3}{4\pi}\,\frac{\lambda_s^2 CI}{\hbar\omega_s\Gamma}\,.$$

261. Определить резонансную часть вынужденных колебаний ядер молекулы при ее взаимодействии с полем, описываемым формулой (239.5).

Ответ.

$$\xi = \xi_0 \sin(\omega_\imath t + \varphi - \varphi_s), \quad \xi_0 = \frac{\mu A A_s}{2m\Gamma\omega_i}\,. \tag{1}$$

У к а з а н и е. Вынуждающая сила в уравнении движения ядер (239.4) содержит часть

$$AA_s \cos\left[(\omega - \omega_s)t + \varphi - \varphi_s\right],$$

которая изменяется с собственной частотой колебаний ядер. Колебания, вынуждаемые этой частью силы, и описываются формулой (1).

262. Найти направление, для которого происходит синфазное сложение вторичных антистоксовых волн, излучаемых слоем рассеивающего вещества (толщина слоя d, см. рис. 46) при большом усилении стоксова излучения ($\alpha_s d \gg 1$) и малом радиусе пучка возбуждающего света ($a^2 \ll \lambda d^2 \alpha_s$).

Ответ.

$$\frac{4\sin^2\vartheta}{2} \approx \vartheta^2 = \frac{2(k_s + k_{as} - 2k)}{k_{as}}\,,$$

где ϑ — угол между направлениями синфазности и распространения возбуждающего излучения.

У к а з а н и е. Фаза колебаний антистоксовой составляющей p_{as} дипольного момента (см. (239.7)) равна $2\varphi - \varphi_s$, где φ и φ_s — фазы возбуждающей и усиленной стоксовой волн в точке $\mathbf{r}_l(x_l, y_l, z_l)$ расположения одной из

рассеивающих молекул. В точке наблюдения $\mathbf{r}(x, y, z)$ (см. рис. 46) фаза антистоксовой волны, испущенной этой молекулой, равна

$$\psi = k_{as}|\mathbf{r} - \mathbf{r}_l| + 2\varphi - \varphi_s,$$
$$k_{as} = \frac{\omega_{as} n_{as}}{c}.$$

Возбуждающая волна распространяется вдоль оси z, вследствие чего

$$\varphi = kz_l, \quad k = \frac{\omega n}{c}.$$

Стоксово излучение в точке $\mathbf{r}_l$ есть сумма стоксовых волн, излучаемых всеми молекулами слоя. Обозначим положение одной из них через $\mathbf{r}_j(x_j, y_j, z_j)$. Фаза стоксовой волны от j-й молекулы в точке $\mathbf{r}_l$ равна

$$\varphi_s = k_s|\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_j|, \quad k_s = \frac{\omega_s n_s}{c}.$$

Таким образом,

$$\psi = 2kz_l + k_{as}|\mathbf{r} - \mathbf{r}_l| - k_s|\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_j|.$$

Рассматривая актистоксово излучение в зоне Фраунгофера, получим

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_l| \approx r - \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}_l}{r} \approx r - z_l \cos\vartheta - \frac{xx_l + yy_l}{r}.$$

Поскольку по предположению $\alpha_s d \gg 1$, наибольшую интенсивность имеют стоксовы волны, прошедшие почти всю толщину рассеивающего (и усиливающего!) объема, т.е. волны, испущенные в слое с толщиной порядка $1/\alpha_s$, который прилегает к левой границе объема, и индуцирующие дипольный момент p_{as} в слое такой же толщины у противоположной, правой границы объема. На рис. 46 эти слои указаны штриховыми линиями. Поэтому

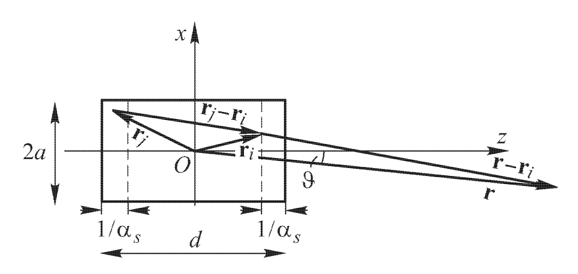


Рис. 46

можно считать $d - (z_l - z_j) \sim 1/\alpha_s \ll d$. Если, далее, диаметр излучающей области, определяемый диаметром пучка возбуждающего излучения $2a$, достаточно мал, то $|\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_j|$ можно разложить по степеням поперечных координат и воспользоваться условием большого усиления

$$|\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_j| = z_l - z_j + \frac{(x_l - x_j)^2 + (y_l - y_j)^2}{d}.$$

Таким образом, суммируя изложенные соображения, находим

$$\psi = k_{as} r + k_s z_j - k_s \frac{(x_l - x_j)^2 + (y_l - y_j)^2}{d} - \\ - k_{as}\frac{xx_l + yy_l}{r} + (2k - k_s - k_{as}\cos\vartheta) z_l.$$

Дальнейшее вычисление антистоксова рассеяния подразумевает суммирование вторичных волн с фазами ψ, причем суммирование следует проводить и по j, и по l. Однако основные качественные особенности индикатрисы антистоксова рассеяния можно выяснить, и не выполняя указанного суммирования в явном виде. Поскольку в выражении для ψ присутствуют члены, зависящие только от поперечных координат x_j, y_j, x_l, y_l, и член, зависящий только от z_l, суммирования по x_j, y_j, x_l, y_l и по z_l независимы и конечный результат будет содержать два множителя. Один из них, отвечающий суммированию по z_l, имеет максимальное значение, если коэффициент при z_l в выражении для ψ обращается в нуль, т.е. $2k - k_s - k_{as}\cos\vartheta = 0$. В направлении, соответствующем этому условию, антистоксовы волны от разных слоев приходят в точку наблюдения с равными фазами (направление пространственной синфазности). Из указанного условия находим

$$2\sin\frac{\vartheta}{2} \approx \vartheta = \sqrt{\frac{2(k_s + k_{as} - 2k)}{k_{as}}}\,.$$

Суммирование по j определит область когерентности в правом слое рис. 46 с размерами $2l_{\text{ког}} = \lambda d/2a$ (см. § 22), а суммирование по l — угловую зависимость второго множителя. Его угловая ширина равна отношению длины волны к $2l_{\text{ког}}$, т.е.

$$\frac{\lambda}{2l_{\text{ког}}} = \frac{2a}{d}\,, \quad \text{если} \quad 2l_{\text{ког}} = \frac{\lambda d}{2a} < 2a,$$

либо отношению длины волны к $2a$,

$$\frac{\lambda}{2a}\,, \quad \text{если} \quad 2l_{\text{ког}} = \frac{\lambda d}{2a} > 2a.$$

263. Рассмотреть голографирование объекта, состоящего из двух бесконечно удаленных точек, посылающих на голограмму волны с углами падения φ_1, φ_2. Вычислить распределение интенсивности в интерференционной картине на голограмме. Определить углы дифракции просвечивающей волны. Выяснить вопрос о подобии объекта и изображений (мнимого и действительного). Установить условия исчезновения действительного изображения.

Ответ. Распределение интенсивности в плоскости голограммы имеет вид

$$a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos\left(\frac{2\pi}{d_1}\,x + \psi_1\right) + \\ + 2a_2a_0\cos\left(\frac{2\pi}{d_2}\,x + \psi_2\right) + 2a_1a_2\cos\left(\frac{2\pi}{d_3}\,x + \psi_3\right),$$

где a_0, a_1, a_2 — амплитуды опорной и предметных волн; ψ_1, ψ_2, ψ_3 — постоянные фазы; периоды d_1, d_2, d_3 систем полос равны

$$d_1 = \frac{\lambda}{\sin\varphi_0 - \sin\varphi_1}\,,$$
$$d_2 = \frac{\lambda}{\sin\varphi_0 - \sin\varphi_2}\,,$$
$$d_3 = \frac{\lambda}{\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2}\,,$$

φ_0 — угол падения опорной волны. Полосы с периодами d_1, d_2 связаны с интерференцией предметных волн с опорной; дифракция просвечивающей волны на соответствующих решетках Рэлея приводит к образованию изображений, т.е. плоских волн, направление распространения которых задается соотношениями

$$\sin\theta_{m,1} = \sin\varphi_0 + m(\sin\varphi_0 - \sin\varphi_1),$$
$$\sin\theta_{m,2} = \sin\varphi_0 + m(\sin\varphi_0 - \sin\varphi_2).$$

Для мнимого и действительного изображений $m = -1$ и 1. Решетка с периодом d_3 образует волны с направлениями распространения

$$\sin\theta_{m,3} = \sin\varphi_0 + m(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2), \qquad m = \pm 1.$$

Мнимое изображение подобно объекту, поскольку $\theta_{-1,1} = \varphi_1$, $\theta_{-1,2} = \varphi_2$ и $\theta_{-1,1} - \theta_{-1,2} = \varphi_1 - \varphi_2$. Действительное изображение не подобно объекту, так как $\theta_{1,1} - \theta_{1,2} \neq \varphi_1 - \varphi_2$. Условия исчезновения действительного изображения

$$|2\sin\varphi_0 - \sin\varphi_1| > 1, \quad |2\sin\varphi_0 - \sin\varphi_2| > 1.$$

Волны, возникающие из-за дифракции на решетке с периодом d_3, не перекрываются с волнами, формирующими изображение, если угол падения φ_0 опорной и просвечивающих волн отличается от φ_1, φ_2 больше, чем φ_1, φ_2 между собой.

264. 1) Определить положение предмета, при котором поперечное и продольное увеличения действительного изображения одинаковы.

2) Вычислить поперечное увеличение дополнительного изображения в случае плоской опорной волны.

Ответ. 1) $\dfrac{1}{r_s} = \dfrac{1}{k'+k}\left(\dfrac{k'}{r_0'} + \dfrac{k}{r_0}\right)$. 2) $V'' = \dfrac{1}{1 - (k'/k)(r_s/r_0')}$.
Дополнительное изображение — увеличенное, если просвечивающая волна — расходящаяся.

265. Доказать, что распределение освещенности в интерференционной картине, образующейся в плоскости H (см. рис. 11.7), представляет собой преобразование Фурье распределения амплитуды поля в плоскости объекта.

Указания. Обозначим через x' расстояние OS, через x — текущую координату в плоскости H голограммы, через $T(x')$ — относительную амплитуду поля на объекте (коэффициент его пропускания). Переменная часть освещенности в интерференционной картине, обусловленная действием элемента dx' объекта, пропорциональна амплитуде поля в точке x'

$$dI(x) \propto T(x')\,dx' \cos\frac{2\pi}{\mathscr{B}}\,x; \quad \mathscr{B} = \frac{\lambda r_0}{x'},$$

где $\mathscr{B}$ — период интерференционных полос. Интенсивность, обусловленная светом от всего объекта, будет

$$I(x) \propto \int T(x')\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\,\frac{x}{r_0}\,x'\right)dx';$$

что и требовалось доказать.

266. Вывести соотношения, определяющие положения главного и дополнительного изображений, которые формируются репродукцией голограммы, сжатой в M раз в сравнении с оригиналом.

Ответ. Требуемые соотношения получаются из формул § 61 в результате замен: $k \to kM$, $r_0 \to r_0/M$, $r_s \to r_s/M$, $\boldsymbol{\rho}_s \to \boldsymbol{\rho}_s/M$, $\boldsymbol{\rho}_0 \to \boldsymbol{\rho}_0/M$. В частности,

$$V' = \frac{M}{M^2(1 - r_s^2/r_0^2) + (k'/k)(r_s/r_0')}\,.$$

Указание. Выражение для фазы $\psi(\boldsymbol{\rho})$ (см. (61.3)) в рассматриваемом случае имеет вид

$$\psi(\boldsymbol{\rho}) = k|\mathbf{r}_s + \boldsymbol{\rho}_s - M\boldsymbol{\rho}| - k|\mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\rho}_0 - M\boldsymbol{\rho}| + k'|\mathbf{r}_0' + \boldsymbol{\rho}_s' - \boldsymbol{\rho}| =$$
$$= kM|\mathbf{r}_s/M + \boldsymbol{\rho}_s/M - \boldsymbol{\rho}| - kM|\mathbf{r}_0/M + \boldsymbol{\rho}_0/M - \boldsymbol{\rho}| + k'|\mathbf{r}_0' + \boldsymbol{\rho}_s' - \boldsymbol{\rho}|.$$

Формулы для главного и дополнительного изображений переходят друг в друга при замене k на $-k$, как следует из сопоставления выражений для полей $\mathscr{E}_2(\boldsymbol{\rho})$ и $\mathscr{E}_3(\boldsymbol{\rho})$, введенных в § 61:

$$\mathscr{E}_2(\boldsymbol{\rho}) = T_0 E_0^*(\boldsymbol{\rho}) E'(\boldsymbol{\rho}) E(\boldsymbol{\rho}),$$
$$\mathscr{E}_3(\boldsymbol{\rho}) = T_0 E_0(\boldsymbol{\rho}) E'(\boldsymbol{\rho}) E^*(\boldsymbol{\rho}).$$

267. Показать, что геометрическое место точек равных значений амплитуды колебаний при интерференции двух плоских волн с волновыми векторами $\mathbf{k}_0$ и $\mathbf{k}$ суть плоскости, перпендикулярные вектору $\mathbf{k} - \mathbf{k}_0$. Вычислить период интерференционной структуры.

Ответ. Период равен

$$d = \frac{2\pi}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|} = \frac{\lambda}{2\sin(\theta/2)}\,,$$

где θ — угол между векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}_0$.

268. Выяснить условие интерференционного погашения дифрагировавшей волны порядка $m = 1$ в случае объемной голограммы плоской волны (см. рис. 11.13). Опорная и просвечивающая волны падают на голограмму перпендикулярно к ее поверхности.

Ответ. Отношение интенсивностей волн порядков $m = 1$ и -1 равно

$$\left\{ \frac{\sin[2kh\sin^2(\theta/2)]}{2kh\sin^2(\theta/2)} \right\}^2,$$

где h — толщина голограммы, θ — угол между опорной и предметной волнами. Условие погашения волны $m = 1$ можно сформулировать так:

$$2kh\sin^2\frac{\theta}{2} \geqslant \pi, \quad \text{или} \quad h \geqslant \frac{\lambda}{[2\sin(\theta/2)]^2}\,.$$

Указание. Голограмму (см. рис. 11.13 *б*) мысленно разбить на бесконечно тонкие слои dz (ось z перпендикулярна поверхности голограммы). Каждый из них рассматривать как решетку Рэлея, т.е. принять во внимание модуляцию амплитуды просвечивающей волны по закону $\cos(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)\mathbf{r}$ (см. упражнение 267). Рассмотреть интерференцию волн, идущих от всех элементарных слоев голограммы.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ